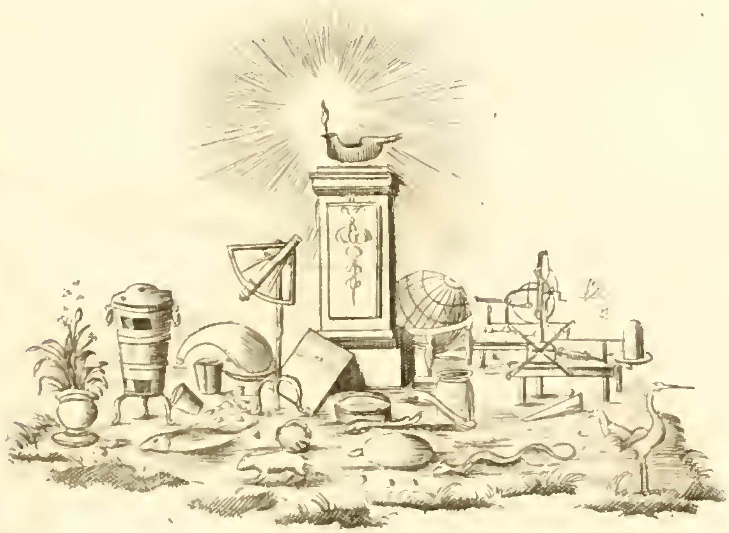
ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

pro Anno MDCCLXXXII.

PARS POSTERIOR.



PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXXVI.

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

MDCCLXXXII. Juillet —— Décembre.

)(2 MÉTÉ-

ACTA ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

ad Annum MDCCLXXXII. Pars poſterior.

Cum tabulis VII. aeri inciſis.

LEONH.

JACQ.

Errata.

Errata.

Pag. 249 et 250 ad marginem loco Tab. V. VI. et VII. lege Tab. VII. Fig. 1. 2 et 3.

Pag. 308. lin. 11. lege consideratione.

Pag. 312. lin. 22. lege procedimus.

HISTO-

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES

SCIENCES.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

MDCCLXXXII.

Juillet —— Décembre.

L'Académie n'a point tenu d'Aſſemblée publique, la diſtribution du Prix annuel qui devoit avoir lieu vers la fin de cette année, ayant été remiſe au commencement de la prochaine.

Le 22 Août, dans une ſéance ordinaire, a été reçu au nombre des Adjoints, M. *Jean Fréderic Hackmann*, Conrecteur du Gymnaſe Académique. Le Secrétaire l'ayant introduit à la ſéance ſuivante, le nouveau Adjoint y a prononcé le diſcours de reception ſuivant.

 Viri

Viri Illuſtres, Celeberrimi et Clariſſimi!

„Multae ſunt in ſocietate civili conditiones, in quibus vel mediocris ingenii homo maximo cum ſuo et civium ſuorum fructu reipublicae commodis proſpicere poteſt. —— Ad pleraque negotia et munera vitae obeunda vulgares animi dotes ſufficiunt, multaque quae aliis praeſtamus officia a benevola tantum animi affectione proficiſcuntur.

Cautione maxima providendum eſt, vt tale vitae genus ſectemur, cui ingenium et mores noſtri optime conveniunt, et in quo de ſocietate, cui interſumus, bene merendi recteque factis benevolentiam civium nobis conciliandi opportunitas datur. Quicunque igitur, vana ſui opinione ductus, praecipiti iudicio agit, remque, cui impar eſt, ſuſcipit, iure reprehendendus erit. —— Inprimis hoc cavendum eſt homini, qui nulla munera civilia in republica ſuſcipiens, ſtudio litterarum otium conſecrando exquiſitiorem doctrinam ſibi comparare conatur.

Arduum videtur in ſtudiis litterarum excellere, cum tot ſaecula, quae a primo ſcientiarum ortu elapſa ſunt, multa quidem et inluſtria ingenii humani monumenta exhibeant, ſed pauca tantum, ſi reputes, quanta interea vis mortalium, nullis factis aut cogitatis ad poſteros nota, vitam obſcuro ſilentio poſuerit. —— Inter ipſos etiam viros illos, qui varios apud populos et diuerſis temporibus litteras coluerunt, rariora inſignis alicuius doctrinae exempla inuenies.

Mul-

Multi veterum, qui nomen celebre ad posteritatem reliquerunt, negotiis civilibus fungebantur, et in otio tantum litterarum studia tractabant. —— Fieri hoc poterat saeculis illis, cum arctiores limites. quibus omnes disciplinae circumscriptae erant, non continuum in litteris laborem requirerent, cumque ipsa negotiorum publicorum ratio nondum tantis difficultatibus impedita erat. —— Cum autem omnes fere disciplinae in immensum creverint, difficile est, vitae publicae negotia obeundo in litteris simul insigni aliquo modo proficere. —— Nostra tamen aetas nonnulla etiam et inlustria huius rei exempla tulit, sed haec a viris profecta sunt, qui raro ingenio praediti, vel fortunae donis prae caeteris ornati fuerunt. —— Cum autem hoc paucis tantum, quos dii amant, datum sit, ad vulgares calculos vocari nequit.

Provisum igitur est, vt, qui exquisitioris doctrinae cupidi essent, in societates litterarias coirent, litterisque vacando decus et famam comparare possent. Disciplinae illae, quibus ad vitae civilis negotia instituimur, praeclaram nobis in civitate nostra et apud populares nostros laudem comparare possunt. —— Latius autem patet id celebritatis genus, quod ab iis maxime litteris et artibus proficisci potest, quae omnium populorum commodis inseruiunt, ipsamque rerum hominumque naturam explorando, nobilissimam in qua se exerceat ingenium materiam praebent.

Haec dicenda duxi Viri Illustres, ne me ignarum existimetis, quantum conatus sim, cum meum nomen Illustri Vestrae Societati ascribi cuperem, vtque Vobis gratum meum animum tester, qui hominem mediocri tantum ingenio et doctrina ornatum ſumma benevolentia in coetum veſtrum recipiendo, ſtimulos mihi addidiſtis, quo doctrinae et virtutis Veſtrae aemulus fierem.

Honorificum eſt coetu et conſuetudine clariſſimorum virorum vti, hocque ſemper mea laus, meum decus erit, omnique re qua honos Veſter augetur, meum etiam auctum putabo. —— Multo propenſiores opiniones hominum experitur, qui collegio magnorum virorum adſcriptus eſt, magnumque habet praeiudicium doctrinae et virtutis, ſummorum enim virorum conſiliis aliquantum proficere et ſapere poſſe videtur.

Vitae humanae incerti caſus me admonent, ne multa de me promittam, hoc autem perſuaſum habeo, mea ſtudia nunquam Illuſtribus Veſtris nominibus dedecori fore. Vnumque addo et ſummo opere a Vobis peto, vt monitis et conſiliis me, pro humanitate quae in Vobis eſt, ſublevetis, Veſtro enim exemplo et ſodalitio, quidquid in litteris proficere poſſim, magna ex parte debitum feram. "

Pour ne pas groſſir la liſte des Académiciens externes, & diminuer par là l'honneur attaché à ce titre, pour obliger toutefois des ſavans qui ſouhaiteroient d'être liés plus intimement avec l'Académie, il a été jugé à propos de créer avec le conſentement du Directeur, une claſſe d'Aſſociés étrangers ſecondaire, ſous le titre de *Correſpondans externes* & de leurs expédier en ſoi de leur agrégation à cette Claſſe, un Diplome imprimé ſur du parchemin, ſellé du grand ſeau académique & conçû en ces termes.

Au-

Auſpiciis Auguſtiſſimis Potentiſſimae Imperatricis ac Dominae Dominae CATHARINAE SECVNDAE totius Ruſſiae Autocratoris, Academiae Scientiarum Petropolitanae Protectricis munificentiſſimae.

Academia Scientiarum Petropolitana Virum Clariſſimum N. N. ob aſſiduam Eius in litteris colendis induſtriam commercio litterario ſecum iungere decernens, huius rei vt publicum exiſtat teſtimonium, Diplomate hoc Correſpondentem ſuum rite et ſolemniter declarat; penitus perſuaſa, Virum Clariſſimum pro inſigni ſuo in litterarum disciplinas amore, obque nouum hunc, quo ornatus eſt, honoris titulum, Academiam Petropolitanam per litteras de omnibus certiorem facturum, quae ad augmentum ſcientiarum facere poſſe videntur. Datum in Conuentu Academico d.

Acad. Imp. Scientiarum Director
N. N.

(L. S.)

Conuentus Academici Scretarius
N. N.

Ce fut conformement à cette reſolution, que l'Académie reçut encore dans la même ſéance du 22 Août

M. *Simon Lhuilier*, Citoyen de Génève & membre de la Société d'Education en Pologne, à Varſovie

au nombre des Correſpondans Externes.

Le

Le 7 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyef* de retour de ſon voyage en Crimée, eſt venu reprendre ſéance à l'Académie, où il a lu un rapport des ſes voyages en langue ruſſe, dans lequel il indique la route & les endroits mémorables par leſquels il a paſſé; ainſi que les envois des collections d'Hiſtoire naturelle & d'antiquités qu'il avoit expédiées pour l'Académie, & qui tous ont été reçu & dépoſé au Muſeum Académique.

AN-

ANNONCE
d'un
OUVRAGE BOTANIQUE
ſur les Arbres, Arbuſtes & Plantes de l'Empire de Ruſſie, qui ſera publié par ordre & ſous les auſpices de *SA MAJESTE IMPERIALE.*

Communiqué & diſtribué à l'Académie le 12 Août.
Par M. le Conſeiller de Collèges *Pallas.*

Tandis que *l'Auguſte Légiſlatrice* du Nord s'occupe du bonheur de *Ses* ſujets, par l'introduction de nouvelles loix, d'une adminiſtration de juſtice & de finance plus analogue à *Ses* grandes vuës, par la reforme de l'éducation nationale, par l'encouragement des ſciences, des arts & du commerce, par *Ses* ſoins enfin de former l'eſprit des Princes qui doivent un jour devenir les émules de ſa grandeur; — *cette Souveraine* ſage & éclairée ne dedaigne pas les détails qui peuvent tendre à la perfection de *Son* ouvrage.

Sa Majeſté Impériale s'occupant entre autres d'un nouveau Réglement pour la conſervation des forêts de *Son* Empire, & deſirant en même tems de perfectionner l'économie rurale & de ſoulager l'humanité par une connois-

 ſance

ſance préciſe des plantes utiles que le ſol de *Son* vaſte Empire produit; *Elle* a conçu l'idée d'un ouvrage botanique qui put remplir ce but: idée digne de l'Eſprit créateur de *l'Auguſte Protectrice* des Sciences, dont la munificence pour l'avancement des connoiſſances humaines a brillé depuis *Son* avénement au trône, par le renouvellement de l'Académie des Sciences & l'inſtitution de celle des Arts; par ces voyages diſpendieux d'obſervateurs tant Aſtronomes, que Naturaliſtes, dont le nombre & l'importance a ſurpaſſé tout ce que les autres nations ont fait dans ce ſiecle; par les encouragemens accordés ſans nombre aux ſavans étrangers & régnicoles; par l'emploi de ſommes annuelles conſidérables pour la traduction des meilleurs ouvrages de tout genre en langue nationale; enfin par l'illuſtre exemple qu'*Elle* a donné *Elle* même dans la carriere des lettres.

Sa Majeſté Impériale voulant que l'ouvrage projetté ſoit entierement exécuté à *Ses* dépens, dans l'intention ſeule de contribuer au bien-être & à l'inſtruction des hommes; on n'a ni ſouſcription, ni autre engagement à propoſer au public; mais puisque tous ceux, que ce grand ouvrage interéſſera, doivent, en y applaudiſſant, deſirer d'avance quelque notion de ce qu'on doit en attendre, j'ai crû qu'il étoit de mon devoir de ſatisfaire la curioſité du public par l'esquiſſe ſuccincte que j'en vais donner. Voici en peu de mots le plan, tel qu'il à été approuvé par *Sa Majeſté Impériale.*

L'ouvrage pour lequel *Sa Majeſté Impériale* a fait aſſigner les fonds néceſſaires, ſera executé avec tout le luxe

luxe typographique qui convient à la magnificence d'une telle entreprise. Les planches qui doivent représenter les plantes de grandeur naturelle, seront du grand format des beaux ouvrages botaniques de Mr. *Jacquin*, legérement gravées & colorées avec tout le soin possible sur des originaux faits d'après nature. — Le texte qui contiendra les déscriptions & détails nécessaires sur la nature & l'usage de toutes les plantes indigênes, paroitra en russe & en latin, de la même grandeur & sur le même papier de Hollande que les planches.

L'objet principal de l'ouvrage que *Sa Majéste Impériale* veut génèreusement donner à *Son* peuple & à la République des lettres étant l'utilité publique, les plantes immediatement utiles à l'humanité tiendront donc le premier rang dans l'execution. Pour ne pas rendre l'ouvrage inutilement volumineux, on retranchera d'abord de la suite des planches, les arbres & les plantes les plus généralement connues par des noms vulgaires, surtout lorsqu'il ne sauroit résulter de cette omission aucune méprise dangereuse pour l'humanité. Le texte n'en donnera pas moins les détails utiles à connoitre sur la nature & l'usage de ces espèces vulgaires. Le même sera observé pour les espèces aussi communes en Europe qu'en Russie, dont on trouve les figures dans les ouvrages botaniques les plus connus & qui n'annoncent d'ailleurs aucune vertu particuliere.

On s'attachera au contraire à donner des gravures aussi parfaites que possible de toutes les espèces affectées à l'Empire, ou dont l'utilité n'est que peu connue dans le pays qui les produit, & qui souvent par cette raison même n'ont pas de noms usités. Les espèces purement curieuses & rares seront un objet secondaire, qu'on aura soin de remplir à la satisfaction des Botanistes.

D'après ce plan j'estime que cinq à six cent planches gravées épuiseront à peu près, dans le total des végétaux indigènes de l'Empire Russe, toutes les espèces utiles & rares dont on pourra désirer les figures. De toutes celles qui peuvent remplir une planche de la grandeur ci-dessus énoncée, on ne fera représenter qu'une seule espèce par planche, ayant soin d'en donner non-seulement les fleurs, mais aussi le fruit, & les variétés accidentelles qu'on aura observées. Mais pour les plantes naines & petites, qui sont d'un même genre, par exemple, les saxifrages, les mousses, &c. on se permettra de placer plusieurs espèces sur la même planche, pour mieux la remplir.

Dans un ouvrage de la nature de celui-ci, il n'est pas possible d'observer aucun ordre méthodique. Mais on tâchera du moins de placer ensemble les espèces d'un même genre, & les premiers cahiers contiendront surtout les arbres & arbustes remarquables. Chaque cahier sera de cinquante planches, dont deux pourront avec le texte former un volume. On ne peut encore fixer le terme quand le premier cahier pourra être achevé; mais on tâchera d'en fournir du moins un par an & de presser l'ouvrage autant que le nombre d'artistes exercés pourra y suffire.

Le

Le choix que *Sa Majesté Impériale* a daigné faire de moi, pour exécuter sous *Ses* auspices un ouvrage de cette importance & d'une utilité si générale, m'honore infiniment; aussi employerai-je tous mes efforts pour m'en rendre digne; & si l'exécution pouvoit égaler mon zéle, j'oserois éspérer d'en faire un monument digne de la protection & du siecle de *CATHERINE SECONDE.* St. Pétersbourg ce 28 Juillet v. St. 1782.

METÉOROLOGIE.

Été de 1782.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la derniere fois le 7 Mai, & il récommença à neiger le 4 Septembre. L'intervalle entre cette derniere & premiere neige est de 120 jours.

2.

Il géla pour la derniere fois le 9 Mai au matin, Thermomètre de Délisle 152, Baromètre 28, 20 ou 28 $\frac{20}{155}$ pouces de Paris, vent d'Ouest, ciel serein. Il recommença à géler le 9 Octobre matin, Thermomètre 152 d. Baromètre 28, 03, ciel nubileux, vent de NE. L'intervalle entre ces deux époques est de 153 jours.

3.

La Néva débacla le 18 Avril par un froid de 154 degrés: les glaçons du lac de Ladoga parurent le 26 Avril, & la riviere les charia jusqu'au 9 Mai. Ensuite elle resta libre & navigable pendant 205 jours. Le 20 Novembre réparurent les premieres glaces, & la riviere les charia jusqu'au 25 au soir, où elle fut prise par un froid de 164 degrés, Baromètre 28. 35, ciel serein & vent d'Est.

4.

4.

La plus grande chaleur a été annotée le 12 Juillet à 2 heures après midi, de 109 degrés de Délisle, Baromètre 28, 08, ciel demi couvert, vent d'Eſt. Elle fut ſuivie d'un grand orage avec pluie & un vent d'Oueſt très fort. La moindre chaleur obſervée depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre, c'eſt à dire pendant l'intervalle des 153 jours, entre la derniere gelée & la premiere, a été de 149 degrés le 10 Mai matin, Barom. 28, 08, ciel ſerein, vent fort de l'Eſt: & le 8 Octobre au ſoir: Baromètre 27, 90, ciel couvert, vent de l'Eſt. La différence entre ces deux chaleurs extrèmes eſt de 40 degrés de Delisle.

5.

La chaleur moyenne de l'après midi a été trouvée

depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre - -	126	degrés.
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre -	129	— —
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre - -	125	— —

De même la chaleur moyenne de la nuit:

depuis le 9 Mai jusqu'au 9 Octobre - -	135	degrés.
depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre - -	137	— —
depuis le 1 Juin jusqu'au 1 Octobre - -	133	— —

6.

La chaleur de l'après midi a été pendant notre intervalle de 153 jours d'Eté:

1 jour au deſſus de 110^{d}. le 12 Juillet.

25 jours

25 jours entre 120 & 110 en Mai – Aout (*).
85 jours entre 130 & 120 en Mai – Octobre (**).
38 jours entre 140 & 130 en Mai – Octobre.
4 jours entre 150 & 140 le 13. 14. 16 Sept. & le 8 Octobre.

(*) Le 17. 19. 21 Mai, le 2. 6. 8 – 12. 14 Juin, le 10. 11. 14 Juillet, & le 2 – 6. 9. 11. 12. 14. 15. 19 Aôut.

(**) Le 12. 13. 16. 18. 20. 23. 25. 31 Mai, le 1. 3. 5. 7. 13. 15. 16. 20 – 30 Juin, le 1 – 9. 13. 15 – 22. 26 – 31 Juillet, le 1. 7. 8. 10. 13. 16 – 18. 20. 22 – 31 Aôut, le 3. 4 6. – 11. 18. 20. 24. 26 – 28 Sept., & le 1. 4. 5 Oct.

7.

La Chaleur de la nuit a été pendant ce même intervalle:

1 jour au dessus de 120 le 11 Juillet.
26 jours entre 130 & 120 en Juin, Juillet & Aôut (*).
95 jours entre 140 & 130 en Mai – Octobre.
31 jours entre 150 & 140 en Mai, Juin, Sept. & Octobre (**).

(*) Le 10. 11. 12. 15. 28 Juin, le 1. 5. 10. 12 – 16 Juillet, & le 1. 2. 4 – 12. 15. 16 Aôut.

(**) Le 9 – 12. 14. 15. 22 – 24. 26. 27. 29 Mai, le 18 Juin, le 3 – 6. 12 – 17. 19. 23. 24 Sept., & le 2. 3. 6. 7. 8 Octobre.

8.

Les hauteurs & les variations du Baromètre observées depuis le 1er Mai jusqu'au 1er Novembre, ce qui fait un intervalle de 184 jours, ont donné les résultats suivans.

La plus grande élévation 28, 51 le 6 Septembre à 10 h. avant midi. Thermomètre 132 d. ciel serein & calme.

La plus petite élévation 27, 31, le 20 Octobre à 3 h. matin. Thermomètre 143 d. ciel couvert, vent fort du Sud.

La variation totale 1, 20 ou $1\frac{1}{5}$ pouce.

Le milieu 27, 91.

La hauteur moyenne 27, 987, ou $27\frac{987}{1000}$ pouces de Paris.

Pendant ces 184 jours d'été la hauteur du Baromètre s'est trouvée 126 jours au dessus de $27\frac{9}{10}$, $98\frac{1}{2}$ jours au dessus de 28, & $54\frac{1}{2}$ jours au dessus de $28\frac{1}{10}$ pouces de Paris.

9.

Les vents forts pendant ces 184 jours, depuis le 1er Mai jusq'au 1er Novembre, ont soufflé.

2 jours du Nord, le 18, & 27 Juin.

8 jours de l'Est, le 6 Mai, le 12. 30 Juillet, le 9. 24 Août, le 16 Sept., & le 3. 13 Oct.

4 jours du SE. le 16. 17. 21 Mai & le 14 Août.

3 jours du Sud, le 14 Juin & le 20. 21 Octobre.

7 jours du SOu. le 24 Mai, le 17. 18 Juillet, le 26 Août, le 28 Sept., & le 22. 27 Oct.

21 jours de l'Oueſt, le 3. 30 Mai, le 4 11. 15. 16. 19. 24. 25 Juin, le 5. 6. 14 22 Juillet, le 28 Août, le 1. 10. 22 Sept. & le 11. 15. 18. 23 Octobre.

10 jours du NOu, le 26. 29 Mai, le 7, 17. 23. 30 Juin, le 2. 23 Juillet, le 11 Sept., & le 14 Oct.

10.

Les vents très forts pendant ce même intervalle ont regné.

2 jours du SE. le 13 & 19 Mai.

2 jours du Sud, le 1 & 19 Octobre.

3 jours du SOu. le 14 Mai, le 12 Juin, & le 21 Septembre.

2 jours de l'Oueſt, le 29 & 30 Août.

1 jour du NOu. le 4 Juillet.

Le nombre de tous les jours venteux eſt par conſéquent 65, parmi lesquels ſe ſont trouvés dix de vents très forts. Au reſte ce ſont les vents de l'Oueſt qui ont été les plus fréquens dans le courant de cet été.

11.

II.

Les autres variations de l'Atmofphère font indiquées dans la table fuivante.

Atmofphère.	Mai	Juin	Juill.	Aôut.	Sept.	Oct.	Somme
Ciel entiérement ferein	7	12	7	4	7	7	44 jours.
Ciel entiérement couvert	6	6	6	7	6	13	44 —
Brouillard - - -	3	1	—	3	4	2	13 —
Pluïe { médiocre - -	11	7	13	12	10	10	63 } 100 j.
Pluïe { copieufe - -	3	5	7	12	6	4	37 }
Neige - - - -	2	—	—	—	2	3	7 jours.
Tonnère - - -	2	1	1	—	—	—	4 —
Orages complets -	1	1	2	2	—	—	6 —
Grèle - - -	—	1	1	—	2	—	4 —
Aurores boréales - -	3	—	—	2	8	5	18 —
Hauteur de l'eau de pluie - - -	1,47	1,90	2,80	3,70	3,07	2,35	15, 29

La hauteur de l'eau de pluïe tombée pendant ces 6 mois d'été depuis le 1^er^ Mai jusqu'au 1^er^ Novembre, eſt par conféquent de 15 $\frac{29}{100}$ pouces de Paris,

Hyver de 1782 à 1783.

Suivant le nouveau Stile.

1.

Il neigea pour la premiere fois le 4 Septembre 1782 & pour la derniere fois le 26 Avril 1783: il y avoient donc 234 jours entre la premiere & la derniere neige.

2. Il géla pour la premiere fois le 9 Octobre: Thermom. de Délisle, à 7 h. du matin, 152 d. Baromètre 28,03, ciel nubileux, vent du NE: & pour la derniere fois le 4 Mai matin: Therm. 152 d. Baromètre 27, 87, nuages, vent de l'Oueſt. L'intervalle entre ces deux époques eſt de 208 jours: de 7 jours plus long que l'hyver paſſé.

3. La Néva fut priſe pendant 151 jours; depuis le 25 Novembre au ſoir, par un froid de 164 d., après avoir charié des glaces depuis le 20 Novembre; jusqu'au 25 Avril de grand matin, où elle debacla par une temperature de 147 d. Elle continua à charier des glaces jusqu'au 3 de Mai; les glaçons du Ladoga parurent le 8 de Mai en très grande abondance, & ils continuerent d'aller jusqu'au 24 du même mois.

4. Le

4. Le plus grand froid a été de 201 degrés le 9 Janvier matin: Baromètre 28, 20. vent d'Eſt & ciel ſerein. Le moindre froid pendant l'intervalle des 208 jours d'hyver c'eſt à dire depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai, a été obſervé de 132 d. le 24 Avril à 2 h. aprés midi. Baromètre 28, 32, calme, brouillard, puis ciel ſerein. La différence entre ces deux extrèmes eſt de 69 degrés de Délisle.

5. Le froid moyen au matin & au ſoir a été trouvé:

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai		166, 2	degrés
depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai	-	163, 4	——
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	-	160, 2	——

Enſuite le froid moyen à midi:

depuis le 1er Novembre jusqu'au 1er Mai		158, 1	degrés
depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai	-	156, 0	——
depuis le 1 Octobre jusqu'au 1 Juin	-	152, 0	——

Cet hyver a par conſéquent été plus rude que le précédent de 1781 à 1782: tant à l'égard de ſa durée qu'à celui de ſon intenſité.

6. Le froid au matin & au ſoir a été depuis le 9 Octobre jusqu'au 4 Mai.

1 jour au deſſous de 200 d. le 9 Janv.

7 jours entre 190 & 200 d. le 8. 10 — 13. 22. 23 Janv.

22 jours entre 180 & 190, le 8 — 15. 25. 26. 30 Déc. le 2. 7. 14. 17 — 19. 21. 24 Janv. & le 26 — 28 Février.

44 jours entre 170 & 180, le 26 — 29 Nov. le 1 — 7. 16 — 18. 24. 27. 29. 31 Déc. le 1. 3. 4. 6. 15. 16. 20. 25 — 28 Jan. le 7. 20. 21. 24. 25 Févr. & le 1. 2. 4. 10. 11. 14. 15. 17. 25. 27. Mars.

34 jours entre 160 & 170, en Nov. Déc. Janv. — Avril.

63 jours entre 150 & 160, en Oct. — Déc. Janv. — Mai.

37 jours entre 140 & 150, le 10. 11. 13. 17 — 25. 27 — 31 Oct. le 1 — 3. 7 Nov. le 1 Févr. le 29 Mars, le 2. 3. 16 — 18. 22 — 25. 29. 30 Avril, & le 1 — 3 Mai.

Il y avoient par conséquent parmi nos 208 jours d'hyver, 171 jours des gélée, & 37 où il a dégelé les nuits.

7. Le froid à midi dans ce même intervalle de temps, a été dans

22 jours moindre que 140, le 17. 18. 20. 23. 28 Oct. le 2. 3. Nov. le 23. Mars, le 13. 17. 18. 21 — 25. 28 — 30 Avril, & le 1. 2. 4 Mai.

58 jours entre 150 & 140, le 9 — 16. 19. 21. 22. 24 — 27. 29 — 31 Oct. le 1. 4 — 8 Nov. le 31 Janv. le 1. 2. 12 — 15. 17 Févr. le 13. 19. 20. 22. 24. 28 — 31 Mars, le 1 — 5. 8 — 12. 14 — 16. 19. 20. 27 Avril & le 3 Mai.

33 jours entre 160 & 150, en Nov. Déc. Janv. — Avril.

34 jours entre 170 & 160, en Nov. Déc. Janv. — Mars.

29 jours entre 180 & 170, le 27 Nov. le 2 — 5. 8. 9. 12 — 17. 24 — 26. 30. 31 Déc. & le 1. 2. 7. 12. 16. 19 — 21. 24 — 26 Janv.

11 jours entre 190 & 180, le 10. 11 Déc. & le 8. 10. 11. 13. 14. 17. 18. 22. 23 Janv. enfin
1 jour entre 200 & 190, le 9 Janvier.
Il y avoient donc 80 jours de dégel parmi les 208 jours d'hyver, & 128 jours où il a gélé continuellement.

8. L'Etat du Baromètre depuis le 1. Novembre 1782 jusqu'au 1. Mai 1783.

La plus grande élévation 28. 81, le 2 Décembre à 12 heures du soir. Therm. 171, ciel couvert, vent du Sud.
La plus petite élévation 27. 10 le 28 Décembre à 6 heures du matin. Therm. 156, ciel couvert, vent très fort du Nord.
La variation totale 1. 71.
Le milieu 27. 955.
La hauteur moyenne 28. 087, c'eſt à dire 28 $\frac{87}{1000}$ pouces de Paris.
Le Baromètre s'eſt trouvé 143 jours au deſſus de 27 $\frac{9}{10}$, 107 jours au deſſus de 28, & 70 jours au deſſus de 28 $\frac{1}{10}$ pouces.

9. Les vents forts pendant ce même intervalle des ſix mois d'hyver ont ſoufflé:

3 jours du *Nord*, le 11 Nov. 16 Mars & 6 Avril.
2 jours du *NE*, le 15 Mars & 27 Avril.
6 jours de l'*Eſt*, le 8. 22 Nov. 16 Déc. & le 11. 18. 19 Janvier.
2 jours du *SE.*, le 28 Févr. & 28 Mars.
4 jours du *Sud*, le 15 Nov. 8 Févr. 8 & 19 Mars.
6 jours du *SOu.*, le 19 Déc. 24. 26. 27. 28 & 29 Janv.

4 jours

4 jours de l'*Oueſt*, le 19. 23. 25 Février & le 30 Avril.
1 jour du *NOu.*, le 4 Mars.
En tout 28 jours de vent fort.

10. Les vents très forts ont regné
1 jour du *Nord*, le 28 Décembre.
1 jour du *NE.*, le 26 Avril.
1 jour du *Sud*, le 22 Février.
3 jours du *SOu.*, le 5. 31 Janv. & le 18 Février.
1 jour de l'*Oueſt*, le 4 Novembre.
En tout 7 jours de vent très fort: déſorte que cet hyver a été très peu venteux.

11. Les autres variations de l'Atmosphère obſervées pendant ces mêmes ſix mois d'hyver, ſont indiquées dans la table ſuivante:

Atmosphère.		Nov.	Déc.	Janv.	Févr.	Mars	Avr.	Somme.	
Ciel entiérement ſerein		5	6	10	5	8	11	45 jours.	
Ciel entiérement couvert		16	11	10	14	10	9	70 jours.	
Brouillard - - -		10	12	3	5	8	5	43 jours.	
Pluïe	médiocre - -	5	0	0	2	1	5	13	14 jours.
	copieuſe - -	1	0	0	0	0	0	1	
Neige	médiocre -	8	8	5	12	12	6	51	54 jours.
	copieuſe - -	0	2	0	0	1	0	3	
Hauteur de l'eau de pluie & de neige - - -		152	62	67	64	103	111	5. 59 pouces.	

Com-

Comparaiſon des inſtrumens météorologiques envoyés par l'Académie Electorale de Mannheim avec ceux de l'Académie Impériale des Sciences.

Hauteurs correſpondantes des Baromètres & Thermomètres.

I. Baromètre.

Année 1782.	Heure de l'Obſervat.	Baromètre de Manheim.	Haut. réd. en centiem. part. de P.	Baromètre de l'Académie.
		Pouc. lignes	Pouces $\frac{1}{100}$	Pouces $\frac{1}{100}$
Juillet le 23.	9. av. m.	27. 7. 0	27. 58	27. 57
24.	midi	27. 11. 8	27. 99	27. 98
25.	6. ſoir	28. 1. 8	28. 15	28. 13
26.	midi	28. 1. 5	28. 13	28. 12
26.	minuit	28. 1. 7	28. 14	28. 14
27.	6. ſoir,	28. 0. 2	28. 02	28. 03
Aout le 29.	2. après m.	27. 4. 5	27. 38	27. 39
Sept. le 6.	10 avant m.	28. 6. 0	28. 50	28. 51
	minuit	28. 5. 5	28. 46	28. 48
7.	midi	28. 5. 7	28. 48	28. 49
	6. ſoir	28. 5. 0	28. 42	28. 45
Octobre le 20.	6. matin	27. 3. 5	27. 29	27. 31
Decemb. le 2.	11. ſoir	28. 9. 5	28. 79	28. 81
28.	6. matin	27. 1. 0	27. 08	27. 10
28.	6. ſoir	27. 2. 0	27. 17	27. 17
29.	midi	27. 1. 8	27. 15	27. 12

II. Thermomètre.

Année 1782.	Heure de l'Obfervation	Thermomètre de Mannh.	Thermomètre réduit.	Thermomètre de l'Académ.
Juillet		Reaum.	Delisle.	Delisle.
le 23.	6 matin	+ 6. 0	138. 8	138
24.	2 après m.	8. 0	135. 0	135
25.	2 après m.	10. 0	131. 3	132
26.	2 après m.	12. 5	126. 9	127
27.	10. foir	7. 8	135. 8	136
Août				
le 12.	2 après m.	18. 5	115. 6	116
19	2 après m.	17. 5	117. 1	118
29	2 après m.	11. 0	129. 3	129
Septembr.				
le 6.	6. matin	4. 0	142. 5	142
Octobre				
le 21	11. foir	2. 3	145. 9	147
Décembre				
le 27.	8. matin	− 14. 0	176. 2	176
28.	7. matin	12. 7	173. 9	175
29.	7. matin	9. 3	167. 1	168

Les

Les Baromètres & les Thermomètres s'étant ainsi trouvés très bien d'accord entr'eux, on a continué d'annoter leurs hauteurs après ceux de l'Académie; & les Instrumens de Mannheim furent déposés au cabinet de Physique, ainsi que l'aiguille aimantée, qui ne varie pas plus, que ne le font celles qui se trouvent à l'Observatoire.

OUVRAGES

imprimés & manuſcrits, curioſités & productions d'Hiſtoire naturelle, préſentés ou communiqués à l'Académie pendant le dernier ſemeſtre de l'Année 1782.

Le Vendredi 8 Juillet. M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a préſenté de la part de M. *Banks* à Londres.

Reliquiae Houſtounianae, ſeu plantarum in America meridionali a *Gulielmo Houſtoun* collectarum icones, manu propria aerae inciſae, cum deſcriptionibus e ſchedis eiusdem in Bibliotheca *Joſephi Banks* asſeruatis.

Le Secrétaire a rapporté, que les inſtrumens météorologiques correſpondans envoyés par la Société Electorale de Météorologie, ſont arrivés & qu'aucun d'eux ne s'eſt trouvé endommagé; qu'il les a rétiré chez lui pour les monter & les comparer enſuite avec les inſtrumens de l'Académie.

M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *de Magellan*, ſur les nouveaux teleſcopes de M. *Herſchel* qui approchent & augmentent les objets les plus éloignes, bien au delà des meilleures lunettes achromatiques.

Le

Le 16 Juillet. Le Secrétaire a préſenté de la part de l'éditeur, M. *Jean Bernoulli* Aſtronome royal à Berlin, les ouvrages poſthumes ſuivans du célebre Académicien *Lambert*.

Joh. Heinrich Lamberts logiſche und philoſphiſche Abhandlungen 1^er^ Band. 8^vo^.

— — — deutſcher gelehrter Briefwechſel 1^er^ und 2^ter^ Band 8^vo^.

Le 12 Août. M. le Conſeiller de Colléges *Pallas* a remis pour la Bibliotheque académique, un imprimé intitulé

Enumeratio plantarum quae in horto viri Ill. atque Excell. *Procopii a Demidof* Moscuae vigent.

—— il a diſtribué des annonces en françois & en allemand, d'un Ouvrage botanique ſur les arbres, arbuſtes & plantes de l'Empire de Ruſſie, qui ſera publié par ordre & ſous les auſpices de S. M. Impériale. Voyez ci-deſſus pag. 9.

Le Secrétaire a remis deux avertiſſemens de M. *Zimmermann*, Profeſſeur de Mathématiques à Brunswig, l'un ſur l'etat préſent du Collège Carolin, & l'autre ſur deux collections très complettes de cartes géographiques & d'eſtampes à vendre.

—— enſuite le nouveau Programme des Prix propoſés pour 1782, par la Société Hollandoiſe des Sciences établie à Harlem.

Le 19 Août. Le Secrétaire a remis les nouvelles cartes celestes, publiées par M. *Bode*, Astronome de l'Academie royale des Sciences de Berlin.

M. le Conseiller de Colléges *Pallas* a présenté de la part de M. le Duc de *Croy*:

Mémoire sur le passage par le Nord, qui contient aussi des reflexions sur les glaces.

Le même Académicien a aussi remis pour le jardin botanique, quelques semences qui lui avoient été envoyées de Paris.

Le 26 Août. Le Secrétaire a lu une lettre de M. *Fried. Guillaume Gerlach*, maître d'Histoire & de Philosophie à Vienne, qui envoie & sousmet à l'approbation de l'Académie, un imprimé intitulé

Die Bestimmung der Gestalt und Grösse der Erde.

M. *Pallas* a lu une lettre de M. *Hablitzl*, datée d'Astrabat le 17 Juillet, & contenant diverses observations de Physique & d'Histoire naturelle.

Le Secrétaire a lu une lettre de M. le Chevalier de *Coudray* à Paris, qui envoie sa brochure intitulée

Le Comte & la Comtesse du Nord, anecdote russe.

Le 2 Septembre. M. le Prof. *Lexell* a lu une lettre de M. *Maskeline*, Astronome royal à Greenwich, qui communique diverses observations sur la nouvelle planete de *Herschel*, (Uranus), & qui propose une perfection nouvelle des telescopes à reflection.

Le

Le même Académicien a présenté de la part de l'Académie royale des Sciences de Stockholm.

Kongl. Vetenskaps Academiens nya Handlingar for År 1781: quatre cahiers.

Institutiones Neurologicae, five de nervis corporis humani tractatio: auctore *Rolando Martini*. Sectio I. Physiologica Holmiae 1781.

Laboratorium chemicum, af *Gustaf von Engenström.*

Le Secrétaire a présenté de la part de M. *Jährig*, une traduction allemande de la Chronologie des deux premiers tiges des Patriarches mongaux; l'Académie la remit à M. le Conf. de Coll. *Pallas* pour en faire usage dans son histoire des nations mongales.

Le 12 Septembre. Le Secrétaire a remis.

1.) de la part de l'Académie royale des Sciences de Paris: Histoire de l'Académie Royale des Sciences A. 1778, avec les mémoires de Mathématiques & de Physique pour la même année.

2.) de la part des éditeurs Mrs. l'Abbé *Rozier*, Mongez le jeune & de la Métherie

Observations fur la Physique, fur l'Histoire naturelle & fur les Arts: treize cahiers depuis Avril 1781. jusqu'au même mois de 1782, y compris.

Le 16

Le 16 Septembre. Le Secrétaire a préſenté de la part des Auteurs:

Phyſique du monde, dédiée au Roi, par M. le Baron de *Marivetz* & par M. *Gouſſier*. Tom. I. & II.

Hiſtoire de l'Aſtronomie moderne, depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'époque de 1782. par M. *Bailly*.

Le 23 Septembre. M. l'Adjoint *Fuſs* a préſenté de la part de M. *Jacques Fries*, Chirurgien du Gouvernement de Yaroslavl', les obſervations météorologiques qu'il a faites en divers endroites des Gouvernemens de Yaroslavl' & de Wologda, pendant les années 1781 & 1782; ainſi qu'une ſuite non interrompue des obſervations météorologiques faites à Kola en 1781, & une Table qui marque les époques du débacle & de la priſe du Wolga à Yaroslavl', depuis l'année 1735 jusqu'à 1782.

Le 30 Septembre. M. le Conſ. de Coll. *Pallas* a remis un Iguan empaillé, (*Lacerta Iguana* Linn.) que *Sa Majeſté l'Impératrice* avoit reçu du Gouverneur Général de Livonie, Comte de *Brown*, & envoyé à l'Académie pour être conſervé au Cabinet d'Hiſtoire naturelle.

Le 7 Octobre. M. le Conſ. de Cour *Lepechin* a lu une lettre de M. le Prof. *Spielmann* de Strasbourg, qui contient diverſes nouvelles littéraires.

Le 17 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyeſ* a expoſé & remis, pour le Cabinet d'Hiſtoire naturelle, 25 oiſeaux empailles, qu'il avoit apportés de ſon dernier voyage.

M.

M. l'Adjoint *Géorgi* a présenté & lu, une continuation de ses expériences sur l'inflammabilité spontanée du chanvre & de diverses autres matieres.

Le 24 Octobre. M. l'Adjoint *Zouyef* a remis pour le Cabinet des monnoyes & médailles, dix pieces antiques en cuivre, qu'il avoit eu occasion d'acquerir à Constantinople; & une onzieme moderne frappée l'année derniere, sous le regne du Khan Schahingueray de la Crimée.

La Commission académique a envoyé de la part de M. le Général-Major de *Klitschka*, Gouverneur d'Irkoutzk' & Chevalier de l'Ordre militaire de St George:

1. Une déscription des isles Kouriles, extraite des Journaux du Sotnik *Ivan Tschernoi*, du Bas-Officier & Interprète *Otschereänoi*, & du Gentil-homme Sibérien *Antipin.*
2. Un Dictionnaire Japonois par le Disciple *Andrè Tatarinof.*
3. Une copie de la carte du Capitaine *Cook*, avec des remarques du Sotnik *Kobelev.*
4. Une représentation de la revue des Russes par les Japonois.

La même Commission a encore communiqué un mémoire du Comptoir des nouveaux magazins de bleds, qui demande une instruction, pour garantir par le moyen des conducteurs, ces nouveaux bâtimens des effets de la foudre. M. le Conf. de Cour *Roumovski* & le Se-

 cré-

crétaire ont été chargés, de se rendre à ces magazins, & de dresser l'instruction qu'on demande.

M. le Prof. *Lexell* a présenté de la part de la Société royale des Sciences de Londres la 2de partie du LXXIe. Volume des Philosophical Transactions.

Le 28 Octobre. M. le Conseiller de Colléges *Pallas* a remis une lettre de M. le Docteur *Brückmann* de Brunswig, qui envoie un avis imprimé concernant une momie & diverses autres antiquités, qu'il offre en vente.

—— une lettre de M. *Court de Gebelin*, Président du Musée de Paris, qui annonce un ouvrage nouveau de M. *Dupuis* Membre du même Musée, qui va paroitre sous le titre:

Traité d'Architecture, comprenant les cinq ordres des anciens, établis dans une juste proportion entr'eux.

Le 7 Novembre. M. l'Adjoint *Zouyef* a exposé & présenté pour le Cabinet d'Histoire naturelle, la collection des fossiles & minéraux qu'il a ramassés dans son dernier voyage, avec un catalogue exact & détaillé, qu'il en a fait.

Le 5 Décembre. Le Secrétaire a remis:

Catalogus der seit vielen Jahren berühmten vollständigen hebräischen Bibliothek des ehemahligen Präger Ober-Rabbiners Hrn. *David Oppenheimers*.

M.

M. *Isaak Seligmann Berend Salomon* à Hambourg, propriétaire actuel de cette Bibliothéque hebraïque, l'offre à l'Académie, qui lui a fait répondre que des pareilles acquisitions n'entrent point dans son plan.

— Il a lu une lettre de M. le Conseiller d'État actuel de *Péterson*, Ministre Résident à Dantzig, qui envoie plusieurs exemplaires d'un Ouvrage latin, intitulé *Parerga historica*, que l'auteur M. l'Echevin *Uphagen*, l'a prié d'adresser au Secrétaire de l'Académie pour en faire la distribution conformément à ses vües. Le Secrétaire s'en est acquitté & en a remis des exemplaires pour la Bibliothèque, pour le Directeur & pour divers Membres de l'Académie, auxquels cet ouvrage aussi précieux que profond a pu intéresser.

Le 16 Décembre. M. le Conseiller de Collèges *Pallas* a lu une lettre de M. *Crome* de Dessau, qui lui a adressé pour présenter de sa part à l'Academie, la carte des productions de l'Europe, avec un livre pour servir à l'intelligence de cette carte, intitulé:

> Europens Producte. Zum Gebrauch der neuen Producten Carte von Europa. Dessau in 8vo.

M. l'Adjoint *Fuss* a présenté de la part de M. *Fries* Chirurgien à Yaroslavl', deux Catalogues, l'un de 19 villes du Gouvernement de Wologda, avec leurs distances exactes de Wologda, de Moscou & de St. Petersbourg; l'autre de 14 villes situées sur la grande route de Moscou à Archangel, avec leurs distances de Moscou.

Le 19 Décembre. Le Secrétaire a préſenté de la part de M. l'Abbé *Rozier*, les mois de Mai & de Juin de ſon Journal de Phyſique pour 1782.

Le même a préſenté régulierement tous les mois de l'année, les obſervations météorologiques faites à Moscou par M. l'Aſſeſſeur *Engel*, ainſi qu'un extrait de celles que M. l'Académicien *Béguelin* a faites à Berlin; & que ces deux ſavans ont bien voulu communiquer jusqu'ici à l'Académie.

MATHE-

MATHEMATICA.

DE TRAIECTORIIS RECIPROCIS TAM RECTANGVLIS QVAM OBLIQVANGVLIS.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hoc de Traiectoriis reciprocis problema, quod olim summo studio inter Geometras fuit agitatum, qua occasione maxima incrementa in Analysin sunt inuecta, eiusmodi postulat lineas curuas E C F, circa axem A C B describendas, vt, ductis vtrinque ad aequalia intervalla rectis M P et N Q axi parallelis, summa angulorum $\zeta + \eta$, quos curva cum binis hisce rectis constituit, vbique sit eadem. Hoc enim modo fiet, vt, si eadem curua circa axem inuertatur in situm $E' M' N' F'$ et secundum axem motu sibi parallelo, sicque punctum N' vsque in M promoueatur, an- Tab I. Fig. 1.

gulus

gulus interſectionis fiat $= \zeta + \nu$. Quoniam autem eximia artificia, quae olim hac occaſione ſunt exogitata, has in diſperſa reperiuntur, operam equidem non perdidiſſe videor, ſi, methodo vniformi vſus, omnia ſuccincte ante oculos poſuero: praecipue cum nonnulla plane noua adiicere contigerit.

Solutio
huius quaeſtionis in genere concepta.

§. 2. Quod ſi ergo angulum interſectionis propoſitum ponamus $= 2\alpha$, vt ſit $\zeta + \nu = 2\alpha$; tum vero ſtatuamus angulum $\zeta = \alpha - \omega$, fiet alter angulus $\nu = \alpha + \omega$. Vnde patet, angulum ω ita eſſe debere comparatum, vt, facto intervallo ab axe negatiuo, ille abeat in ſui negatiuum, ſeu in $-\omega$. Quo nunc hanc conditionem facilius ad calculum reuocemus, ducatur ad axem recta directrix GAH, quae cum axe AB faciat angulum $BAG = 2\alpha$; ac ipſa curua referatur ad hanc directionem per coordinatas obliquangulas $AP = x$ et $PM = y$; quo pacto pro puncto altero N abſciſſa AP abibit in ſui negatiuum $-x$. Cum nunc ſit $\zeta = \alpha - \omega$, manifeſtum eſt angulum ω eſſe debere functionem imparem ipſius x, ita vt, ſumto x negatiuo, etiam angulus ω fiat negatiuus. Hoc modo iam id ſumus lucrati, vt ſolum curuae punctum M conſideraſſe ſufficiat; quandoquidem hac ratione ſimul conditio alterius puncti N adimpletur.

Tab. I Fig. 2.

§. 3. Conſideretur nunc curuae elementum Mm, et ducta applicata proxima pm, directrici AG agatur parallela Mrs, eritque $Mr = Pp = dx$ et $rm = dy$; angulus

gulus vero $mrs = 2\alpha$. Vnde cum ſit angulus $Mmr = \zeta = \alpha - \omega$, erit angulus $mMr = \alpha + \omega$, vnde ex Trigonometria ſequitur fore

$$dx : dy = \text{ſin.}\,(\alpha - \omega) : \text{ſin.}\,(\alpha + \omega)\text{, ideoque}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}.$$

§. 4. Ponamus nunc ad differentialia euitanda $dy = p\,dx$, ita vt indoles curuae etiam per aequationem inter x et p determinari poſſit. Hanc ob rem habebimus $p = \frac{dy}{dx} = \frac{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}$; vnde patet, quantitatem p ita comparatam eſſe debere, vt, ſumto angulo ω negatiuo, ea abitura ſit in $\frac{\text{ſin.}\,(\alpha - \omega)}{\text{ſin.}\,(\alpha + \omega)}$, qui valor prioris eſt reciprocus. At vero angulus ω fit negatiuus, quando abſciſſa x negatiua accipitur; vnde patet, quantitatem p talem eſſe debere functionem ipſius x, vt poſito $-x$ loco x ea abeat in $\frac{1}{p}$.

§. 5. Tota ergo ſolutio noſtri problematis huc redit, vt omnes functiones ipſius x in genere inueſtigentur, quae, dum loco x ſcribatur $-x$, abeant in ſui negatiuas. Et, quod hoc loco imprimis eſt notandum, iſta proprietas ad omnes plane angulos obliquos extenditur, quippe quae conditio tantum inclinationem applicatarum ad abſciſſas afficit; ita vt, quaecunque aequatio inter x et y inuenta problemati ſatisfecerit, eadem pro omnibus angulis interſectionum aeque valeat; dummodo obliquitas coordinatarum ipſi angulo interſectionis aequalis ſtatuatur. Ita, dummodo problema pro angulo interſectionis recto fuerit ſolutum, eadem ſolutio facillime ad omnes interſectionis angulos obliquos transferri poterit. Et quoniam tantum obliquitatem coordinatarum immutari opus eſt, ſi lineae inuentae fuerint algebraicae, eae hac translatione perpetuo ad eundem ordinem pertinebunt.

§. 6. Quia igitur inuentio functionum reciprocarum vniuersam huius quaestionis solutionem in se complectitur, facili negotio innumerabiles huiusmodi functiones exhibere licet. Inter quas primum occurrit formula $p = e^{nx}$: sumto enim x negatiuo, haec formula abit in hanc: $\frac{1}{p} = e^{-nx}$. Hinc cum sit $p = \frac{dy}{dx}$, fiet $dy = e^{nx}\,dx$ ideoque $y = \frac{1}{n}e^{nx}$, siue $l n y = n x$, quae est aequatio pro logarithmica. Deinde etiam quasi sponte se offert haec formula: $p = \frac{a-x}{a+x}$, quippe quae, mutato signo ipsius x, abit in $\frac{a+x}{a-x} = \frac{1}{p}$. Hinc autem fiet

$$y = \int \frac{a-x}{a+x}\,dx = -x + 2al(a+x), \text{ siue}$$

$$y + x = 2al\frac{a+x}{a}$$

quae curua etiam per logarithmicam facile construi potest. Praeterea etiam patet sumi posse $p = \frac{aa-bx+xx}{aa+bx+xx}$; sumto enim x negatiuo prodit $\frac{1}{p} = \frac{aa+bx+xx}{aa-bx+xx}$. Hocque modo innumerabiles alias similes formulas excogitare licet praescriptae conditioni satisfacientes.

§. 7. Quo autem rem generalius expediamus, denotent litterae P, R et T functiones quascunque pares ipsius x, quae scilicet maneant eaedem, licet loco x scribatur $-x$ At vero Q, S et V denotent functiones impares ipsius x, quae scilicet abeant in sui negatiuas, cum pro x scribitur $-x$; ac manifestum est, conditioni nostrae satisfieri, si statuatur $p = \frac{P-Q}{P+Q}$; atque adeo generalius

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m}.$$

Quin

Quin etiam tales formulae coniungi possunt, vt sit

$$p = \frac{(P-Q)^m}{(P+Q)^m} \cdot \frac{(R-S)^n}{(R+S)^n} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k}.$$

Perspicuum enim est hoc modo, si loco x scribatur $-x$, litteram p abituram esse in $\frac{1}{p}$. Haec ergo Solutio cum sit generalissima, nulla plane laborat difficultate, siquidem curuis transcendentibus contenti esse velimus.

De curuis algebraicis quaestioni satisfacientibus.

§. 8. Verum si lineae algebraicae desiderentur, haud ita facile patet, cuiusmodi functiones loco P, Q, R, S, etc. accipi oporteat, vt formula $\int p\,dx = y$ fiat integrabilis. Singularis quidem casus haud difficulter se offert sumendo $p = (x + \sqrt{1+xx})^n$, quippe quae functio etiam est reciproca: Scripto enim $-x$ loco x ea abit in

$$\frac{1}{p} = (-x + \sqrt{1+xx})^n = \frac{1}{(x+\sqrt{1+xx})^n}.$$

Notum autem est formulam hinc ortam

$$y = \int dx\,(x + \sqrt{1+xx})^n$$

semper esse integrabilem, solis casibus $n = 1$ et $n = -1$ exceptis. Quod si enim ponatur

$$x + \sqrt{(1+xx)} = v, \text{ fiet}$$

$$x = \frac{vv-1}{2v} \text{ et } dx = \frac{dv(vv+1)}{2vv},$$

vnde cum sit $y = \int v^n\,dx$, erit

$$y = \frac{v^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{v^{n-1}}{2(n-1)};$$

ex qua formula innumerae curuae algebraicae elici possunt, atque adeo ex singulis curuarum ordinibus, si modo ordo secun-

secundus et tertius excipiatur, dum scilicet loco n successiue scribantur non solum numeri integri 2, 3, 4, 5, 6 etc. sed etiam fracti $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. Quin etiam reliquae fractiones pro n assumtae in plures ordines adhuc nouas curuas suppeditabunt, quemadmodum iam alio loco est ostensum.

§. 9. Aeque foecunda etiam est haec formula:

$$p = (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n,$$

ita vt hinc fiat

$$y = \int dx\, (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n:$$

euidens enim est, sumto valore x negatiuo etiam $x^{\frac{1}{3}}$ fieri negatiuum, at vero $x^{\frac{2}{3}}$ signum suum retinere. Ad hanc igitur formulam integrandam faciamus primo $x^{\frac{1}{3}} = z$, vt fiat $x = z^3$, hincque

$$y = \int 3zz\, dz\, (z + \sqrt{1 + zz})^n.$$

Nunc ponatur vt ante $z + \sqrt{(1 + zz)} = v$, eritque

$$z = \frac{vv - 1}{2v} \text{ es } dz = \frac{dv\,(1 + vv)}{2vv}.$$

Quare cum sit $y = 3\int zz\, dz \,.\, v^n$, erit

$$y = 3\int \frac{dv(vv-1)^2}{4vv} \frac{(1 + vv)}{2vv} v^n = \frac{3}{8} \int \frac{dv}{v^4} (vv - 1)^2 (vv + 1) v^n,$$

quae aequatio euoluta et integrata praebet

$$y = \frac{3}{8}\left(\frac{v^{n+3}}{n+3} - \frac{v^{n+1}}{n+1} - \frac{v^{n-1}}{n-1} + \frac{v^{n-3}}{n-3}\right),$$

vbi est $v = x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1 + x)}^{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, etiam poni posse

$$p = (x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}}})^n;$$

tum

tum vero etiam

$$p = (x^{\frac{1}{7}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{7}}})^n,$$

$$p = (x^{\frac{1}{9}} + \sqrt{1 + x^{\frac{2}{9}}})^n,$$

quibus aſſumtis perpetuo integratio ſuccedet.

Alia methodus

curvas algebraicas quaeſtioni ſatisfacientes inueſtigandi.

§. 10. Alium autem fontem multo vberiorem aperiemus ad curuas algebraicas perueniendi. Introducatur ſcilicet noua variabilis z, cuius x ſit functio impar, ita vt ſumto z negatiuo etiam x abeat in $-x$; tum vero ſit P functio quaecunque par ipſius z, at Q eiusdem functio impar quaecunque; ac manifeſtum eſt etiam hanc formam: $p = \frac{P - Q}{P + Q}$ ſatisfacere. Vbi notaſſe iuuabit, hanc formam aeque late patere ac poteſtates eius quascunque; quandoquidem quaelibet euolutae continent vel functiones pares vel impares, vbi pares ſeorſim ſumtae, ac denique impares ad hanc ipſam formam reducuntur. Hinc ergo erit $\frac{dy}{dx} = \frac{P - Q}{P + Q}$, vnde ſtatui poterit

$$dx = M\,dz\,(P + Q) \text{ et } dy = M\,dz\,(P - Q),$$

vbi autem quantitas M ita debet eſſe comparata, vt prodeat x functioni impari ipſius z aequalis. Quod quo facilius impetrari poſſit ſumamus $M = R\,(P - Q)$, exiſtente R functione pari ipſius z; ſic enim fiet

$$dx = R\,dz\,(PP - QQ) \text{ et } dy = R\,dz\,(PP - 2PQ + QQ),$$

vbi cum ſit $PP - QQ$ functio par ipſius z, valor pro x ſponte euadet functio impar. Obtinebitur igitur:

$$x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz.$$

Facillime autem nunc pro P, Q, R eiusmodi functiones aſſignare licebit, vt ſingulae hae formulae fiant integrabiles. Veluti ſi earum loco poteſtates ipſius z accipiantur, vel etiam formulae rationales integrae quaecunque.

De parabola cubicali ſecunda tanquam ſimpliciſſima curua Problemati ſatisfaciente.

§. 11. Simpliciſſimus caſus hinc deducetur ſi ſumatur $P = a$ et $Q = -z$, vnde fit

$$x = \int aaR\,dz - \int zzR\,dz \text{ et}$$

$$y = \int aaR\,dz + 2\int azR\,dz + \int zzR\,dz.$$

Nunc porro ſumamus $R = \frac{1}{bb}$, et integrando prodibit

$$bbx = aaz - \tfrac{1}{3}z^3 \text{ et } bby = aaz + azz + \tfrac{1}{3}z^3.$$

Vbi tantum opus eſt quantitatem z eliminare, vt aequatio inter coordinatas x et y obtineatur, id quod per ſequentes operationes commodiſſime expedietur.

§. 12. Addantur duae aequationes inuentae, vt prodeat haec:

$$bb(x+y) = 2aaz + azz, \text{ vnde fit}$$

$$zz + 2az = \frac{bb}{a}(x+y),$$

ideoque

ideoque (addendo vtrinque $a a$) prodibit

$$(z + a)^2 = a a + \frac{bb}{a}(x + y).$$

Ponatur breuitatis gratia

$$a a + \frac{bb}{a}(x + y) = \frac{bbv}{a},$$

ita vt sit $v = x + y + \frac{a^3}{bb}$, eritque $z = b\frac{\sqrt{v}}{a} - a$.

Cum igitur sit

$$b b x = \frac{z}{3}(3 a a - z z), \text{ siue}$$

$$3 b b x = z(3 a a - z z) = - 2 a^3 - \frac{b^3 v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} + 3 b v v$$

erit

$$b^3 \frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = - 2 a^3 + 3 b b (v - x) = a^3 + 3 b b y.$$

§. 13. Ponatur breuitatis gratia $\frac{a^3}{bb} = 3c$, siue $a^3 = 3 b b c$, et nostra aequatio transibit in hanc:

$$b\frac{v}{a}\sqrt{\frac{v}{a}} = 3(c + y)$$

et quia $b b = \frac{a^3}{3c}$, erit $b = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3c}}$; quo valore substituto aequatio nostra erit

$$v\sqrt{\frac{v}{3c}} = 3(c + y).$$

Vnde patet, hanc curvam ad parabolam cubicalem secundam quodammodo referri posse.

§. 14. Ad hoc clarius ostendendum sit AB noster axis et M punctum quodcunque in curua, vnde ad axem AB ducatur recta MU, ita vt sit angulus $MUB = 2\alpha$, eritque $AU = PM = y$ et $UM = AP = x$. Iam cum sit $v = x + y + 3c$, prolongetur recta BAD ita, vt sit $AD = 3c$ ideoque $DU = y + 3c$. Nunc ex D ducatur recta DT, ita vt, MU producta in T, fiat $UT = UD$, Tab. I. Fig. 3.

ideoque

ideoque $TM = x + y + 3c = v$. Quia igitur triangulum DUT eſt iſosceles, erunt anguli UTD et UDT aequales $= 90° - \alpha$. Hinc ergo erit

$$DU : DT = \text{coſ.}\, \alpha : \text{ſin.}\, 2\alpha = 1 : 2\, \text{ſin.}\, \alpha,$$

vnde cum ſit $AU = y$, capiatur $AE = \frac{1}{3} AD$, eritque

$$DE = EF = 2c \text{ et } EU = y + c.$$

Nunc ex E ipſi UT agatur parallela EF, eritque

$$EU : FT = 1 : 2\, \text{ſin.}\, \alpha;$$

quare ſi vocemus rectam $FT = t$; erit $y + c : t = 1 : 2\, \text{ſin}\, \alpha$, vnde colligitur $y + c = \frac{t}{2\, \text{ſin.}\, \alpha}$.

§. 15. His praemiſſis punctum curuae M referamus ad has duas coordinatas: $FT = t$ et $TM = v$, eritque aequatio noſtra $\frac{v\sqrt{v}}{\sqrt{3c}} = \frac{3t}{2\, \text{ſin.}\, \alpha}$, ſiue aequatio inter t et v nunc erit $\frac{v^3}{3c} = \frac{9tt}{4\, \text{ſin.}\, \alpha^2}$, ſiue $v^3 = \frac{27ctt}{4\, \text{ſin.}\, \alpha^2}$. Vnde patet, hanc curuam recte vocari parabolam cubicalem ſecundam, ſi modo applicatae MT ad abſciſſas FT inclinentur angulo $FTM = 90° - \alpha$, cui etiam aequalis eſt angulus DFE. Atque ex hac aequatione facile erit curuam quaeſitam deſcribere.

Tab. I. Fig. 4. §. 16. Producamus rectam FE in infinitum, quam inſtar axis ſpectemus, ad eamque ex quouis puncto curvae M ducamus rectam MV ipſi FT parallelam, vt angulus FVM ſit $90° - \alpha$, eritque nunc abſciſſa $FV = v$ et applicata $VM = t$, quae per abſciſſam ita definitur, vt ſit $t = 2v\, \text{ſin.}\, \alpha . \sqrt{\frac{v}{27c}}$. Vnde patet ſingulis abſciſſis FV geminam reſpondere applicatam $VM = t$ et $VM = -t$;

curua

curua igitur duobus conſtabit ramis in puncto T cuſpidem conſtituentibus, vbi recta F V vtrumque ramum tangit. Ambo autem rami in infinitum excurrent, dum ſcilicet abſciſſae FV in infinitum augentur.

§. 17. Deſcripta igitur tali curua ex aequatione $v^3 = \frac{27 c t t}{4 \sin. \alpha^2}$, eius parametrum vocemus more ſolito $= f$, vt ſit $v^3 = f t t$, eritque $\frac{27 c}{4 \sin. \alpha^2} = f$, ideoque $c = \frac{4 f \sin. \alpha^2}{27}$, ita vt ex cognita parametro f vna cum angulo $90° - \alpha$, ſub quo applicata V M ad abſciſſam F V inclinatur, innoteſcat valor ipſius c. Quo notato capiatur a puncto F interuallum $FE = 2c = \frac{8 f \sin. \alpha^2}{27}$, et ex hoc puncto E agatur recta E B, ita vt fiat angulus $VEB = 2\alpha$, eritque haec recta E B axis conuerſionis pro traiectoria, atque curua circa hunc axem conuerſa et ſecundum directionem axis promota ſe inuicem ſecabit vbique ſub angulo $= 2\alpha$, id quod non parum mirum videbitur, cum ad dextram exigua exſtat portio curuae, quae inuerſa non toti arcui ad ſiniſtram ſito occurrere poſſe videtur.

§. 18. Vt huic dubio occurramus, ex M ducatur recta axi parallela M S, ita vt ſit angulus $VSM = 90° - \alpha$, erit angulus $SMV = 90° - \alpha$, ideoque $MS = SV$; vnde cum ſit $VM = t$, erit $SV = SM = \frac{t}{2 \sin. \alpha}$. Hinc cum ſit $FV = v$, erit interuallum $FS = v - \frac{t}{2 \sin. \alpha}$, vnde ob $t = \frac{v \sqrt{v}}{\sqrt{f}}$ erit hoc ſpatium $FS = v - \frac{v \sqrt{v}}{2 \sin. \alpha . \sqrt{f}}$, quod, dum quantitas v continuo augetur, neutiquam in infinitum excreſci poteſt, ſed potius tandem accipiet ſitum negatiuum. Vnde patet, hoc interuallum non vltra certum terminum

 vsque

vsque excresci posse. Ad quem terminum inueniendum differentiale huius formulae nihilo aequetur, atque obtinebitur haec aequatio: $1 - \frac{3\sqrt{v}}{4\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f}} = 0$, vnde fit

$$\sqrt{v} = \tfrac{4}{3}\,\text{fin.}\,\alpha\,.\,\sqrt{f} \text{ et } v = \tfrac{16}{9} f\,\text{fin.}\,\alpha^2.$$

Hinc igitur maximum istud spatium reperietur $= \frac{16}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$. Cum igitur esset $FE = \frac{8}{27} f\,\text{fin.}\,\alpha^2$; patet, spatium hoc maximum FS praecise duplum esse spatii FE, ita vt sit ES = FE. Quia igitur curua FM non vltra hanc rectam SM porrigitur, necesse est vt curua in puncto M rectam SM tangat; vnde patet, totum ramum curvae EM a portione EF in situm inuersum translata in omnibus punctis secari posse; et quia ramus vlterior vltra M protensus continuo magis ad sinistram vergit, ex eo intelligitur, singulis punctis vtriusque rami respondere puncta correspondentia, siue in eodem ramo siue in altero, quae in intersectione conuenire queant. Haec igitur curua talem habebit formam, vti in hac figura repraesentatur, vbi plura puncta correspondentia pluribus litteris insigniuimus; scilicet punctum a, vbi curua per axem transit, sibi ipsi respondet; tum vero punctis b, c, d, etc. respondent puncta b', c', d', etc. Vnde patet, nullam huius curuae per ambos ramos in infinitum excurrentis portionem esse otiosam, vti olim Geometris erat visum, sed cuilibet puncto vbicunque accepto respondere punctum determinatum sibi socium.

Tab. I. Fig. 5.

§. 19. Haec igitur curua tertii ordinis sine dubio est simplicissima linea traiectoria reciproca algebraica: infinitas autem alias ex iisdem generalibus, quas dedimus, scilicet $x = \int PPR\,dz - \int QQR\,dz$ et

$y =$

$$y = \int PPR\,dz - 2\int PQR\,dz + \int QQR\,dz$$

eliciuntur, ſi modo loco P et Q functiones pares ipſius z accipiantur, loco Q autem functio impar; ita tamen, vt ſingulae hae formulae integrationem admittant; cui quidem conditioni facillime ſatisfieri poteſt. Vt caſus ſaltem ſimpliciores eruamus, denotent litterae m et n numeros pares, littera vero i imparem, et ſtatuamus $P = fz^m$, $Q = gz^i$ et $R = z^n$, ex quibus valoribus orientur ſequentes formulae pro x et y:

$$x = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1} \text{ et}$$

$$y = \frac{ffz^{2m+n+1}}{2m+n+1} - \frac{2fgz^{m+n+i+1}}{m+n+i+1} + \frac{ggz^{2i+n+1}}{2i+n+1}.$$

Hic autem imprimis eſt monendum, ſimulac pro litteris m, n et i maiuſculi numeri accipiantur, tum eliminando litteram z aequationem inter x et y ad plurimas dimenſiones exſurgere, atque adeo eliminationem nequidem expediri poſſe.

§. 20. Interim tamen, quicunque valores idonei functionibus P, Q, R tribuantur, vt curuae algebraicae reſultent: tamen omnes hae ſolutiones tantum pro particularibus ſunt habendae, cum ſine dubio innumerabiles aliae dentur curuae algebraicae quaeſtioni ſatisfacientes, quae tamen in his caſibus non contineantur. Quamobrem merito deſideratur eiusmodi methodus generalis, quae omnes plane curuas algebraicas in ſe complectatur; atque talem methodum iam ante plures annos communicaui, quam hic repetere ſuperfluum foret. Verum tamen eandem ex principiis maxime diuerſis, viaque longe ſimpliciori,

ciori, hic adiungam, quae ita est comparata, vt ad alia insignia inuenta ducere posse videatur.

Methodus generalis
inueniendi traiectorias reciprocas algebraicas.

§. 21. Primum igitur obseruo, formulam simplicem ipso initio inuentam $p = \frac{P + Q}{P - Q}$, ita late patere, vt reliquas magis compositas, quas exhibuimus, in se complectatur, cum facta euolutione tam numerator quam denominator reducatur siue ad summam siue ad differentiam binarum formularum, quarum altera sit functio par, altera vero impar ipsius z. Nunc igitur cum $\frac{Q}{P}$ sit etiam functio impar, faciamus $Q = Pq$, sietque $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1 + q}{1 - q}$, vbi q denotat functionem imparem ipsius z. Necesse igitur est vt etiam x fiat functio impar ipsius q, quamobrem hanc formulam ita exhibeamus: $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + q)^2}{1 - qq}$, vt denominator euadat functio par ipsius q.

§. 22. Cum igitur debeat esse

$$dx : dy = 1 - qq : (1 + q)^2,$$

statuamus:

$$dx = dS(1 - qq) \text{ et } dy = dS(1 + q)^2,$$

eritque per notam formularum integralium reductionem:

$$x = S(1 - qq) + 2\int Sq\,dq \text{ et}$$
$$y = S(1 + q)^2 - 2\int S\,dq(1 + q),$$

vbi patet, functionem S esse debere imparem ipsius q, vt etiam x talis prodeat functio. Hoc igitur modo rem perduximus

duximus ad formulas integrales $\int S q\, d q$ et $\int S\, d q (1 + q)$, quas integrabiles reddi oportet. Hunc in finem ſtatuamus $S = \frac{d T}{d q}$, et nunc T eſſe oportet functionem parem; vnde eadem adhibita reductione fit

$$\int S q\, d q = \int q\, d T = q T - \int T\, d q \text{ et}$$
$$\int S\, d q (1 + q) = T (1 + q) - \int T\, d q;$$

ſicque totum negotium huc eſt perductum, vt $\int T\, d q$ integrabilis reddatur. Ponatur igitur $T = \frac{d V}{d q}$, vbi patet, V eſſe debere functionem imparem ipſius q, ſicque erit $\int T\, d q = V$. Hoc igitur modo omnia ad integrabilitatem ſunt perducta.

§. 23. Tota ergo Solutio huc redit, vt pro V functionem quamcunque imparem ipſius q accipere liceat. Et cum poſuerimus $T = \frac{d V}{d q}$, ſumto elemento $d q$ conſtante erit $d T = \frac{d d V}{d q}$, hincque $S = \frac{d d V}{d q^2}$; quibus valoribus ſubſtitutis ambae coordinatae ita exprimentur:

$$x = \frac{d d V (1 - q q)}{d q^2} + \frac{2 q\, d V}{d q} - 2 V \text{ et}$$
$$y = \frac{d d V (1 + q)^2}{d q^2} - \frac{2 d V}{d q} + 2 V.$$

Quin igitur in his formulis omnes plane curuae algebraicae contineantur dubitari nullo modo poteſt, quando quidem littera V omnes plane functiones impares ipſius q, ſiue rationales, ſiue vtcunque irrationales complectitur.

§ 24. Statuamus, vt exemplum facillimum afferamus, $V = q^n$, denotante n numerum quemcunque imparem, ſiue integrum ſiue fractum, puta $\frac{\mu}{\nu}$; vbi ſcilicet tam μ quam ν debent eſſe functiones impares. Erit igitur

$$\frac{dV}{dq} = n q^{n-1} \text{ et } \frac{ddV}{dq^2} = n(n-1) q^{n-2},$$

vnde coordinatae ita se habebunt:

$$x = n(n-1) q^{n-2}(1-qq) + 2 n q^n - 2 q^n$$
$$= n(n-1) q^{n-2} - (n-1)(n-2) q^n,$$
$$y = n(n-1) q^{n-2} + 2n(n-2) q^{n-1} + (n-1)(n-2) q^n,$$

ac si sumsissemus $V = a q^n$, prodiisset

$$x = n(n-1) a q^{n-2} - (n-1)(n-2) a q^n \text{ et}$$
$$y = n(n-1) a q^{n-2} + 2n(n-2) a q^{n-1} + (n-1)(n-2) a q^n.$$

§. 25. Hinc igitur patet, si poneremus

$$V = a q^m + b q^n + c q^k, \text{ etc.}$$

exponentibus m, n, k existentibus numeris imparibus, tum prodituros fuisse hos valores:

$$x = m(m-1) a q^{m-2} - (m-1)(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} - (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} - (k-1)(k-2) c q^k.$$

$$y = m(m-1) a q^{m-2} + 2m(m-2) a q^{m-1} + (m-1(m-2) a q^m$$
$$+ n(n-1) b q^{n-2} + 2n(n-2) b q^{n-1} + (n-1)(n-2) b q^n$$
$$+ k(k-1) c q^{k-2} + 2k(k-2) c q^{k-1} + (k-1)(k-2) c q^k.$$

§. 26. Hinc intelligitur, statim ac duae pluresue traiectoriae reciprocae fuerint inuentae, ex iis facile infinitas alias deriuari posse. Ita si fuerint X et Y tales functiones ipsius q, vt traiectoriam reciprocam exhibeant; similique modo etiam inuentae fuerint coordinatae X' et Y', tum vero etiam X'' et Y'', quae scilicet omnes referantur ad eandem quantitatem q, siue ad eandem quantitatem p,

quo-

quoniam eſt $p = \frac{1+q}{1-q}$, id quod euenit quando applicatae ad ſuas curuas ſub eodem angulo inclinantur; tum ex iis noua curua formari poterit, ſumendo

$$x = aX + bX' + cX'' + \text{etc.}$$
$$y = aY + bY' + cY'' + \text{etc.}$$

id quod infinitis modis fieri poterit. Hic autem ſemper aſſumimus, angulum interſectionis eſſe $= 2\alpha$, et applicatas ad abſciſſas ſub pari angulo eſſe inclinatas.

Alia methodus
Formulas generales pro curuis algebraicis eruendi.

§. 27. Quanquam autem formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{1-q}$, latiſſime patet, atque etiam formulas $\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n}$, quin etiam productum ex ſimilibus formulis, veluti:

$$\frac{(P+Q)^n}{(P-Q)^n} \cdot \frac{(R+S)^m}{(R-S)^m} \cdot \frac{(T-V)^k}{(T+V)^k} \text{ etc.}$$

in ſe complectitur: tamen dubium oriri poteſt, num hoc etiam locum habeat, ſi exponentes m, n et k fuerint numeri fracti, quoniam tum euolutio fieri nequit niſi per ſeriem infinitam. Methodum igitur adiiciam, qua etiam negotium pro formulis irrationalibus expediri poteſt; quod caſu ſimpliciori ſum oſtenſurus. Sit igitur $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1+q}{1-q}}$: vbi ſemper tenendum eſt, abſciſſam x eſſe debere functionem imparem ipſius q, quod quo facilius impetrari poſſit, formulam hoc modo repraeſentemus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+q}{\sqrt{(1-qq)}},$$

 ac

ac ponamus vt ante $dx = dS\sqrt{(1-qq)}$ ac $dy = dS(1+q)$ vbi euidens eſt, pro S ſumi debere functionem imparem ipſius q, vt ſcilicet x prodeat functio impar, quoniam $\sqrt{(1-qq)}$ tanquam functio par ſpectari poteſt. Adhibita igitur reductione fiet

$$x = S\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{Sq\,dq}{\sqrt{(1-qq)}} \text{ et } y = S(1+q) - \int S\,dq.$$

§. 28. Poſtremae formulae facillime ſatisfit ponendo $S\,dq = dT$, vt fiat $\int S\,dq = T$; ac manifeſtum eſt T eſſe debere functionem parem ipſius q. Quia igitur eſt $S = \frac{dT}{dq}$, erit primo

$$y = \frac{dT}{dq}(1+q) - T \text{ et } x = \frac{dT}{dq}\sqrt{(1-qq)} + \int \frac{q\,dT}{\sqrt{(1-qq)}};$$

ſicque iam applicata y algebraica eſt facta: pro abſciſſa autem fiet

$$\int \frac{q\,dT}{\sqrt{1-qq}} = \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - \int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

Statuatur igitur $\int \frac{T\,dq}{(1-qq)^{\frac{3}{2}}} = V$, fietque $T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}$;

vbi perſpicuum eſt, pro V ſumi debere functionem imparem ipſius q. Hoc igitur modo abſciſſa x etiam redditur algebraica; erit enim

$$x = \frac{dT}{dq}(1-qq)^{\frac{1}{3}} + \frac{qT}{\sqrt{(1-qq)}} - V.$$

§. 29. Ambas igitur expreſſiones pro x et y per per ſolam functionem V exhibeamus; et cum ſit

$$T = \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}}, \text{ erit}$$

$$\frac{dT}{dq} = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3q\,dV}{dq}\sqrt{(1-qq)},$$

his

his valoribus substitutis habebimus:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{3qdV}{dq}(1-qq) + \frac{qdV}{dq}(1-qq) - V,$$

siue

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2qdV}{dq}(1-qq) - V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV}{dq^2}(+1q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{dV}{dq}(1-qq)^{\frac{3}{2}} - \frac{3qdV}{dq}(1+q)\sqrt{(1-qq)}$$

seu

$$y = \frac{ddV}{dq}(1+q)(1-qq)^{\frac{3}{2}} - (1+q)(1+2q)\frac{dV}{dq}\sqrt{(1-qq)}.$$

In his ergo formulis quoque infinities infinitae curuae algebraicae continentur, quoniam pro V functiones quascunque impares accipere licet.

§. 30. Vt rem exemplo illustremus, sumamus $V = q$, eritque $\frac{dV}{dq} = 1$ et $\frac{ddV}{dq^2} = 0$, vnde fit

$$x = -2q(1-qq) - q = -3q + 2q^3 \text{ et}$$

$$y = -(1+q)(1+2q)\sqrt{(1-qq)}.$$

Ex hoc autem exemplo clarum est, hanc solutionem ex praecedente nullo modo deduci potuisse. Si enim ibi pro V assumeretur functio rationalis, tum etiam y prodiret rationalis: sin autem pro V assumeretur functio irrationalis, ambae litterae x et y prodirent irrationales, cum tamen hoc casu x sit quantitas rationalis.

§. 31. Nunc igitur certi sumus facti, priorem solutionem, etsi maxime generalis videbatur, tamen non omnes plane solutiones in se complecti; neque vero haec altera solutio pro generalissima est habenda, quia priorem non in se complectitur. Quamobrem adhuc generaliorem

 solu-

ſolutionem hic ſubiungamus, quae quantitates irrationales quascunque in ſe comprehendat.

Methodus generalior
traiectorias reciprocas algebraicas inueniendi.

§. 32. Denotet λ fractionem quamcunque, quae quidem ſit rationalis, ſiquidem poteſtates, quarum exponentes ſunt irrationales, non inter quantitates *algebraicas* referri, ſed *interſcendentes* appellari ſolent, ac propoſita ſit haec formula $p = \frac{dy}{dx} = \frac{(1+q)^\lambda}{(1-q)^\lambda}$, quam ſtatim in hanc transformemus $\frac{dy}{dx} = r^\lambda$, ſtatuendo ſcil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, eritque propterea $y = \int r^\lambda dx = r^\lambda x - \int r^{\lambda-1} x dr$, quam ergo poſtremam formulam integrabilem reddi oportet, ita tamen, vt x fiat impar ipſius q.

§. 33. Hunc in finem ſtatuamus $\int r^{\lambda-1} x dr = T r^\lambda$, ſicque fiet $y = r^\lambda (x - \lambda T)$; ac vero facta differentiatione $r^{\lambda-1} x dr = r^\lambda dT r^{\lambda-1} dr$, vnde colligitur

$$x = \frac{r\,dT}{dr} + \lambda T, \text{ ideoque } y = \frac{r^{\lambda+1} dT}{dr}.$$

Hoc modo iam ambae coordinatae x et y redditae ſunt algebraicae, ac problema foret ſolutum, ſi modo conſtaret, qualem functionem pro T accipi conueniat: eam autem ita comparatam eſſe oportet, vt inde prodeat $x =$ functioni pari ipſius q.

§. 34.

§. 34. Restituamus ergo loco r valorem assumtum $\frac{1+q}{1-q}$, ex quo erit $l\,r = l(1+q) - l(1-q)$, ideoque

$$\frac{dr}{r} = \frac{dq}{1+q} + \frac{dq}{1-q} = \frac{2\,dq}{1-qq} \quad \text{et} \quad \frac{r}{dr} = \frac{1-qq}{2\,dq},$$

vnde fit

$$x = \left(\frac{1-qq}{2\,dq}\right) d\,\mathrm{T} + \lambda\,\mathrm{T} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda} \left(\frac{1-qq}{2\,dq}\right) d\,\mathrm{T}.$$

Vbi cum x per duo membra exprimatur, notetur, si alterum fuerit functio par ipsius q, alterum fore functionem imparem. Unde patet loco T neque functionem parem neque imparem accipi posse, sed quantitatem ex duabus partibus constari debere, quarum altera sit functio par, altera impar.

§. 35. Statuamus $\mathrm{T} = \mathrm{R} + \mathrm{S}$, vbi R denotet functionem parem, S vero imparem; et nunc habebimus

$$x = \frac{d\,\mathrm{R}\,(1-qq)}{2\,dq} + \frac{d\,\mathrm{S}\,(1-qq)}{2\,dq} + \lambda\,\mathrm{R} + \lambda\,\mathrm{S},$$

quarum quatuor partium prima et quarta est impar, secunda vero ac tertia par; vnde partes secundam et tertiam nihilo aequari oportet, vt fiat

$$x = \frac{d\,\mathrm{R}\,(1-qq)}{2\,dq} + \lambda\,\mathrm{S}.$$

At vero posito

$$\frac{d\,\mathrm{S}\,(1-qq)}{2\,dq} + \lambda\,\mathrm{R} = 0$$

sponte fit $\mathrm{R} = -\frac{d\,\mathrm{S}\,(1-qq)}{2\lambda\,dq}$, ideoque functio par, vti requiritur; vnde cum sumto elemento dq constante sit

$$d\,\mathrm{R} = -\frac{dd\,\mathrm{S}\,(1-qq)}{2\lambda\,dq} + \frac{q\,d\,\mathrm{S}}{\lambda}, \text{ erit}$$

$$x = -\frac{dd\,\mathrm{S}\,(1-qq)^2}{4\lambda\,dq^2} + \frac{q\,d\,\mathrm{S}\,(1-qq)}{2\lambda\,dq} + \lambda\,\mathrm{S},$$

et

et quia eſt $T = R + S$, erit

$$dT = dR + dS = -\frac{ddS(1-qq)}{2\lambda dq} + \frac{dS(q+\lambda)}{\lambda},$$

quam ob rem habebimus

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{(1-qq)^2}{4\lambda dq^2}\,ddS - \frac{dS(q+\lambda)(1-qq)}{2\lambda dq}\right).$$

Dummodo ergo pro S capiatur functio impar ipſius q, hae formulae ſemper praebebunt traiectoriam reciprocam algebraicam.

§. 36. Hae autem formulae pluribus modis transformari poſſunt, dum ſcilicet loco S aliae functiones impares accipiuntur. Sumatur igitur $S = \frac{cV}{1-qq}$, exiſtente V functione impari, eritque

$$dS = \frac{cdV}{1-qq} + \frac{2cVqdq}{(1-qq)^2} \text{ et}$$

$$ddS = \frac{cddV}{1-qq} + \frac{4cqdqdV}{(1-qq)^2} + \frac{2cVdq^2}{(1-qq)^2} + \frac{8cVqqdq^2}{(1-qq)^3}$$

quibus valoribus ſubſtitutis reperietur

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4\lambda dq^2} - \frac{cqdV}{2\lambda dq} + \frac{cV(2\lambda\lambda-1-qq)}{2\lambda(1-qq)} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^{\lambda}\left(\frac{c(1-qq)}{4\lambda dq^2}ddV - \frac{c(\lambda-q)}{2\lambda dq}dV + \frac{c(qq-2\lambda q+1)}{2\lambda(1-qq)}V\right).$$

§. 37. Operae igitur pretium erit hinc caſum deducere quo $\lambda = 1$, quandoquidem haec ſolutio conuenire debet cum ea, quam ſupra (§. 23.) dedimus. Facto autem $\lambda = 1$ fiet

$$x = -\frac{cddV(1-qq)}{4dq^2} - \frac{cqdV}{2dq} + \frac{cV}{2} \text{ et}$$

$$y = -\left(\frac{1+q}{1-q}\right)\left(\frac{c(1-qq)ddV}{4dq^2} - \frac{c(1-q)dV}{2dq} + \frac{cV(q-1)^2}{2(1-qq)}\right) \text{ ſiue}$$

$$y = -\frac{cddV(1+q)^2}{4dq^2} + \frac{cdV(1+q)}{2dq} - \frac{cV}{2},$$

quam-

quamobrem si sumamus $c = -4$, resultant hae formulae:

$$x = \frac{ddV(1-qq)}{dq^2} + \frac{2q\,dV}{dq} - 2V \text{ et}$$

$$y = \frac{ddV(1+q)^2}{dq^2} - \frac{2dV(1+q)}{dq} + 2V$$

quae cum supra datis perfecte congruunt.

§. 38. Quo has formulas commodiores reddamus, faciamus $c = -4\lambda$, et sumta pro V functione quacunque impari ipsius q, coordinatae traiectoriae ita satis succincte exprimentur:

$$x = \frac{ddV}{dq^2}(1-qq) + \frac{2dV}{dq}.\,q - \frac{2V(2\lambda\lambda-1-qq)}{1-qq} \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left(\frac{ddV}{dq^2}(1-qq) - \frac{2dV}{dq}(\lambda-q) + \frac{2V(qq-2\lambda q+1)}{1-qq}\right).$$

Quin etiam formulis primo inuentis commodius vti licebit, si per -4λ multiplicentur. Ita denotante S functione quacunque impari ipsius q, coordinatae erunt:

$$x = \frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}q(1-qq) - 4\lambda\lambda S \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right).$$

§. 39. Quaecunque igitur functio idonea pro S accipiatur, semper fieri oportet $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$. Quod quomodo eueniat, et quemadmodum littera S penitus e calculo egrediatur, perscrutari operae pretium erit. Differentiemus igitur primo valorem ipsius x, vt obtineamus

$$dx = \frac{d^3S}{dq^2}(1-qq) - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq).$$

Deinde quia y exprimitur producto, cuius prior factor est $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = r^\lambda$, posito scil. $\frac{1+q}{1-q} = r$, erit $d.\,r^\lambda = \lambda r^\lambda.\frac{dr}{r}$. Supra autem vidimus esse $\frac{dr}{r} = \frac{2dq}{1-qq}$, vnde pro hoc factore habebimus

$$d.\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \frac{dq}{1-qq},$$

quo notato nanciscimur

$$dy = 2\lambda\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda \frac{dq}{1-qq}\left(\frac{ddS}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2dS}{dq}(q+\lambda)(1-qq)\right)$$
$$+\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{2ddS}{dq}(3q+\lambda)(1-qq)\right.$$
$$\left. - 2dS(1-2\lambda q-3qq)\right]$$

quae duae partes contractae praebent

$$dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda\left[\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddSq(1-qq)}{dq} - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq)\right]$$

vnde manifesto fit $dy = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda dx$, vti conditio praescripta postulat.

§. 40. Hic igitur casus omni attentione dignus se offert formulae huius differentialis tertii gradus:

$$\frac{d^3S}{dq^2}(1-qq)^2 - \frac{6ddS}{dq}q(1-qq) - 2dS(1+2\lambda\lambda-3qq),$$

quae non solum ipsa per se est integrabilis, quandoquidem eius integrale dat valorem ipsius x, sed etiam per formulam $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda$ multiplicata etiamnunc manet integrabilis, siquidem eius integrale praebet valorem ipsius y; vnde quaestio maximi momenti in analysi nascitur: *Quomodo formulae differentiales cuiuscunque gradus comparatae esse debeant, vt non solum ipsae sint integrabiles, sed etiam quando per quampiam functionem datam multiplicantur*; cuius quidem quaestionis solutio per methodum ante adhibitam est facillima.

§. 41. Vt has formulas exemplo simplicissimo illustremus, sumamus $S = q$ et coordinatae nostrae traiectoriae erunt

$$x = -2(1+2\lambda\lambda)q + 2q^3 \text{ et}$$

$y =$

$$y = -2\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda (q+\lambda)(1-qq),$$

siue per -2 diuidendo erit

$$x = (1+2\lambda\lambda)q - q^3 \text{ et}$$

$$y = \left(\frac{1+q}{1-q}\right)^\lambda (q+\lambda)(1-qq).$$

Facile autem apparet, quaecunque fractio pro exponente λ accipiatur, eliminationem quantitatis q ad aequationem altissimi gradus perducere. Sin autem sumatur $\lambda = 0$, manifesto prodit $x = q - q^3$ et $y = q(1-qq)$, ideoque $y = x$; quae est aequatio pro linea recta; quod autem non solum hoc casu valet, sed etiam formulae generales posito $\lambda = 0$ semper praebent $y = x$. Methodus igitur hoc articulo tradita omnes plane traiectorias algebraicas in se continere est censenda, quatenus scilicet pro λ fractionem quamcunque accipere licet.

Singularis constructio

traiectoriarum reciprocarum, ope rectificationis curuarum.

§. 42. Constituto axe conuersionis A B, circa quem traiectoria conuersa et iuxta directionem axis promota se ipsam vbique sub dato angulo $= 2\alpha$ intersecet, ipsi in puncto quocunque A iungatur recta E F ad angulum E A B $= 2\alpha$ inclinata, in qua capiantur abscissae A P $= x$, quibus respondeant applicatae axi parallelae P M $= y$; ac posito $dy = p\,dx$, vidimus, totum negotium huc redire, vt fiat p functio reciproca abscissae x. Vicissim igitur abscissa x talis esse debet functio ipsius p, vt, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, valor ipsius x euadat sui negatiuus, seu abeat in $-x$; cuiusmodi functiones facile innumeras excogitare licet, qua- Tab. I. Fig. 6.

rum

rum simplicissima est talis: $x = \frac{a(pp-1)}{p}$, quippe quae formula, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, fit $\frac{a(1-pp)}{p} = -x$.

§. 43. Haec autem formula generalior reddi potest introducendo nouam variabilem t, quae sit functio quaecunque impar ipsius x. Tum enim si statuatur $t = \frac{a(pp-1)}{p}$, quoniam, si loco p scribatur $\frac{1}{p}$, quantitas t abit in $-t$, etiam abscissa x abit in $-x$. Quo notato ponamus pro nostro instituto $t = \frac{pp-1}{2p}$, vnde fit $p = t + V(tt+1)$. Quia igitur est $p = \frac{dy}{dx}$, erit $dy = t\,dx + dx\,V(tt+1)$ ideoque $y = \int t\,dx \int dx\,V(tt+1)$. Hic autem euidens est, si denotet $\int t\,dx$ applicatam curuae obthogonalem abscissae x respondentem, tum $\int dx\,V(tt+1)$ exprimere arcum eiusdem curuae.

§. 44. Sit igitur E T C t F talis curua super recta E F per coordinatas orthogonales P T descripta, cuius ergo punctum C immineat initio abscissarum A, atque abscissae A P $= x$ respondeat applicata orthogonalis P T $= \int t\,dx$, eritque arcus C T $= \int dx\,V(tt+1)$; quocirca pro traiectoria hinc construenda tantum capi debet eius applicata obliquangula P M $= y =$ P T + C T, et punctum M erit in traiectoria, si modo t fuerit functio impar ipsius x. Vnde patet, hanc nouam curuam E T C t F non penitus arbitrio nostro relinquere. Quomodo autem ea debeat esse comparata haud difficulter definietur.

§. 45. Quoniam enim t est functio impar ipsius x, euidens est, formulam integralem $\int t\,dx$ fore functionem

parem

parem ipſius x; ita vt in eadem curua abſciſſae negatiuae $AP = -x$ reſpondeat applicata $pt = PT$ pariter in eandem plagam directa. Vnde patet, curuam hanc $ETCtF$ ita comparatam eſſe debere, vt recta AC eius ſit diameter orthogonalis, eiusque portiones CTE et CtF inter ſe ſint perfecte aequales et ſimiles. Quo obſeruato omnes plane curuae huius indolis ad noſtrum inſtitutum erunt accommodatae. Ex qualibet enim huiusmodi curua traiectoria pro quouis interſectionis angulo $= 2\alpha$ facillime conſtrui poterit: dummodo obſeruetur, ſi arcus $C\Gamma$ pro poſitiuo habeatur, ita vt capiatur $PM = PT + CT$, tum arcus ad alteram partem cadentes Ct pro negatiuis eſſe habendos, ita vt ibi applicata traiectoriae pm ſumi debeat $= pt - Ct$. Atque haec eſt conſtructio illa elegantiſſima, quam olim Celeberr. *Ioannes Bernoullius* primus inuenerat.

§. 46. Huius conſtructionis ope etiam eiusmodi traiectoriae deſcribi poſſunt, quae pluribus axibus conuerſionis, atque adeo pro eodem interſectionis angulo ſunt praeditae. Tantum enim opus eſt pro curua ECF eiusmodi figuram accipi, quae plures habeat diametros AC, $A'C'$; ac; etc. ac huiusmodi curua eſt cyclois: eique innumerabiles aliae ſimiles exhiberi poſſunt. Tum enim, ſi modo deſcripto ex tali curua traiectoria conſtruatur, eius non ſolum recta AB, ſed etiam omnes rectae $A'B'$, ab, quarum quidem numerus eſt infinitus, pariter erunt axes conuerſionis. Tab. I. Fig. 7.

De aliis formulis,

ex quibus pariter innumeras traiectorias reciprocas elicere licet.

§. 47. Ex praecedente constructione manifestum est, si curua in subsidium vocata E C F non solum fuerit algebraica, sed etiam rectificationem admittat; tum traiectorias inde descriptas quoque fore algebraicas. At vero formula principalis, vnde has constructiones deduximus, quae erat $x = \frac{a(pp-1)}{p}$ ita tractari potest, vt etiam innumerabiles curuas algebraicas exhibeat.

§. 48. Cum enim etiam talis formula generalior $x = \frac{a(p^{2\lambda}-1)}{p^\lambda}$ pariter praescripta proprietate sit praedita, vt, posito $\frac{1}{p}$ loco p, abscissa x abeat in sui negatiuum, quoniam est

$$y = \int p\,dx = px - \int x\,dp, \text{ erit}$$

$$y = px - a\int\frac{dp(p^{2\lambda}-1)}{p^\lambda} = px - \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda},$$

quae expressio etiam est algebraica, dum ne sit vel $\lambda = 1$ vel $\lambda = -1$, quippe quibus casibus integratio inuolueret logarithmos.

§. 49. Sumto igitur pro λ numero quocunque, exceptis casibus $\lambda = \pm 1$, constructio traiectoriae ita se habebit, vt sumta abscissa $x = ap^\lambda - ap^{-\lambda}$ fiat applicata

$$y = \frac{\lambda}{\lambda+1}ap^{\lambda+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}ap^{1-\lambda}.$$

Neque

Neque vero hinc difficile erit variabilem p eliminare, vt obtineatur aequatio algebraica inter x et y. Posito enim commodi ergo $a = \frac{b}{2}$, vt fiat $p^{2\lambda} = \frac{2xp^{\lambda}}{b} + 1$, inde fit

$$p^{\lambda} = \frac{x \pm \surd(xx + bb)}{b}, \text{ ideoque}$$

$$p = \left(\frac{x \pm \sqrt{xx + bb}}{b}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Vbi, si loco $\frac{1}{\lambda}$ scribatur n et loco p iste valor substituatur, eaedem prodeunt formulae supra (§. 8.) erutae.

§. 50. Non solum autem abscissa x vnicae tali formulae $\frac{a(p^{2\lambda} - 1)}{p^{\lambda}}$ aequalis poni potest, sed etiam pluribus talibus formulis simul sumtis: veluti

$$x = a(p^{\lambda} - p^{-\lambda}) + b(p^{\mu} - p^{-\mu}) + c(p^{\nu} - p^{-\nu}) \text{ etc.}$$

Perspicuum enim est, si in hac expressione loco p scribatur $\frac{1}{p}$, loco x proditurum esse $-x$. Hinc autem colligetur

$$\int x\,dp = \frac{ap^{\lambda+1}}{\lambda+1} - \frac{ap^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \frac{b^{\mu+1}}{\mu+1} - \frac{bp^{1-\mu}}{1-\mu} + \frac{cp^{\nu+1}}{\nu+1} - \frac{cp^{1-\nu}}{1-\nu}.$$

Et cum sit $y = px - \int x\,dp$, erit simili modo vt supra est factum

$$y = \frac{\lambda a}{\lambda+1}p^{\lambda+1} + \frac{\lambda a}{1-\lambda}p^{1-\lambda} + \frac{\mu a}{\mu+1}p^{\mu+1} + \frac{\mu a}{1-\mu}p^{1-\mu} + \frac{\nu c}{\nu+1}p^{\nu+1} + \frac{\nu a}{1-\nu}p^{1-\nu}.$$

Atque has formulas pro lubitu multiplicare licebit, ex iisque quouis casu satis commode traiectoriae describi poterunt, dum pro quouis valore litterae p tributo valores vtriusque coordinatae x et y computari possunt. At vero multo

multo difficilius erit, ipſam litteram p ex calculo elidere, vt pateat, ad quemnam ordinem linearum curua ſit referenda.

§. 51. Quin etiam has formulas adhuc generaliores reddere licet. Si enim litterae i, m, n denotent numeros impares, poni poterit

$$x = a\,(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} + b\,(p^{\mu} - p^{-\mu})^{m} + c\,(p^{\nu} - p^{-\nu})^{n}.$$

Manifeſtum enim eſt, ſingula haec membra, dum loco p ſcribitur $\frac{1}{p}$, in valores negatiuos conuerti, propterea quod exponentes i, m, n ſunt impares. Tum vero quia hic exponentes ſupponuntur numeri integri, ſi ſingula membra euoluantur, integrale formulae $\int x\,dp$ facile exhiberi poterit, id quod pro vnico membro oſtendiſſe ſufficiet. Cum enim ſit

$$(p^{\lambda} - p^{-\lambda})^{i} = p^{i\lambda} - \frac{i}{1} p^{(i-2)\lambda} + \frac{i(i-1)}{1.\,2} p^{(i-4)\lambda} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.\,2.\,3} p^{(i-6)\lambda} \text{ etc.}$$

erit

$$\int x\,dp = \frac{a}{i\lambda+1} p^{i\lambda+1} - \frac{i\,a}{1\,(i-2)\lambda+1} p^{(i-2)\lambda+1} + \frac{i(i-1)\,a}{1.\,2\,(i-4)\lambda+1} p^{(i-4)\lambda+1}.$$

Hincque cum ſit $y = p\,x - \int x\,dp$, deſcriptio curuae in promptu erit, id quod etiam perinde ſe habet, ſi plura huiusmodi membra fuerint accepta.

§. 52. Atque hoc modo fere omnia ſatis ſuccincte ſumus complexi, quae olim circa traiectorias reciprocas fuſius reperiuntur expoſita et inuenta. Methodus autem, qua hic vſus ſum, tam plana et aequabilis videtur, vt maior ſimplicitas deſiderari nequeat. Vbi imprimis notari

tari meretur, quod omnes ſolutiones, quas dedimus, ad omnes plane traiectorias tam rectangulas quam obliquangulas aequo ſucceſſu applicari poſſint. Praeterea vero formulae generales pro curuis algebraicis hic prorſus de nouo adiectae ſunt cenſendae: cum illo quidem tempore, quo hoc argumentum eſt tractatum, nemo de talibus formulis generalibus cogitauerit. Quamobrem neminem poenituiſſe confido, qui hoc argumentum, nunc fere penitus oblitum, denuo perluſtrauerit.

DE MIRIS PROPRIETATIBVS CVRVAE ELASTICAE

ſub aequatione $y = \int \frac{x\,x\,d\,x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ contentae.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Tab II. Fig. 1. Sit E G F lamina elaſtica, quae ope funiculi terminis E et F alligati incuruetur in curuam elaſticam E G F, tum vero, ſi funiculus eo vsque conſtringatur, donec anguli in E et F fiant recti, ea curua elaſtica oritur, quae vocari ſolet rectangula et in aequatione contenta $y = \int \frac{x\,x\,d\,x}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, cuius nonnullas proprietates prorſus ſingulares et admirandas hic ſum commemoraturus.

Fig. 2. §. 2. Sit igitur CAC' talis curua elaſtica, rectae CC', quae funiculum refert, vtrinque normaliter inſiſtens, et euidens eſt rectam AD, ad punctum medium D inter vtrumque terminum C et C' perpendiculariter ductam, fore curuae diametrum, et punctum A eius quaſi verticem referre. Tum vero ſi ex C ad rectam CC' erigatur perpendiculum CB, quod tanquam axem hic ſpectabimus, in eoque capiamus abſciſſam $CP = x$ et vocemus applicatam $PM = y$, poſita altitudine $AD = AB = 1$, erit, vti

vti conſtat, $dy = \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$; vnde ſi arcus curuae C M ponatur $= s$, fiet $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$; atque tam ex natura rei quam ex hac aequatione intelligere licet totam hanc curvam conſtare ex infinitis portionibus C A C', C' A' C'', C'' A'' C''', etc inter ſe ſimilibus et aequalibus ſuper recta C C''' vtrinque in infinitum producta conſtitutus, vnde etiam tota haec curua infinitos habebit diametros A D, A' D', A'' D'', etc. totidemque vertices A, A', A'', A''', etc. tam dextrorſum quam ſiniſtrorſum. Puncta autem C, C', C'', C''', etc, quoniam circa eorum ſingula curva ſimiliter alternatim protenditur, centra vocari poterunt. Quemadmodum autem ſingularum harum portionum altitudines A D, A' D', A'' D'', etc. vnitate deſignamus, ponamus ſemilatitudinem cuiusque portionis C D $=$ A B $= a$; ipſos vero arcus C A $=$ C' A $=$ C' A' $=$ etc. $= c$, et quomodo hae binae quantitates a et c ſe ad vnitatem ſeu altitudinem A D habeant deinceps accuratius inueſtigabimus.

§. 3. His de quantitatibus ad hanc curuam pertinentibus notatis quantitates variabiles P M $= y$ et C M $= s$, ad abſciſſam C P $= x$ referamus, vnde ſtatim patet, tam y quam s fore functiones infinitiformes eiusdem abſciſſae C P $= x$. Cum enim applicata P M vtrinque in infinitum producta curuam ſecet in infinitis punctis M, M', M'', M''', etc. applicata y infinitos recipiet valores, ſcilicet P M, P M', P M'', P M''', P M'''', etc qui ex principali P M $= y$ et quantitate conſtante A B $=$ C D $= a$ erunt P M $= y$;

$$\text{P M}' = 2a - y;\ \text{P M}'' = 4a + y;\ \text{P M}''' = 6a - y;$$

$$\text{P M}'''' = 8a + y;\ \text{P M}''''' = 10a - y;$$

qui

qui omnes valores in his generalibus formis continentur:

$$4ia + y \text{ et } (4i + 2)a - y,$$

vbi littera i omnes numeros integros tam positiuos quam negatiuos denotare potest. Simili modo eidem abscissae $CP = x$ respondebunt infiniti arcus curuae, qui erunt

$$CM = s;\ CAM' = 2c - s;\ CAA'M'' = 4c + s;$$
$$CAA'A''M''' = 6c - s;$$

qui omnes etiam in his geminis formulis continentur:

$$4ic + s,\ (4i + 2)c - s$$

sumendo pro i successiue omnes numeros tam positiuos quam negatiuos.

Tab II. Fig. 3. §. 4. Sufficiet igitur solam huius curuae portionem CMA considerasse, quoniam reliquae omnes ei sunt aequales, pro qua posuimus $CB = AD = 1$, $AB = CD = a$, et arcum $CMA = c$ Tum vero pro puncto indefinito M si vocentur coordinatae $CP = x$, $PM = y$ et arcus $CM = s$ erit

$$dy = \frac{xxdx}{\sqrt{(1 - x^4)}} \text{ et } ds = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}.$$

His positis ad curuam in M ducamus normalem MN basi CD productae occurrentem in N Hinc si ducatur ad basin perpendiculum $MQ = x$, ob $CQ = y$ erit interuallum $QN = \frac{xdx}{dy} = \frac{\sqrt{(1 - x^4)}}{x}$ et ipsa normalis $MN = \frac{xds}{dy} = \frac{1}{x}$, ita vt rectangulum $MQ \cdot MN$ fit $= 1 = AD^2$. Hinc si vocetur angulus $CNM = \phi$, qui metitur amplitudinem arcus CM, erit $\sin.\phi = xx$,

$$\cos.\phi = \sqrt{(1 - x^4)} \text{ et } \tang.\phi = \frac{xx}{\sqrt{(1 - x^4)}}.$$

§. 5.

§. 5. Quaeramus nunc etiam radium osculi curvae in puncto M, qui sit M O, hunc in finem faciamus $\frac{dy}{dx} = p = \frac{xx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, vnde fit $\sqrt{(1 + pp)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, hinc porro fiat $\frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}} = xx = q$, eritque vti constat radius osculi $= \frac{dx}{dq} = \frac{1}{2x}$; sicque erit $MO = \frac{1}{2x}$, ideoque $MO = \frac{1}{2} MN$, ita vt centrum curuaturae cadat in punctum medium normalis M N; ex quo patet radium osculi M O reciproce esse proportionalem interuallo $MQ = x$, quae est proprietas, quam natura elasticae postulat. Cum enim vis laminam in puncto C tendens directionem habeat M N, eius momentum respectu puncti M erit vi multiplicatae per $QM = x$ aequale, cui per naturam elasticitatis radius osculi in M reciproce debet esse proportionalis. Manifestum igitur est radium osculi in ipso puncto C esse infinitum; in altero autem termino $A = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} AD$: sicque in hoc puncto A curuatura erit maxima.

§. 6 Nunc etiam videamus, quomodo ex data abscissa $CP = x$ tam applicata $PM = y$, quam ipse arcus $CM = s$ proxime per series infinitas exprimi queat, id quod duplici modo praestari potest. Prior maxime obvius in eo consistit vt formula $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}} = (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem resoluatur, quae erit:

$$1 + \tfrac{1}{2} x^4 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} x^8 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} x^{12} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{7}{8} x^{16} + \text{etc.}$$

vnde per integrationem colligitur:

$$PM = y = \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{7} x^7 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{11} x^{11} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{15} x^{15} \text{ etc.}$$

tum vero etiam arcus:

$$CM = s = x + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{9} x^9 + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{5}{6} \cdot \tfrac{1}{13} x^{13} + \text{etc.}$$

 Hinc

Hinc igitur patet, ſi abſciſſa x fuerit valde parua, tum fore proxime $y = \frac{1}{3} x^3$ et $s = x$. Verum ſi capiamus $x = 1$, per ſeries ambae quantitates a et c ita exprimentur, vt ſit

$$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

$$c = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

Hae autem ſeries nimis lente conuergunt, quam vt inde valores litterarum a et c ſatis exacte definiri queant.

§. 7. Alter modus non adeo obuius in eo conſiſtit, vt ſtatuatur

$$y = \int \frac{x\,x\,d\,x}{\sqrt{(1 - x^4)}} = u \sqrt{(1 - x^4)},$$

ſumtis igitur differentialibus erit

$$x\,x\,d\,x = d\,u\,(1 - x^4) - 2\,u\,x^3\,d\,x, \text{ ſiue}$$

$$\frac{d\,u}{d\,x}(1 - x^4) - 2\,u\,x^3 - x\,x = 0.$$

Fingatur nunc iſta ſeries:

$$u = \alpha\,x^3 + \beta\,x^7 + \gamma\,x^{11} + \delta\,x^{15} + \varepsilon\,x^{19} + \text{etc.}$$

quandoquidem iam nouimus, ſi x fuerit valde paruum, fieri debere $y = \frac{1}{3} x^3$, ideoque etiam $u = \frac{1}{3} x^3$; deinde ex forma aequationis manifeſtum eſt, in ſerie exponentes ipſius x continuo quaternario creſcere debere. Hac igitur ſerie ſubſtituta fiat ſequens euolutio:

$$\begin{array}{rlllll}
\frac{d\,u}{d\,x} = & 3\,\alpha\,x\,x + 7\,\beta\,x^6 & + 11\,\gamma\,x^{10} & + 15\,\delta\,x^{14} & + 19\,\varepsilon\,x^{18} & + \text{etc.} \\
-\frac{x^4\,d\,u}{d\,x} = & -3\,\alpha\,x^6 & - 7\,\beta\,x^{10} & - 11\,\gamma\,x^{14} & - 15\,\delta\,x^{18} & - \text{etc.} \\
-2\,u\,x^3 = & -2\,\alpha\,x^6 & - 2\,\beta\,x^{10} & - 2\,\gamma\,x^{14} & - 2\,\delta\,x^{18} & - \text{etc.} \\
-x\,x = -x\,x & & & & &
\end{array}$$

Singulis igitur membris ad nihilum redactis fiet

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{1}{3};\ \beta = \tfrac{1.5}{3.7};\ \gamma = \tfrac{1.5.9}{3.7.11};\ \delta = \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15};\ \text{etc.}$$

quamobrem habebimus:

$$y = \left(\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1.5}{3.7}x^7 + \tfrac{1.5.9}{3.7.11}x^{11} + \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15}x^{15} + \text{etc.}\right)\sqrt{(1-x^4)}.$$

§. 8. Simili modo ſi ſtatuamus

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = v\sqrt{(1-x^4)},$$

peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{dv}{dx}(1-x^4) - 2vx^3 - 1 = 0,$$

vbi iam ſtatuamus

$$v = \alpha x + \beta x^5 + \gamma x^9 + \delta x^{13} + \varepsilon x^{17} + \zeta x^{21} + \text{etc.}$$

cuius euolutio ita repraeſentetur:

$$\begin{array}{lcccccc}
\frac{dv}{dx} = & \alpha & +5\beta x^4 & +9\gamma x^8 & +13\delta x^{12} & +17\varepsilon x^{16} & +\text{etc.} \\
-\frac{x^4 dv}{dx} = & & -\alpha & -5\beta & -9\gamma & -13\delta & -\text{etc.} \\
-2vx^3 = & & -2\alpha & -2\beta & -2\gamma & -2\delta & -\text{etc.} \\
-1 = & -1 & & & & &
\end{array}$$

Hinc reperiuntur coefficientes

$$\alpha = 1;\ \beta = \tfrac{3}{5};\ \gamma = \tfrac{3.7}{5.9};\ \delta = \tfrac{3.7.11}{5.9.13};\ \varepsilon = \tfrac{3.7.11.15}{5.9.13.17}\ \text{etc.}$$

vnde colligitur fore

$$s = \left(x + \tfrac{3}{5}x^5 + \tfrac{3.7}{5.9}x^9 + \tfrac{3.7.11}{5.9.13}x^{13} + \text{etc.}\right)\sqrt{(1-x^4)}.$$

His autem ſeriebus plane ad valores litterarum a et c eruendos vti non licet: facto enim $x = 1$ formula $\sqrt{(1-x^4)}$ euaneſcit; tum autem ipſae ſeries in infinitum excreſcunt.

§. 9. Pro litteris autem a et c cognoſcendis alias adhiberi conueniet methodos inde petendas, quod integralia harum formularum: $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, pro eo tantum

tum

tum casu quaeruntur, quo post integrationem fit $x = 1$. Hunc in finem formula $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ ita repraesentetur:

$\frac{(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - xx)}}$ et numerator $(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem convertatur, quae erit

$$1 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}x^8 - \text{etc.}$$

ita vt loco $\frac{1}{\sqrt{(1 - x^4)}}$ scripturi simus hanc seriem:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - xx)}}\left(1 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^6 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}x^8 - \text{etc.}\right)$$

quo facto tam pro y quam pro s sequentes formulae integrandae occurrent:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}},\ \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},\ \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},\ \text{etc.}$$

§. 10. Harum autem formularum integralia hic non in genere requiruntur, sed tantum pro casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Hoc autem casu novimus, si $1 : \pi$ denotet rationem diametri ad peripheriam, esse

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2}, \quad \int \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{\pi}{2},$$

et ita porro, quibus valoribus substitutis primo ex formula

$$y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 - x^4)}} = \int \frac{xx\,dx\,(1 + xx)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

colligimus fore

$$a = \tfrac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1^2}{2^2}\cdot\tfrac{3}{4} + \tfrac{1^2}{2^2}\cdot\tfrac{3^2}{4^2}\cdot\tfrac{5}{6} - \tfrac{1^2}{2^2}\cdot\tfrac{3^2}{4^2}\cdot\tfrac{5^2}{6^2}\cdot\tfrac{7}{8} + \text{etc.}\right)$$

ex altera autem formula $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^4)}}$, colligitur longitudo totius arcus

CA =

$$CA = c = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2} - \text{etc}\right)$$

Verum etiam hae ſeries non ſatis ſunt aptae pro veris valoribus quantitatum a et c cognoſcendis.

§. 11. Supereſt autem adhuc alia methodus eosdem valores per producta ex infinitis factoribus exprimendi, cuius rationem, quamquam a me iam dudum fuſius eſt explicata, hic ſequenti modo ſuccincte exponam. Conſideretur haec formula: $z = x^n \sqrt{(1-x^4)}$ et cum ſit

$$dz = n x^{n-1}\sqrt{(1-x^4)} - \frac{2x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n x^{n-1}\,dx - (n+2)x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

hinc viciſſim integrando erit

$$x^n\sqrt{(1-x^4)} = n\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} - (n+2)\int\frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

quare ſi haec integralia tantum deſiderentur pro caſu $x=1$, fiet

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+2}{n}\int\frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

Simili modo erit

$$\int\frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+6}{n+4}\int\frac{x^{n+7}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \quad \text{et}$$

$$\int\frac{x^{n+7}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+10}{n+8}\int\frac{x^{n+11}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \quad \text{etc.}$$

Quod ſi ergo hoc modo in infinitum aſcendamus, erit

$$\int\frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+2}{n}\cdot\frac{n+6}{n+4}\cdot\frac{n+10}{n+8}\cdot\frac{n+14}{n+12}\cdots\int\frac{x^{n+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

§. 12. Substituamus nunc successiue pro n numeros 1, 2, 3, 4, ac prodibunt sequentes quatuor reductiones ad producta infinita, casu scilicet $x = 1$.

$$\text{I. } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{11}{9} \cdot \frac{15}{13} \cdot \frac{19}{17} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{1+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = c.$$

$$\text{II. } \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{16}{14} \cdot \frac{20}{18} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{2+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{III. } \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{11} \cdot \frac{17}{15} \cdot \frac{21}{19} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{3+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = a.$$

$$\text{IV. } \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{6}{4} \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{22}{20} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \int \frac{x^{4+\infty}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2}.$$

§. 13. Hic iam probe notandum est postremas formulas integrales inter se omnes esse aequales. Cum enim in genere sit

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n+2}{n} \int \frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

sumto $n = \infty$ erit

$$\int \frac{x^{\infty-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{x^{\infty+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}.$$

Quod si ergo harum quatuor formularum quamlibet per aliam diuidamus, postremi factores integrales se mutuo tollunt eritque

$$\frac{\text{I}}{\text{II.}} = \frac{4c}{\pi} = \frac{2.3}{1.4} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{10.11}{9.12} \cdot \frac{14.15}{13.16} \cdot \frac{18.19}{17.20} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\text{I}}{\text{III.}} = \frac{c}{a} = \frac{3.3}{1.5} \cdot \frac{7.7}{5.9} \cdot \frac{11.11}{9.13} \cdot \frac{15.15}{13.17} \cdot \frac{19.19}{17.21} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\text{I}}{\text{IV.}} = 2c = \frac{3.4}{1.6} \cdot \frac{7.8}{5.10} \cdot \frac{11.12}{9.14} \cdot \frac{15.16}{13.18} \cdot \frac{19.20}{17.22} \cdot \text{etc.}$$

II

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{III}} = \frac{\pi}{4a} = \frac{3.4}{2.5} \cdot \frac{7.8}{6.9} \cdot \frac{11.12}{10.13} \cdot \frac{15.15}{14.17} \cdot \frac{19.20}{18.21} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{IV}} = \frac{\pi}{2} = \frac{4.4}{2.6} \cdot \frac{8.8}{6.10} \cdot \frac{12.12}{10.14} \cdot \frac{16.16}{14.18} \cdot \frac{20.20}{18.22} \cdot \text{etc.}$$

$$\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{IV}} = 2a = \frac{4.5}{3.6} \cdot \frac{8.9}{7.10} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \frac{16.17}{15.18} \cdot \frac{20.21}{19.22} \cdot \text{etc.}$$

§. 14. Hae iam expreſſiones multo ſunt aptiores ad veros valores litterarum a et c proxime definiendos. Pro valore autem ipſius c inueniendo formula $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{II}}$ maxime videtur idonea, unde fit

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{1.3}{2.1} \cdot \frac{3.7}{4.5} \cdot \frac{5.11}{6.9} \cdot \frac{7.15}{8.13} \cdot \frac{9.19}{10.17} \text{ etc. ſiue}$$

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{20} \cdot \frac{55}{54} \cdot \frac{105}{104} \cdot \frac{171}{170} \cdot \text{etc.}$$

quae pro faciliori calculo ita poteſt exhiberi:

$$\frac{4c}{\pi} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{20}\right)\left(1 + \frac{1}{54}\right)\left(1 + \frac{1}{104}\right)\left(1 + \frac{1}{170}\right) \text{ etc.}$$

At vero quantitas a commodiſſime definietur ſiue ex hac forma:

$$\frac{\pi}{4a} = \frac{2.3}{1.5} \cdot \frac{4.7}{3.9} \cdot \frac{6.11}{5.13} \cdot \frac{8.15}{7.17} \cdot \frac{10.19}{9.21} \cdot \text{etc. ſiue}$$

$$\frac{\pi}{4a} = \frac{6}{5} \cdot \frac{28}{27} \cdot \frac{66}{65} \cdot \frac{120}{119} \cdot \frac{190}{189} \cdot \text{etc.}$$

quae commodi ergo ita repraeſentetur:

$$\frac{\pi}{4a} = \left(1 + \frac{1}{1.5}\right)\left(1 + \frac{1}{3.9}\right)\left(1 + \frac{1}{5.13}\right)\left(1 + \frac{1}{7.17}\right)\left(1 + \frac{1}{9.21}\right) \text{etc.}$$

vel etiam pari ſucceſſu definietur quantitas a ex formula $\frac{\mathrm{III}}{\mathrm{IV}}$, quae dat

$$2a = \frac{2.5}{3.3} \cdot \frac{4.9}{5.7} \cdot \frac{6.13}{7.11} \cdot \frac{8.17}{9.15} \cdot \frac{10.21}{11.19} \text{ etc. ſiue}$$

$$2a = \frac{10}{9} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{78}{77} \cdot \frac{136}{135} \cdot \frac{210}{209} \cdot \text{etc. ſiue}$$

$$2a = \left(1 + \frac{1}{3.3}\right)\left(1 + \frac{1}{5.7}\right)\left(1 + \frac{1}{7.11}\right)\left(1 + \frac{1}{9.15}\right)\left(1 + \frac{1}{11.19}\right) \text{etc.}$$

Interim tamen ſatis taedioſo calculo opus foret, ſi valores harum litterarum vsque ad partem millioneſimam vnitatis iuftas exquirere vellemus: verum infra, cum proprietates magis abfconditas huius curuae detexerimus, fatis prompte hos valores exhibere licebit.

§. 15. At vero pro eodem fcopo feries pro a et c fupra §. 10. inuentae optimo cum fucceffu vfurpari posfunt, quanquam ipfi termini parum decrefcunt, propterea quod in iftis feriebus figna + et — alternantur. Hinc enim infigne fubfidium nafcitur ad fummas harum ferierum proxime inueniendas. Si enim habeatur huiusmodi feries:

$$A - A' + A'' - A''' + A'''' - A''''' \text{ etc.}$$

cuius termini A, A', A'', A''' continuo fiant minores, tum inde formetur feries differentiarum

$$A - A' = B,\ A' - A'' = B',\ A'' - A''' = B'' \text{ etc.}$$

hincque porro feries differentiarum fecundarum

$$B - B' = C,\ B' - B'' = C',\ B'' - B'' = C'' \text{ etc.}$$

ficque hoc modo continuo differentiae capiantur, tum fumma feriei propofitae femper erit

$$\tfrac{A}{2} + \tfrac{B}{4} + \tfrac{C}{8} + \tfrac{D}{16} + \tfrac{E}{32} + \text{ etc.}$$

§. 16. Quo nunc hanc regulam ad feries §. 10. applicemus, euoluamus in fractionibus decimalibus fingulos terminos qui ibi occurrunt.

$\frac{1}{2} = 0,500000$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} = 0,085450$
$\frac{1^2}{2^2} = 0,250000$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2} = 0,074769$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4} = 0,187500$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9}{10} = 0,067292$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} = 0,140625$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2} = 0,060563$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} = 0,117188$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10}\cdot\frac{11}{12} = 0,055516$
$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} = 0,097657$	$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2} = 0,050890$

$\frac{1^2}{2^2}$.

$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\frac{9^2}{10^2}\cdot\frac{11^2}{12^2}\cdot\frac{13}{14}\;\ldots\ldots = 0,047255$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{13^2}{14^2}\;\ldots\ldots = 0,043880$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{13^2}{14^2}\cdot\frac{15}{16}\;\ldots\ldots = 0,041138$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{15^2}{16^2}\;\ldots\ldots = 0,038567$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{15^2}{16^2}\cdot\frac{17}{18}\;\ldots\ldots = 0,036424$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{17^2}{18^2}\;\ldots\ldots = 0,034400$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{17^2}{18^2}\cdot\frac{19}{20}\;\ldots\ldots = 0,032700$$
$$\frac{1^2}{2^2}\cdot\ldots\ldots\frac{19^2}{20^2}\;\ldots\ldots = 0,031065$$

§. 17. His praeparatis calculum instituamus pro valore litterae c inueniendo, et cum esset

$$\frac{2c}{\pi} = 1 - \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \text{etc.}$$

binis primis terminis ad sinistram translatis erit

$$\frac{2c}{\pi} - \frac{3}{4} = \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\ \text{etc.}$$

Nunc singuli huius seriei termini sibi inuicem subscribantur iisque subiungantur series differentiarum litteris B, C, D etc. insignitarum hoc modo:

A	B	C	D
0, 140625			
0, 097657	0, 042968		
0, 074769	0, 022888	0, 020080	
0, 060563	0, 014206	0, 008652	0, 011398
0, 050890	0, 009673	0. 004533	0, 004149
0, 043880	0, 007010	0, 002663	0, 001870
0, 038567	0, 005313	0, 001697	0, 000966
0, 034400	0, 004167	0, 001146	0, 000551
0, 031065	0, 003335	0, 000832	0, 000314

E	F	G	H
0, 007249	0, 004970	0, 003595	0, 002709
0, 002279	0, 001375	0, 000886	0, 000575
0, 000904	0, 000489	0, 000311	
0, 000415	0, 000178		
0, 000237			

§. 18. Hinc igitur ſumma noſtrae feriei ſequenti modo colligetur:

$\frac{1}{2}A = 0,070312$	$0,084503$
$\frac{1}{4}B = 0,010742$	$\frac{1}{64}F = 0,000078$
$\frac{1}{8}C = 0,002510$	$\frac{1}{128}G = 0,000028$
$\frac{1}{16}D = 0,000712$	$\frac{1}{256}H = 0,000011$
$\frac{1}{32}E = 0,000227$	pro reliquis $0,000007$
$0,084503$	$0,084627$
	adde $\frac{3}{4} = 0,750000$
	erit $\frac{2c}{\pi} = 0,834627$

Hinc ergo erit $c = \pi.\,0,417314 = 1,311031$.

§. 19. Simili modo computabitur interuallum AB $= CD = a$. Erat autem

$$\frac{2a}{\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} + \text{etc.}$$

vbi bini primi termini

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16} = 0,312500$$

dant ad alteram partem translati

$$\frac{2a}{\pi} - 0,312500 = \frac{1^2}{2^2}\;\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5}{6} - \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7}{8} + \text{etc.}$$

vnde calculus ſequenti modo expediatur:

A

A	B	C	D
0, 117188	0, 031738	0, 013580	0, 007198
0, 085450	0, 018158	0, 006382	0, 002867
0, 067292	0, 011776	0, 003515	0, 001371
0, 055516	0, 008261	0, 002144	0, 000741
0, 047255	0, 006117	0, 001403	0, 000413
0, 041138	0, 004714	0, 000990	
0, 036424	0, 003724		
0, 032700			

E	F	G	H
0, 004331	0, 002335	0, 001969	0, 001405
0, 001496	0, 000866	0, 000564	
0, 000630	0, 000302		
0, 000328			

§. 20. Hinc igitur feriei fumma colligitur

$$\tfrac{1}{2}A = 0,058594$$
$$\tfrac{1}{4}B = 0,007934$$
$$\tfrac{1}{8}C = 0,001697$$
$$\tfrac{1}{16}D = 0,000450$$
$$\tfrac{1}{32}E = 0,000135$$
$$\overline{\quad 0,068810 \quad}$$

$$0,068810$$
$$\tfrac{1}{64}F = 0,000044$$
$$\tfrac{1}{128}G = 0,000015$$
$$\tfrac{1}{256}H = 0,000005$$
$$\overline{\quad 0,068874 \quad}$$
$$\text{adde } \tfrac{5}{16} = 0,312500$$
$$\overline{\quad\quad\quad}$$
$$\text{et prodit } \tfrac{2a}{\pi} = 0,381374$$

hinc ergo $a = \pi . 0,190687 = 0,599061$.

§. 20. His valoribus quantitatum a et c proxime veris inuentis, quos autem deinceps adhuc accuratius definire docebo, progredior ad illas proprietates huius curuae magis

magis abſtruſas, quas ſum pollicitus demonſtrandas, quippe quas per ſolitas calculi operationes vix ac ne vix quidem eruere licet, et quae propterea profundioris indaginis merito ſunt cenſendae. Ac primo quidem hic eam inſignem relationem, quae inter ternas principales dimenſiones huius curuae, ſcilicet altitudinem $BC = AD$, et inter latitudinem $AB = CD$ atque ipſam curuae longitudinem AMC intercedit, et quam iam pridem detexi, hic accuratius exponam, et ſequenti Theoremate complectar.

Theorema 1.

§. 21. In curua elaſtica rectangula AMC, cuius vertex eſt A et centrum alternationis C, ternae dimenſiones principales, quae ſunt: 1) altitudo $BC = AD$; 2) latitudo $AB = CD$; ac 3) longitudo arcus AMC, ita a ſe inuicem pendent, vt rectangulum ex latitudine AB in longitudinem arcus AMC aequale ſit areae circuli circa diametrum altitudinis BC deſcripti, ſiue poſitis vt fecimus $BC = AD = 1$, $AB = CD = a$ et arcu $AMC = c$ erit $ac = \frac{\pi}{4}$.

Demonſtratio.

§. 22. Inſignis iſta proprietas deducitur ex formulis quas ſupra per producta in infinitum excurrentia expreſſimus (§. 13.) quarum prima dabat

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2.3}{1.4} \cdot \frac{6.7}{5.8} \cdot \frac{10.11}{9.12} \cdot \frac{14.15}{13.16} \text{ etc}$$ vltima vero

$$2a = \frac{4.5}{3.6} \cdot \frac{8.9}{7.10} \cdot \frac{12.13}{11.14} \cdot \frac{16.17}{15.18} \text{ etc.}$$

Quod ſi iam in priore expreſſione primus factor ſimplex $\frac{2}{1}$ ſeorſim exhibeatur, ex reliquis autem ſequentibus bini inter

inter se combinentur habebitur:

$$\frac{4c}{\pi} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{7.10}{8.9} \cdot \frac{11.14}{12.13} \cdot \frac{15.18}{16.17} \cdot \text{etc.}$$

Quod si ergo haec expressio per alteram multiplicetur, omnes factores praeter primum manifesto se mutuo tollunt, ita vt proditurum sit $\frac{8ac}{\pi} = 2$, vnde fit $ac = \frac{\pi}{4}$, quae est ipsa illa proprietas quam demonstrare oportebat.

§. 23. Etsi haec veritas modo prorsus singulari ex contemplatione infiniti est conclusa: tamen deinceps obseruaui, eandem quoque per operationes calculi magis consuetas elici posse. Quaeramus enim in genere pro quouis curuae puncto indefinito M productum ex applicata $PM = y$ et arcu $CM = s$, sitque hoc productum $P = ys$, erit $dP = y\,ds + s\,dy$, hincque iterum integrando

$$P = \int y\,ds + \int s\,dy,$$

quas ambas formulas seorsim euoluamus. Pro priori initio ostendimus esse

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1.1}{2.7}x^7 + \frac{1.3.1}{2.4.11}x^{11} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.15}x^{15} + \text{etc.}$$

quae series ducta in $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, per singulos terminos ita integretur, vt post integrationem statuatur $x = 1$, quippe in quo versatur casus nostri theorematis.

§. 24 Pro hac autem inuestigatione habebimus

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(1-x^4)} = \frac{1}{2},$$

posito $x = 1$; tum vero in genere vidimus esse (§. 11.)

$$\int \frac{x^{n+3}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{n}{n+2} \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

 vnde

vnde deducimus

$$\int \frac{x^7\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{11}\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^{15}\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{12}{14} \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2}.$$

Hinc igitur pro noſtro caſu, quo $x = 1$, erit

$$\int y\, ds = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

quae ſeries reducitur ad ſequentem formam:

$$\int y\, ds = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.11} + \frac{1}{7.15} + \frac{1}{9.19} + \text{etc.}\right).$$

Eodem modo euoluatur altera formula $\int s\, dy$, et cum per ſeriem priorem eſſet

$$s = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} x^9 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} x^{13} + \text{etc.}$$

at vero $dy = \frac{xx\, dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, ſingulis terminis integrandis ope formularum ante datarum pro caſu $x = 1$ reperietur

$$\int s\, dy = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2},$$

quae ſeries contrahitur in ſequentam formam:

$$\int s\, dy = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{7.13} + \frac{1}{9.17} + \frac{1}{11.21} + \text{etc.}\right.$$

His igitur duabus ſeriebus coniunctis fiet:

$$P = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{5.11} + \frac{1}{7.13} + \text{etc.}\right).$$

§. 25. Quod ſi in hac ſerie bini termini ſe inſequentes in vnum contrahantur, obtinebitur ſequens ſeries:

$$P = ys = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \frac{2}{13.15} + \frac{2}{17.19} + \text{etc.}$$

Quoniam autem porro eſt $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5.7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, $\frac{2}{9.11} = \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, etc. iſta ſeries reſoluitur in hanc formam:

P = 1

$$P = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \text{etc.}$$

quae cum ſit notiſſima ſeries *Leibniziana* cuius ſumma $= \frac{\pi}{4}$, erit $P = ys = \frac{\pi}{4}$, caſu ſcilicet quo $x = 1$. Verum hoc caſu aſſumſi fieri $y = a$ et $s = c$, ſicque etiam hinc apparet eſſe productum $ac = \frac{\pi}{4}$.

Praeparatio
ad ſequentes huius curuae proprietates magis abſtruſas.

§. 26. In diſſertatione, cui titulus: *Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali* $\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{(1 + mzz + nz^4)}}$ *contentarum*, quaeque Parti poſteriori Actorum pro anno 1751 inſerta fuit, oſtendi: ſi $\Pi : z$ denotet valorem huius formulae integralis: $\int \frac{dz\,(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{(1 + mzz + nz^4)}}$, ita ſumtum vt euaneſcat poſito $z = 0$, tum plures huius generis quantitates tranſcendentes modo prorſus ſingulari inter ſe comparari poſſe. Scilicet ſi propoſitae fuerint duae huiusmodi formulae: $\Pi : x$ et $\Pi : y$, atque ex litteris x et y ita determinetur tertia z, vt ſit

$$z = \frac{x\sqrt{(1 + myy + ny^4)}}{1 - nxxyy} + \frac{y\sqrt{(1 + mxx + nx^4)}}{1 - nxxyy},$$

vnde ſit

$$\sqrt{(1 + mzz + nz^4)} = \left(\frac{mxy + \sqrt{(1 + mxx + nx^4)(1 + myy + ny^4)}(1 + nxxyy) + 2nxy(xx + yy)}{(1 - nxxyy)^2}\right),$$

tum ſemper erit

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + \beta xyz,$$

ita vt quantitas tranſcendens $\Pi : z$ ſuperet ſummam datarum $\Pi : x$ et $\Pi : y$ quantitate algebraica βxyz.

§. 27. Euidens iam eſt has formulas generales duplici modo ad inſtitutum noſtrum accommodari poſſe,

 ſcilicet

ſcilicet tam ad arcus huius curuae inter ſe comparandos, quam ad applicatas cuique abſciſſae z reſpondentes. Pro vtroque caſu autem erit $m = 0$ et $n = -1$, tum vero in numeratore pro arcubus ſumi debebit $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, at pro applicatis $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

§. 28. Quod ſi iam littera z denotet abſciſſam quamcunque in axe CB aſſumtam, applicatam ei reſpondentem deſignemus charactere $\Pi : z$, arcum vero reſpondentem hoc charactere $\Theta : z$, eritque ex natura noſtrae elaſticae

$$\Pi : z = \int \frac{z z d z}{\sqrt{(1 - z^4)}} \text{ et } \Theta z = \int \frac{d z}{\sqrt{(1 - z^4)}},$$

quibus characteribus in ſequentibus vtemur. Tum igitur ſumto $z = 0$ erit $\Pi : 0 = 0$ et $\Theta : 0 = 0$. Sumto autem $z = 1$ erit $\Pi : 1 = AB = a$ et $\Theta : 1 = CA = c$. Praeterea vero notari oportet, ſumta abſciſſa z negatiua, tam applicatam quam arcus longitudinem etiam fore negatiuas; ſicque erit $\Pi : (-z) = -\Pi : z$, ſimilique modo $\Theta : (-z) = -\Theta : z$. His igitur praemiſſis duplicem iſtam comparationem in ſequentibus Problematibus ad noſtrum inſtitutum accommodabimus.

Problema I.

Tab II. Fig 4 *Propoſitis in noſtra curua elaſtica binis arcubus* CX *et* CY, *abſcindere arcum* CZ, *qui aequalis ſit ſummae arcuum* CX + CY.

Solutio.

§. 29. Vocentur abſciſſae his arcubus reſpondentes $Cx = x$, $Cy = y$ et $Cz = z$, eruntque applicatae ſtabi-

ſtabilito ſignandi modo $xX = \Pi : x$, $yY = \Pi : y$ et $zZ = \Pi : z$, ipſi vero arcus $CX = \Theta : x$, $CY = \Theta : y$ et $CZ = \Theta : z$, et quoniam requiritur vt ſit $\Theta : z = \Theta : x + \Theta : y$, regula generalis ſupra allata, quoniam hoc caſu littera $\beta = 0$, pro datis litteris x et y ita definire iubet z, vt ſit

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^4)} + y\sqrt{(1-x^4)}}{1+xxyy},$$

tum autem erit

$$\sqrt{(1-z^4)} = \frac{(1-xxyy)\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)} - 2xy(xx+yy)}{(1+xxyy)^2},$$

vnde patet, quomodo ex binis abſciſſis datis $Cx = x$ et $Cy = y$ quaeſitam z conſtrui oporteat, vt arcus CZ aequalis fiat ſummae arcuum $CX + CY$.

§. 30. Quemadmodum hic ex datis abſciſſis x et y determinauimus abſciſſam z, ita viciſſim, ſi dentur abſciſſae x et z, tertia y ex iis ſimili modo determinabitur. Cum enim hic eſſe debeat $\Theta : y = \Theta : z - \Theta : x$, euidens eſt hic y eodem modo per z et $-x$ definiri, quo ante z per $+x$ et $+y$ expreſſimus. Hinc igitur erit

$$y = \frac{z\sqrt{(1-x^4)} - x\sqrt{(1-z^4)}}{1+xxzz} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1-y^4)} = \frac{(1-xxzz)\sqrt{(1-x^4)(1-z^4)} + 2xz(xx+zz)}{(1+xxzz)^2}.$$

Parique modo ex datis y et z abſciſſa x ita determinabitur, vt ſit

$$x = \frac{z\sqrt{(1-y^4)} - y\sqrt{(1-z^4)}}{1+yyzz} \text{ et}$$

$$\sqrt{(1-x^4)} = \frac{(1-yyzz)\sqrt{(1-y^4)(1-z^4)} + 2yz(yy+zz)}{(1+yyzz)^2}.$$

§. 31. Hinc igitur patet ternas quantitates x, y et z ita inter ſe referri, vt quaelibet per binas reliquas ſimili fere modo determinetur; quamobrem iſtam relationem

 nem

nem accuratius euoluamus, quo clarius pateat, quomodo a se inuicem pendeant. Ex primis autem valoribus, sumtis quadratis erit

$$zz = \frac{(xx+yy)(1-xxyy) + 2xy\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)}}{(1+xxyy)^2};$$

ex valore autem formulae $\sqrt{(1-z^4)}$ colligitur:

$$\sqrt{(1-x^4)(1-y^4)} = \frac{(1+xxyy)^2\sqrt{(1-z^4)} + 2xy(xx+yy)}{1-xxyy},$$

qui valor si ibi substituatur, orietur haec aequatio:

$$zz(1-xxyy) = xx + yy + 2xy\sqrt{(1-z^4)}.$$

Similique modo ex binis reliquis determinationibus fiet

$$yy(1-xxzz) = zz + xx - 2xz\sqrt{(1-y^4)} \text{ et}$$
$$xx(1-yyzz) = yy + zz - 2yz\sqrt{(1-x^4)}.$$

§. 32. Quod si has aequationes ab omni irrationalitate liberemus, ex singulis eadem resultabit aequatio rationalis, quae erit

$$\left\{\begin{array}{l} +x^4 - 2xxyy + 2x^4yyzz + x^4y^4z^4 \\ +y^4 - 2xxzz + 2xxy^4zz \\ +z^4 - 2yyzz + 2xxyyz^4 \end{array}\right\} = 0,$$

quaeque etiam ita exhiberi potest:

$$0 = \left\{\begin{array}{l} x^4 + y^4 + z^4 - 2xxyy - 2xxzz - 2yyzz \\ \quad + 2xxyyzz(xx+yy+zz) + x^4y^4z^4 \end{array}\right\},$$

vbi iam manifesto ternae litterae x, y et z aequaliter ingrediuntur; quoniam enim hic litterarum x, y, z tantum quadrata insunt, perinde est siue eae negatiue capiantur, siue positiuae.

§. 33. Quoties ergo ternae abſciſſae $C x = x$, $C y = y$ et $C z = z$, eam inter ſe tenent rationem, quam aſſignauimus, tum arcus C Z ſemper aequabitur ſummae binorum reliquorum C X et C Y. Cum igitur hinc ſit $CZ - CY = CX$, erit arcus $YZ = CX$, vnde ſi puncta Y et Z pro lubitu accipiantur, a puncto C ſemper arcus C X abſcindi poterit, qui arcui Y Z erit aequalis. Ac viciſſim propoſito arcu C X, a puncto quouis dato Y abſcindi poterit arcus Y Z, illi arcui C X aequalis. Sin autem terminus Z vt datus ſpectetur, ab eo retro abſcindi poterit arcus Z Y ipſi C X aequalis, quae cum ſint ſatis obuia, ſuperfluum foret pro iis peculiaria problemata conſtituere.

Theorema II.

§. 34. Si ternae abſciſſae $C x = x$, $C y = y$, $C z = z$, ita fuerint aſſumtae, vt arcus C Z aequetur ſummae C X et C Y, tum ternae applicatae $x X = \Pi : x$, $y Y = \Pi : y$, $z Z = \Pi : z$ ita inter ſe erunt relatae, vt ſit

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + x y z,$$

ſiue erit

$$z Z = x X + y Y + \frac{C x . C y . C z}{C B^2}.$$

Demonſtratio.

§. 35. Cum relatio inter formulas $\Pi : x$, $\Pi : y$ et $\Pi : z$ eandem relationem inter abſciſſas x, y et z praebeat quam pro formulis: $\Theta : x$, $\Theta : y$ et $\Theta : z$ aſſignauimus, quoniam pro hoc caſu littera β in forma generali adhibita vnitati aequatur, vi relationis generalis erit

$\Pi : z$

$$\Pi : z = \Pi : x + \Pi : y + x y z,$$

vnde, ad homogeneitatem obſeruandam, quia altitudo C B vnitate eſt definita, ſolidum $x y z$ per eius quadratum diuidi oportet, vnde fiet

$$z Z = x X + y Y + \frac{C x . C y . C z}{C B^2}.$$

§. 36. Cum igitur characteres $\Theta : z$ et $\Pi : z$ certas functiones tranſcendentes abſciſſae z denotent, quas conſtat neque per logarithmos neque per arcus circulares exprimi poſſe, quandoquidem per formulas integrales $\int \frac{d z}{\sqrt{(1 - z^4)}}$ et $\int \frac{z z d z}{\sqrt{(1 - z^4)}}$ definiuntur, earum valores ſaltem per ſeries infinitas exhibuiſſe iuuabit: erit autem per modum priorem

$$\Theta : z = z + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{1}{9} z^9 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6} . \tfrac{1}{13} z^{13} + \text{etc.}$$

$$\Pi : z = \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{1}{7} z^7 + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{1}{11} z^{11} + \tfrac{1}{2} . \tfrac{3}{4} . \tfrac{5}{6} . \tfrac{1}{15} z^{15} + \text{etc.}$$

Ex altera autem reſolutione erit ex §. 8.

$$\Theta : z = \left(z + \tfrac{3}{5} z^5 + \tfrac{3.7}{5.9} z^9 + \tfrac{3.7.11}{5.9.13} z^{13} + \text{etc.}\right) \sqrt{(1 - z^4)} \text{ et}$$

$$\Pi : z = \left(\tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1.5}{3.7} z^7 + \tfrac{1.5.9}{3.7.11} z^{11} + \tfrac{1.5.9.13}{3.7.11.15} z^{15} + \text{etc.}\right) \sqrt{(1 - z^4.)}$$

Problema

Elementa principalia noſtrae curuae elaſticae, ſcilicet latitudinem A B $= a$ *et totum arcum* C A $= c$, *reſpectu altitudinis* C B $= 1$, *accuratius determinare quam ſupra fieri licuit*

Solutio

§. 37. Hunc in finem accipiatur punctum Z in ipſo vertice curuae A, vt fiat $z = 1$, eritque

$$\Pi : z = A B = a \text{ et } \Theta : z = C A = c,$$

tum

tum igitur erit $\sqrt{(1 - z^4)} = 0$. Nunc quaerantur bini arcus CX et CY, quorum ſumma ſit aequalis arcui $CA = c$. Poſitis ergo eorum abſciſſis $Cx = x$ et $Cy = y$ ex §. 31. erit

$$1 - xx - yy - xxyy = 0,$$

vnde fit $yy = \frac{1 - xx}{1 + xx}$. Quod ſi igitur y hoc modo per x determinetur, tum erit $\Theta : x + \Theta : y = c$; tum vero ob $\Pi : z = a$ erit $a = \Pi : x + \Pi : y + xy$.

§. 38. Quo nunc ſeries pro $\Theta : x$ et $\Theta : y$, item pro $\Pi : x$ et $\Pi : y$, maxime conuergentes reddantur, abſciſſas x et y proxime inter ſe aequales accipiamus. Si enim vellemus ſtatuere $y = x$, prodiret

$$x = y = \sqrt{(-1 + \sqrt{2})},$$

qui valor irrationalis minime idoneus foret ad noſtras ſeries euoluendas. Hanc ob rem ſumamus $xx = \frac{1}{2}$, erit $yy = \frac{1}{3}$, ideoque $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, vnde per priores ſeries fiet

$$\Theta : x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2.5} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4.9} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\Pi : x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1.3}{2.4.11} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc.}\right)$$

Simili vero modo erunt:

$$\Theta : y = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{1}{2.5} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1.3}{2.4.9} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.13} \cdot \frac{1}{3^6} + \text{etc.}\right)$$

$$\Pi : y = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1.3}{2.4.11} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} \cdot \frac{1}{2^6} + \text{etc.}\right)$$

§. 39. Hae ſeries manifeſto tantopere conuergunt, vt, qui laborem calculi ſuſcipere voluerit, veros litterarum *a* et *c* valores tam exacte definire queat quam lubuerit; valores autem quas ſupra aſſignauimus, iam tam parum a veritate diſcrepant, vt pro noſtro inſtituto abunde ſufficere poſſint; quandoquidem hic de eo tantum agitur, vt valores inuenti calculum ſubducendo comprobari queant, quamobrem ad alias inſignes proprietates huius curuae progrediamur.

Problema III.

Tab. II. Fig. 5. *Propoſito in curua elaſtica arcu quocunque* P Q, *a puncto dato* R *abſcindere arcum* R S, *qui illi arcui* P Q *ſit aequalis.*

Solutio.

§. 40. Quoniam igitur in curua quatuor puncta P, Q, R, S conſideranda veniunt, ſint abſciſſae illis respondentes $Cp = p$, $Cq = q$, $Cr = r$, $Cs = s$, pro quibus ponamus breuitatis gratia formulas irrationales

$\sqrt{(1-p^4)} = P$, $\sqrt{(1-q^4)} = Q$, $\sqrt{(1-r^4)} = R$ et $\sqrt{(1-s^4)} = S$.

His poſitis, quoniam arcus R S aequalis eſſe debet arcui P Q, requiritur vt ſit $CS - CR = CQ - CP$, hoc eſt $\Theta : s - \Theta : r = \Theta : q - \Theta : p$, cui aequationi vt per regulam ſupra datam ſatisfaciamus, quaeramus arcum $\Theta : v$, vt ſit $\Theta : v = \Theta : q - \Theta : p$, et ſecundum praecepta ſuperiora eſſe debet $v = \frac{qP - pQ}{1 + ppqq}$, vnde fit

$$\sqrt{(1 - v^4)} = V = \frac{(1 - ppqq)PQ + 2pq(pp + qq)}{(1 + ppqq)^2}.$$

Hoc iam arcu inuento eſſe debet $\Pi : s = \Pi : r + \Pi : v$; quare per eadem praecepta fiet $s = \frac{rV + vR}{1 + rrvv}$, hincque porro

$$S = \frac{(1 - rrvv)RV - 2rv(rr + vv)}{(1 + rrvv)^2}.$$

Sub-

Subſtituamus nunc in his formulis valores pro v et V inventos; ac primo erit

$$1 + rrvv = \frac{(1+ppqq)^2 + rrppQQ + rrqqPP - 2rrpqPQ}{(1+ppqq)^2},$$

quae aequatio, ſi loco P P et Q Q valores ſubſtituantur, ad hanc reducitur:

$$1 + rrvv = \frac{(1+ppqq)^2 + rr(pp+qq)(1-ppqq) - 2pqrrPQ}{(1+ppqq)^2}.$$

At vero pro numeratore erit

$$rV + vR = \frac{r(1-ppqq)PQ - 2pqr(pp+qq) + (qPR - pQR)(1+ppqq)}{(1+ppqq)^2},$$

conſequenter abſciſſa quaeſita $CS = s$ ita erit expreſſa:

$$s = \frac{r(1-ppqq)PQ + 2pqr(pp+qq) + (qPR - pQR)(1+ppqq)}{(1+ppqq)^2 + rr(pp+qq)(1-ppqq) - 2pqrrPQ}.$$

Quod autem ad valorem litterae S attinet, quia eo in noſtro calculo non indigemus, eius euolutione ſuperſedemus.

§. 41. Hinc igitur videmus, quomodo abſciſſa s per ternas abſciſſas datas p, q et r exprimatur; vbi quidem plurimum abeſt, vt litterae p, q, r in eam aequaliter ingrediantur: cum tamen ex aequatione propoſita

$$\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p$$

intelligatur, iſtas litteras P, Q et R ſimili modo in valorem ipſius s ingredi debere, ſi modo littera p negatiue acciperetur. Neque igitur vllum eſt dubium, quin forma inuenta ita transformari poſſit, vt iſta paritas litterarum p, q et r eluceſcat, id quod tamen neutiquam liquet.

§. 42. Cum autem eſſe debeat

$$\Theta : s = \Theta : r + \Theta : q - \Theta : p,$$

euidens eſt, manente littera p binas reliquas q et r inter ſe commutari poſſe, vnde etiam vera eſſe debet iſta expreſſio:

$$s = \frac{q(1-pprr)PR + 2pqr(pp+rr) + (rPQ - pQR)(1+pprr)}{(1+pprr)^2 + qq(pp+rr)(1-pprr) - 2prqqPR}.$$

Deinde manente r litterae p et q ita permutari poterunt, ſi loco q ſcribatur $-p$ et $-q$ loco p, tum autem erit

$$s = \frac{-p(1-qqrr)QR + 2pqr(qq+rr) + (qPR + rPQ)(1+qqrr)}{(1+qqrr)^2 + pp(qq+rr)(1-qqrr) + 2qrppQR}.$$

Atque hae tres expreſſiones, quantumuis diuerſae videantur, tamen certe eundem valorem exprimunt.

§. 43. Inſignis igitur hic occurrit quaeſtio analytica, quomodo iſtae tres expreſſiones tractari debeant, vt perfecta permutabilitas inter ternas litteras p, q, r perſpiciatur. Facile quidem intelligitur, ſi tres iſtae expreſſiones in ſe inuicem multiplicentur, ita vt productum aequetur cubo s^3, tum tam in numeratore quam in denominatore ternas litteras p, q, r, pari modo eſſe ingreſſuras; verum tale productum nimis foret perplexum, quam vt vllum vſum habere poſſet.

Solutio.

§. 44. Quae hactenus de curua elaſtica rectangula ſunt tradita etiam ad omnes curuas elaſticas in genere accommodari poterunt. Cum enim pro data abſciſſa z ſit applicata $= \int \frac{dz(\alpha + \beta zz)}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}}$ et ipſe arcus $= \int \frac{dz}{\sqrt{1-(\alpha+\beta zz)^2}}$, praecepta generalia ſupra tradita pro comparatione harum quantitatum tranſcendentium ſimili modo applicari poterunt. Interim tamen hic conditio maxime neceſſaria probe be notari debet, qua poſtulatur vt denominator, qui euolutus eſt $\sqrt{(1 - \alpha\alpha - 2\alpha\beta zz - \beta\beta z^4)}$, ad hanc formam: $\sqrt{(1 + mzz + nz^4)}$, reduci queat, quod manifeſto fieri nequit niſi $1 - \alpha\alpha$ fuerit quantitas poſitiua. His igitur caſibus $\alpha\alpha > 1$ omnes comparationes, quas tam inter arcus quam inter applicatas docuimus, ſimili modo ad curvas elaſticas obliquangulas traduci poterunt.

SPECVLATIONES SVPER FORMVLA INTEGRALI $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$.

VBI SIMVL EGREGIAE OBSERVATIONES CIRCA FRACTIONES CONTINVAS OCCVRRVNT.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Incipiamus a casu simplicissimo, quo $n=0$, et quaeramus integrale formulae $\frac{dx}{\sqrt{aa-2bx+cxx}}$, quae posito $x=\frac{b+z}{c}$ transit in hanc: $\frac{dz}{\sqrt{(aacc-bbc+czz)}}$, vbi duo casus distingui conuenit, prout c fuerit vel quantitas positiua vel negatiua. Sit igitur primo $c=+ff$ et formula nostra fiet $\frac{dz}{f\sqrt{(aaff-bb+zz)}}$, cuius integrale est $\frac{1}{f}\,l\frac{z+\sqrt{(aaff-bb+zz)}}{C}$, ideoque erit nostrum integrale

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{cx-b+\sqrt{(aac-2bcx+ccxx)}}{C},$$

quod ergo, ita sumtum vt euanescat posito $x=0$, euadet

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\,l\frac{cx-b+\sqrt{c(aa-2bx+cxx)}}{-b+a\sqrt{c}}.$$

At vero si c fuerit quantitas negatiua, puta $c=-gg$, formula differentialis per z expressa erit $\frac{dz}{g\sqrt{(aagg+bb-zz)}}$ cu-

cuius integrale est $\frac{1}{g}$ A sin. $\frac{z}{\sqrt{(aagg+bb)}}+C$; quare integrale ita sumtum vt euanescat posito $x=0$ fiet

$$=\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{cx-b}{\sqrt{(aagg+bb)}}+\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{b}{\sqrt{(aagg+bb)}}.$$

§. 2. Denotet nunc Π valorem formulae integralis $\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$ ita sumtum vt euanescat posito $x=0$, siue c fuerit quantitas positiua siue negatiua, ac si sit $c=+ff$ erit vti vidimus

$$\Pi=\frac{1}{f}l\frac{ffx-b+f\sqrt{aa-2bx+ffxx}}{af-b};$$

altero vero casu, quo $c=-gg$, erit

$$\Pi=-\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{ggx+b}{\sqrt{(aagg+bb)}}+\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{b}{\sqrt{(aagg+bb)}},$$

siue ambobus arcubus contractis habebimus

$$\Pi=\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{bg\sqrt{(aa-2bx-ggxx)}-abg-ag^3x}{aagg+bb}.$$

Quoniam igitur mox ostendemus integrationem formulae generalis $\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$ semper reduci posse ad casum $n=0$, si modo fuerit n numerus integer positiuus, omnia haec integralia per istum valorem Π exprimi poterunt.

§. 3. Iam post integrationem quantitati variabili x eiusmodi valorem constantem tribuamus, quo formula irrationalis $\sqrt{(aa-2bx+cxx)}$ ad nihilum redigatur, id quod fit si sumatur $x=\frac{b\pm\sqrt{(bb-aac)}}{c}$, ideoque duobus casibus. Ponamus pro vtroque casu functionem Π abire in Δ, ita vt casu $c=ff$ sit

$$\Delta=\frac{1}{f}l\frac{\sqrt{(bb-aaff)}}{af-b}=\frac{1}{f}l\sqrt{\frac{b+af}{b-af}};$$

pro altero autem casu, quo $c=-gg$

$$\Delta=\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{\pm cg\sqrt{(bb+aagg)}}{aagg+bb}=\frac{1}{g}\text{ A sin. }\frac{ag}{\sqrt{(bb+aagg)}}.$$

Hos

Hos autem valores Δ in ſequentibus caſibus, quibus ipſa formula radicalis $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ euaneſcit, potiſſimum ſumus contemplaturi.

§. 4. Nunc ad ſequentem caſum progreſſuri, conſideremus formulam $s = \sqrt{(aa - 2bx + cxx)} - a$, vt ſcilicet euaneſcat facto $x = 0$, et quoniam eſt

$$ds = \frac{-b\,dx + cx\,dx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}}$$

erit viciſſim integrando

$$c\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = b\int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} + s$$

vnde colligimus

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{b}{c}\Pi + \frac{\sqrt{(aa - 2bx + xx)} - a}{c},$$

quare ſi poſt integrationem ſtatuamus $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb - aac)}}{c}$ quippe quibus caſibus fit $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$ et $\Pi = \Delta$. fiet

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{aa - 2bx + cxx}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c}.$$

§. 5. Sumamus porro $s = x\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ fiet $ds = \frac{aa\,dx - 3bx\,dx + 2cxx\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$, vnde viciſſim integrando colligitur

$$2c\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = 3b\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} - aa\int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} + s$$

vnde ſtatim pro caſu $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$ deducimus

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{(3bb - aac)}{2cc}\Delta - \frac{3ab}{2cc}.$$

§. 6. Iam ad altiores poteſtates aſcenſuri ſtatuamus

mus $s = xx\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$, et quia hinc fit

$$ds = \frac{2aaxdx - 5bxxdx + 3cx^3dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}, \text{ erit}$$

$$3c\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = 5b\int\frac{xxdx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$- 2aa\int\frac{xdx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + s,$$

hincque porro pro casu quo post integrationem statuitur $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb - xxc)}}{c}$ habebitur

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{5b^3 - 3aabc}{2c^3}\right)\Delta - \frac{15abb}{6c^3} + \frac{2x^4}{3cc}$$
$$= \left(\frac{5b^3}{2c^3} - \frac{3aab}{2cc}\right)\Delta - \frac{5a^{3}b}{2c^3} + \frac{2x^5}{3cc}.$$

§. 7. Simili modo fit $s = x^3\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$, et quia hinc fit

$$ds = \frac{3aaxxdx - 7bx^3dx + 4c^4dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$

erit vicissim integrando

$$4c\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = 7b\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$- 3aa\int\frac{xxdx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + s;$$

tum igitur pro casu quo fit $\sqrt{(aa - 2bx + cxx)} = 0$, habebimus

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{35b^4}{8c^4} - \frac{15aabb}{4c^3} + \frac{3a^4}{8cc}\right)\Delta - \frac{35ab^3}{8c^4} + \frac{55a^3b}{24c^5}.$$

§. 8. Quo autem ordo in his formulis melius explorari possit, singulas exhibeamus per factores, quemadmodum ordine oriuntur, sine ulla abbreuiatione, atque hoc modo formulae integrales inuentae ita repraesententur:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \Delta$$
$$\int\frac{xdx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c}$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3bb}{1.2cc} - \frac{aa}{1.2c}\right)\Delta - \frac{1.3.ab}{1.2.cc}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3.5b^3}{1.2.3c^3} - \frac{1.3.3aab}{1.2.3cc}\right)\Delta - \frac{1.3.5abb}{1.2.3c^3} + \frac{1.2.2a^3}{1.2.3cc}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{1.3.5.7b^4}{1.2.3.4c^4} - \frac{1.3.5.6aabb}{1.2.3.4c^4} + \frac{1.3.3a^4}{1.2.3.4cc}\right)\Delta$$

$$- \frac{1.3.5.7ab^3}{1.2.3.4c^4} + \frac{1.5.11a^3b}{1.2.3.4c^3}.$$

§. 9. Inſtituamus nunc in genere iſtam euolutionem, ſumendo $s = x^n \sqrt{(aa - 2bx + cxx)}$ et quia hinc fit

$$ds = \frac{naax^{n-1}dx - (2n+1)bx^n dx + (n+1)cx^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$

inde viciſſim integrando colligitur

$$(n+1)c\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = (2n+1)b\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$

$$- naa\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} + x^n\sqrt{(aa-2bx+cxx)}.$$

Quod ſi vero iam ante elicuerimus

$$\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \mathrm{M}\Delta - \mathfrak{M} \text{ et}$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \mathrm{N}\Delta - \mathfrak{N}$$

ita vt hae duae formulae ſint cognitae, ſequens ex iis ita determinabitur, vt ſit

$$\int \frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = \left(\frac{(2n+1)b\mathrm{N}}{(n+1)c} - \frac{naa\mathrm{M}}{(n+1)c}\right)\Delta$$

$$- \frac{(2n+1)b\mathfrak{N}}{(n+1)c} + \frac{naa\mathfrak{M}}{(n+1)c}.$$

Hoc

Hoc igitur modo has integrationes quovsque libuerit continuare licet, dum ex binis quibusque sequens ope huius regulae formatur, ita vt omnia haec integralia vel a logarithmis vel ab arcubus circularibus pendeant, prouti coefficiens c fuerit vel positiuus vel negatiuus. Manifestum autem est istos valores assignari non posse, nisi exponens n fuerit numerus integer positiuus.

§. 10. Ex forma integrali modo inuenta, si post integrationem statuatur $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb-aac)}}{c}$, vnde fit $s=0$, erit

$$naa\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = (2n+1)b\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}}$$
$$-(n+1)c\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}},$$

vnde si breuitatis gratia ponamus

$$\int\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = P, \quad \int\frac{x^n dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = Q,$$
$$\int\frac{x^{n+1}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = R, \quad \int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{(aa-2bx+cxx)}} = S, \text{ etc}$$

hae quantitates P, Q, R, S ita a se inuicem pendent vt sit

$$naaP = (2n+1)bQ - (n+1)cR;$$
$$(n+1)aaQ = (2n+3)bR - (n+2)cS;$$
$$(n+2)aaR = (2n+5)bS - (n+3)cT;$$
$$(n+3)aaS = (2n+7)bT - (n+4)cU;$$
$$(n+4)aaT = (2n+9)bU - (n+5)cW;$$
etc. etc.

Ex his relationibus deducuntur sequentes determinationes:

$$\frac{P}{Q} = \frac{(2n+1)b}{naa} - \frac{(n+1)c}{naa\,Q:R};$$
$$\frac{Q}{R} = \frac{(2n+3)b}{(n+1)aa} - \frac{(n+2)c}{(n+1)aa\,R:S};$$
$$\frac{R}{S} = \frac{(2n+5)b}{(n+2)aa} - \frac{(n+3)c}{(n+2)aa\,S:T};$$
$$\frac{S}{T} = \frac{(2n+7)b}{(n+3)aa} - \frac{(n+4)c}{(n+3)aa\,T:U};$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

hinc igitur patet, singulas has fractiones $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{R}$, $\frac{R}{S}$, etc. per sequentes satis commode determinari.

§. 11. Quod si iam in qualibet harum expressionum valores modo exhibiti successiue substituantur, pro fractione $\frac{P}{Q}$ impetrabimus fractionem continuam in infinitum progredientem, quae erit

$$naa\frac{P}{Q} = (2n+1)b - \cfrac{(n+1)^2 aac}{(2n+3)b - \cfrac{(n+2)^2 aac}{(2n+5)b - \cfrac{(n+3)^2 aac}{(2n+7)b - \cfrac{(n+4)^2 aac}{(2n+9)b - \text{etc.}}}}}$$

sicque peruenimus ad fractionem continuam satis concinnam et ordine perspicuo progredientem, cuius igitur valor semper vel per logarithmos (si fuerit $c > 0$), vel per arcus circulares (si fuerit $c < 0$) exprimi potest.

§. 12. Sumamus nunc $n = 1$ ac fiet

$$P = \int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \Delta \text{ et}$$
$$Q = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}} = \frac{b}{c}\Delta - \frac{a}{c},$$

qui casus nobis suppeditat sequentem fractionem continuam:

aac

$$\frac{aac\Delta}{b\Delta - a} = 3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cfrac{16aac}{9b - \cfrac{25aac}{11b - \text{etc.}}}}}$$

quae ob elegantiam omni attentione digna eſt cenſenda. Hic autem notaſſe iuuabit, ſi c fuerit numerus negatiuus tum omnes numeratores in hac fractione euadere poſitiuos.

§. 12. Fractio autem haec continua capite quaſi trunca videtur; vnde ſi ſuperne ei adiungatur membrum $b - aac$, ea adhuc concinnior eiusque valor ſimplicior reddetur. Si enim iſta fractio breuitatis gratia deſignetur littera S, ita vt ſit $S = \frac{aac\Delta}{b\Delta - a}$, adiecto iſto membro eius valor erit $b - \frac{aac}{S} = \frac{a}{\Delta}$; ſicque habebimus

$$\frac{a}{\Delta} = b - \cfrac{aac}{3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cfrac{16aac}{9b - \cfrac{25aac}{11b - \text{etc.}}}}}}$$

quae expreſſio eo magis eſt memorabilis, quod nulla adhuc via patet, qua talis fractionis continuae valor a priori inueniri poteſt.

§. 13. Euoluamus nunc ſeorſim binos caſus ſupra memoratos, et quos ſollicite a ſe inuicem diſtingui conue-

nit.

nit. Sit igitur primo $c = ff$, atque supra inuenimus fore

$$\Delta = \frac{1}{f}\, l \frac{\surd(-bb - aaff)}{af - b},$$

vbi signum radicale ambigue accipi potest. Ante omnia igitur necesse est, vt sit $bb > aaff$, quia alioquin haec expressio euaderet imaginaria; duo ergo casus se offerunt, prouti b fuerit quantitas siue positiua siue negatiua. Priore casu, quo $b > 0$, atque adeo $b > af$, euidens est signo radicali tribui debere signum $-$, vt fiat

$$\Delta = \frac{1}{f}\, l \frac{\surd(bb - aaff)}{b - af} = \frac{1}{2f}\, l \frac{b + af}{b - af},$$

et iam habebimus istam summationem

$$\cfrac{2af}{l \frac{b+af}{b-af}} = b - \cfrac{aaff}{3b - \cfrac{4aaff}{5b - \cfrac{9aaff}{7b - \cfrac{16aaff}{9b - \text{etc.}}}}}$$

vnde cum sit $\frac{b+af}{b-af} > 1$, patet valorem huius expressionis fore positiuum.

§. 14. Sin autem fuerit b numerus negatiuus, siue si loco b scribatur $-b$, etiamnunc esse debet $b > af$; tum autem erit $\Delta = \frac{1}{2f}\, l \frac{b-af}{b+af}$, qui ergo logarithmus erit negatiuus, siue $\Delta = -\frac{1}{2f}\, l \frac{b+af}{b-af}$, vnde obtinebitur sequens aequatio:

$$\frac{-2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = -b - \cfrac{aaff}{-3b - \cfrac{4aaff}{-5b - \cfrac{9aaff}{-7b - \cfrac{16aaff}{-9b - \text{etc.}}}}}$$

ſiue mutatis ſignis

$$\frac{2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = b + \cfrac{aaff}{-3b + \cfrac{4aaff}{5b + \cfrac{9aaff}{-7b + \cfrac{16aaff}{9b + \text{etc.}}}}}$$

cuius ergo fractionis continuae ſumma aequalis eſt illi, quam in §. praecedente inuenimus. Iſta autem aequalitas harum duarum expreſſionum calculum facienti mox fiet manifeſta.

§. 15. Eodem modo euoluamus caſum quo $c = -gg$, pro quo ſupra inuenimus $\Delta = \frac{1}{g}$ A ſin. $\frac{ag}{\surd(bb+aagg)}$, qui valor per coſinum expreſſus dabit $\Delta = \frac{1}{g}$ A coſ. $\frac{b}{\surd bb+aagg}$, vnde patet, per tangentem iſtum valorem adhuc fore ſimpliciorem: fit ſcilicet $\Delta = \frac{1}{g}$ A tang. $\frac{ag}{b}$, quam ob rem pro hoc caſu prodit iſta ſummatio

$$\frac{ag}{A\,\mathrm{tang.}\,\frac{ag}{b}} = b + \cfrac{aagg}{3b + \cfrac{4aagg}{5b + \cfrac{9aagg}{7b + \cfrac{16aagg}{9b + \text{etc.}}}}}$$

vbi nulla amplius limitatione eſt opus.

De fractionibus continuis a logarithmis pendentibus.

§. 16. Perpendamus nunc etiam aliquos caſus ſpeciales, in vtraque forma contentos, et quoniam iam obſeruauimus, binas formas in §§. 13. et 14. inter ſe congruere, vtamur priori, qua erat

$$\frac{2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = b - \cfrac{aaff}{3b - \cfrac{4aaff}{5b - \cfrac{9aaff}{7b - \text{etc.}}}}$$

ac primo conſideremus caſum, quo $b = af$, quippe quo euadit ſumma fractionis

$$\frac{2af}{l\frac{b+af}{b-af}} = 0 = b - \cfrac{bb}{3b - \cfrac{4bb}{5b - \cfrac{9bb}{7b - \text{etc.}}}}$$

quae

quae per reductionem facile mutatur in hanc:

$$0 = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}}}}$$

§. 17. In ista igitur forma nihilo aequali necesse est vt denominator primae fractionis sit $= 1$ ideoque

$$1 = 3 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \text{etc.}}} \qquad \text{siue } 0 = 2 - \cfrac{4}{5 - \cfrac{9}{7 - \text{etc.}}}$$

Hic igitur ob eandem rationem necesse est vt prior denominator fiat $= 2$, ita vt

$$2 = 5 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}} \qquad \text{siue } 0 = 3 - \cfrac{9}{7 - \cfrac{16}{9 - \text{etc.}}}$$

Hic iterum primus denominator debet esse $= 3$ ideoque

$$3 = 7 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}} \qquad \text{siue } 0 = 4 - \cfrac{16}{9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}}$$

Denuo igitur primus denominator esse debet $= 4$, ita vt $4 = 9 - \cfrac{25}{11 - \text{etc.}}$ atque hoc modo patet, istam relationem eodem ordine in infinitum locum habere, in quo ipso criterium veritatis huius aequationis est situm.

§. 18. Quoniam in hac forma numerus b maior esse debet quam af, statuamus nunc $b = 2af$, et nanciscemur sequentem summationem:

$$\frac{2af}{l3} = 2af - \cfrac{aaff}{6af - \cfrac{4aaff}{10af - \cfrac{9aaff}{14af - \text{etc.}}}}$$

quae reducitur ad hanc formam mere numericam

$$\frac{2}{l3} = 2 - \cfrac{1}{6 - \cfrac{4}{10 - \cfrac{9}{14 - \cfrac{16}{18 - \text{etc.}}}}}$$

§. 19. Simili modo omnes litterae ex calculo expelli possunt, si pro b accipiatur multiplum ipsius af. Sit enim in genere $b = naf$, ac prodit

$$\frac{2af}{l\frac{n+1}{n-1}} = naf - \cfrac{aaff}{3naf - \cfrac{4aaff}{5naf - \cfrac{9aaff}{7naf - \text{etc.}}}}$$

quae fractio reducitur ad formam sequentem:

$$\frac{2}{l\frac{n+1}{n-1}} = n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{4}{5n - \cfrac{9}{7n - \text{etc.}}}}$$

vnde

vnde intelligitur, quemadmodum omnes logarithmos per fractiones continuas exprimi conueniat.

§. 20. Possent hic pro n numeri fracti accipi, tum autem priores termini in singulis membris prodirent fracti, quas quidem per reductionem ad integros reuocare liceret: verum huiusmodi casus facillime ex forma generali deriuari possunt, scribendo statim $b = n$ et $af = m$; tum enim habebimus

$$\frac{2m}{l\frac{n+m}{n-m}} = n - \cfrac{mm}{3n - \cfrac{4mm}{5n - \cfrac{9mm}{7n - \text{etc.}}}}$$

vnde si loco m scribatur $\sqrt{k}$, erit

$$\frac{2\sqrt{k}}{l\frac{n+\sqrt{k}}{n-\sqrt{k}}} = n - \cfrac{k}{3n - \cfrac{4k}{5n - \cfrac{9k}{7n - \text{etc.}}}}$$

§. 21. Hinc igitur omnium numerorum integrorum logarithmos hyperbolicos per fractiones continuas exprimere poterimus. Propositus igitur sit in genere numerus integer i, ac statuatur $\frac{n+m}{n-m} = i$, erit $\frac{n}{m} = \frac{i+1}{i-1}$. Capiatur ergo $n = i + 1$ et $m = i - 1$, atque habebimus

$$\frac{2(i-1)}{li} = i+1-\cfrac{(i-1)^2}{3(i+1)-\cfrac{4(i-1)^2}{5(i+1)-\cfrac{9(i-1)^2}{7(i+1)-\cfrac{16(i-1)^2}{9(i+1)-\text{etc.}}}}}$$

vnde colligimus

$$li = \cfrac{2(i-1)}{i+1-\cfrac{(i-1)^2}{3(i+1)-\cfrac{4(i-1)^2}{5(i+1)-\cfrac{9(i-1)^2}{\text{etc.}}}}}$$

§. 22. Si huiusmodi fractiones desideremus pro logarithmis numerorum fractorum, statuamus $\frac{n+m}{n-m} = \frac{p}{q}$, vnde fit $n = p+q$ et $m = p-q$, quamobrem habebimus

$$l\frac{p}{q} = \cfrac{2(p-q)}{1(p+q)-\cfrac{1(p-q)^2}{3(p+q)-\cfrac{4(p-q)^2}{5(p+q)-\cfrac{9(p-q)^2}{7(p+q)-\text{etc.}}}}}$$

quae forma eo magis est notatu digna, quod satis commode adhiberi potest ad logarithmos proxime inuestigandos. Eo magis autem istae fractiones continuae conuergent, quo minor fuerit fractio $\frac{p-q}{p+q}$.

§. 23. Quo hoc exemplo illustremus, sumamus $p = 2$ et $q = 1$, vnde quidem non adeo vehemens conuergentia est expectanda, eritque

$l2 =$

$$l\,2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15 - \cfrac{9}{21 - \text{etc.}}}}}$$

vnde ſumendo tantum primum membrum $\frac{2}{3}$, in fractione decimali prodit $0,666666$, dum ex tabulis habetur $l\,2 = 0,693147$, vbi error iam ſatis eſt exiguus. Capiamus iam bina membra priora $\cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9}} = \frac{9}{13} = 0,6923$. Sumendo autem tria membra habebimus

$$\cfrac{2}{3 - \cfrac{1}{9 - \cfrac{4}{15}}} = \cfrac{2}{3 - \cfrac{15}{131}} = \frac{262}{378} = 0,693121$$

qui valor a veritate deficit quantitate $0,000026$. Multo promptior autem deprehendetur conuergentia, ſi ſumamus $p = 3$ et $q = 2$, vt habeamus

$$l\,\tfrac{3}{2} = \cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{15 - \cfrac{4}{25 - \cfrac{9}{35 - \text{etc.}}}}}$$

cuius primum membrum dat $\frac{2}{5} = 0,400000$; reuera autem eſt $l\,\frac{3}{2} = 0,405465108$. Sumtis autem duobus membris $\cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{15}}$ colligitur $l\,\frac{3}{2} = 0,40540$, vbi error tantum in

quin-

quintam figuram irrepit. Sumantur tria membra

$$\cfrac{2}{5 - \cfrac{1}{15 - \cfrac{4}{25}}} = \cfrac{2}{5 - \cfrac{25}{371}} = 0,405464$$

vbi error demum in ſeptima figura ſe manifeſtat.

§. 24. Ob hunc inſignem vſum, qui ſe praeter expectationem obtulit, operae pretium erit talem inueſtigationem in genere expedire; atque in hunc finem vtatur formula inter litteras m et n ſupra §. 20. data, vbi fit

$$l\frac{n+m}{n-m} = \cfrac{2m}{n - \cfrac{mm}{3n - \cfrac{4mm}{5n - \cfrac{9mm}{7n - \cfrac{16mm}{9n - \text{etc.}}}}}}$$

vnde ſi capiamus tantum primum membrum, fiet propemodum $l\frac{n+m}{n-m} = \frac{2m}{n}$; ſumtis autem binis prioribus membris $\cfrac{2m}{n - \cfrac{mm}{3n}}$, erit iam propius $l\frac{n+m}{n-m} = \frac{6mn}{3nn-mm}$; ſumtis vero tribus membris erit

$$l\frac{n+m}{n-m} = \cfrac{2m}{n - \cfrac{mm}{3n - \cfrac{4mm}{5n}}} = \frac{30mnn - 8m^3}{15n^3 - 9mmn}.$$

§. 25.

§. 25. Non adeo autem operose est has fractiones vlterius continuare: fractionibus enim iam inuentis praefigamus fractionem $\frac{0}{1}$, vt obtineamus hanc fractionum progressionem :

$$\overset{\text{I}}{\frac{0}{1}},\quad \overset{\text{II}}{\frac{2m}{n}},\quad \overset{\text{III}}{\frac{6mn}{3nn - mm}},\quad \overset{\text{IV}}{\frac{30mnn - 4m^3}{15n^3 - 9mmn}},$$

cuius tam numeratores quam denominatores ex binis praecedentibus, ad similitudinem serierum recurrentium, formari possunt. Tertia scilicet ex prima et secunda formatur ope huius scalae relationis: $3n, -mm$; quarta vero formatur ex binis praecedentibus ope huius scalae relationis $5n, -4mm$. Pro quinta igitur vtendum erit hac scala: $7n, -9mm$, pro sexta hac: $9n, -16mm$, et ita porro. Hoc igitur modo facile reperitur fractio quinta

$$\text{V} = \frac{210mn^3 - 110m^3n}{105n^4 - 90mmnn + 9m^4}$$

simili modo

$$\text{VI} = \frac{1980mn^4 - 1470m^3nn + 128m^5}{945n^5 - 1050mmn^3 + 225m^4n} \text{ etc.}$$

§. 26. Hic autem imprimis notasse iuuabit, has fractiones continuo augeri, et per incrementa continuo minora ad veritatem accedere. Incrementa autem illa egregio ordine procedunt, vti videre hic licet

$$\text{II} - \text{I} = \frac{2m}{n};$$

$$\text{III} - \text{II} = \frac{2m^3}{n(3nn - mm)};$$

$$\text{IV} - \text{III} = \frac{2.4m^5}{(3nn - mm)(15n^3 - 9mmn)};$$

$$\text{V} - \text{IV} = \frac{2.4.9.m^7}{(15n^3 - 9mmn)(105n^4 - 90mmnn + 9m^4)};$$

$$\text{VI} - \text{V} = \frac{2.4.9.16.m^9}{(105n^4 - 90mmnn + 9m^4)(945n^5 - 1050mmn^3 + 225m^4n)}$$

vnde

vnde patet, quo maior fuerit numerus n prae m, eo citius has differentias tam fieri exiguas, vt fine errore negligi queant.

De fractionibus continuis ab arcubus circularibus pendentibus.

§. 27. Ex § 15. arcus circuli cuius tangens est $\frac{ag}{b}$ ita per fractionem exprimetur, vt fit

$$A\,\mathrm{tang.}\,\frac{ag}{b} = \cfrac{ag}{b + \cfrac{aagg}{3b + \cfrac{4aagg}{5b + \cfrac{9aagg}{7b + \mathrm{etc.}}}}}$$

Ponamus nunc ad fimilitudinem fuperiorum formarum $ag = m$ et $b = n$, atque habebimus

$$A\,\mathrm{tang.}\,\frac{m}{n} = \cfrac{m}{n + \cfrac{mm}{3n + \cfrac{4mm}{5n + \cfrac{9mm}{7n + \mathrm{etc.}}}}}$$

quae forma eo citius conuergit, quo maior fuerit numerus n prae m; vnde patet etiam hanc expressionem cum fructu ad calculum accommodari posse.

§. 28. Incipiamus a cafu quo $m = 1$ et $n = 1$, quo fit

A tang.

$$\text{A tang.}\ \frac{m}{n} = \frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \text{etc.}}}}}}$$

quae quidem fractio non adeo conuergit; attamen videamus, quomodo paullatim ad veritatem accedat, quandoquidem nouimus esse $\frac{\pi}{4} = 0,785398163 39$. Ac primum quidem membrum dabit $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1}$, (nimis magnum); duo membra praebent $\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, (nimis paruum); tria membra dant $\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5}}} = \frac{19}{24} = 0,7916$, (nimis magnum). Sumantur quatuor membra, vt fiat

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7}}}} = \frac{40}{51} = 0,7843$$

vbi error demum in tertia figura deprehenditur. Ceterum haec fractio continua similis fere est illi, quam olim Brounckerus in medium protulit, quae ita se habebat:

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}$$

Manifestum autem est nostram fractionem multo magis conuergere; neque minus concinna est censenda.

§. 29. Quo autem fractionem continuam magis conuergentem nanciscamur, statuamus A. tg. $\frac{m}{n} = 30°$, cuius tangens cum sit $\frac{1}{\sqrt{3}}$, ne numerus n fiat irrationalis sumamus $m = \sqrt{3}$ et $n = 3$, hinc igitur fiet

$$\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{9+\cfrac{12}{15+\cfrac{27}{21+\cfrac{48}{27+\text{etc.}}}}}}$$

quae forma reducitur ad sequentem:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{15+\cfrac{9}{7+\cfrac{16}{27+\cfrac{25}{11+\text{etc.}}}}}}}$$

pro qua euoluenda quaeramus primo proxime valorem $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$, qui est 0, 30222998. Nunc vero primum membrum praebet

praebet $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = 0,3333$; duo autem priora praebent

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}} = \frac{3}{10} = 0,3000;$$

tria membra dant

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{15}}} = \frac{49}{162} = 0,30247$$

vbi error quartam demum figuram afficit.

§. 30. Multo promptior autem conuergentia procurari poteſt, dum angulum rectum in duas partes ſecamus, quemadmodum olim oſtendi eſſe A tang. $\frac{1}{2}$ + A tang. $\frac{1}{3}$ = A tang. $1 = \frac{\pi}{4}$. Sic igitur duas fractiones continuas reperiemus, quarum ſumma dabit valorem ipſius $\frac{\pi}{4}$, quae erunt

$$\text{A tang.}\,\tfrac{1}{2} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{4}{10+\cfrac{9}{14+\text{etc.}}}}} \quad \text{et A tang.}\,\tfrac{1}{3} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{9+\cfrac{4}{15+\cfrac{9}{21+\text{etc.}}}}}$$

manifeſtum autem eſt has ambas fractiones, et potiſſimum poſteriorem, vehementer conuergere.

§. 31. Conuertamus vero etiam noſtram fractionem continuam generalem in fractiones communes; ac ex primo membro ſolo reperimus A tang. $\frac{m}{n} = \frac{m}{n}$; ex duobus membris prodit A tang. $\frac{m}{n} = \frac{3mn}{3nn+mm}$; tria membra prae-

 bent

bent A tang. $\frac{m}{n} = \frac{15\,m\,n\,n + 4\,m^3}{15\,n^3 + 9\,m\,m\,n}$. Sumantur quatuor membra, vnde fit A tang. $\frac{m}{n} = \frac{105\,m\,n^3 + 55\,m^3\,n}{105\,n^4 + 90\,m\,m\,n\,n + 9\,m^4}$. Quod ſi nunc his fractionibus praefigatur vt ſupra $\frac{0}{1}$, orietur haec progreſſio:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \\ \frac{0}{1}, & \frac{m}{n}, & \frac{3\,m\,n}{3\,n\,n + m\,m}, & \frac{15\,m\,n\,n + 4\,m^3}{15\,n^3 + 9\,m\,m\,n}, & \frac{105\,m\,n^3 + 55\,m^3\,n}{105\,n^4 + 90\,m\,m\,n\,n + 9\,m^4}, \end{array}$$

cuius ſinguli termini itidem ex praecedentibus binis ſecundum certam legem formari poſſunt, ſcilicet:

pro III ſcala relationis eſt $3\,n, + m\,m$

pro IV ſcala relationis eſt $5\,n, + 4\,m\,m$

pro V ſcala relationis eſt $7\,n, + 9\,m\,m$

etc. etc.

DEMON-

DEMONSTRATIO NONNVLLORVM THEOREMATVM EX DOCTRINA SPHAERICA.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Circulorum in ſuperficie Sphaerae deſcriptorum indolem qui examinauerit, facile perſpiciet eos plurimis gaudere proprietatibus, qui certam quandam habent analogiam cum proprietatibus circulorum in plano deſcriptorum. Quum igitur inuentum ſit binos circulos in plano deſcriptos et ad angulos rectos ſe interſecantes, eam habere proprietatem, vt ſi a verticibus diametri vnius horum circulorum per bina centra tranſeuntis, ducantur ad quodcunque punctum alterius circuli, lineae rectae, iſtae rectae datam ſemper inter ſe teneant rationem; ſic quoque demonſtrari poteſt de binis circulis in ſuperficie Sphaerae ſe ad angulos rectos interſecantibus, quod ſi a verticibus diametri vnius horum circulorum per binos Polos circulorum tranſeuntis, ducantur ad quodcunque punctum alterius circuli arcus circulorum maximorum, tum ſemper fore ſinus ex dimidiis his arcubus in data ratione. Prius quam autem huius proprietatis demonſtrationem heic proponamus, primum iſtam proprietatem circulorum in plano deſcriptorum facili demonſtratione confirmare placebit.

Tab III. Fig. 1.

§. 2. Sint igitur bini circuli A G B; D G F ſe ad angulos rectos in G interſecantes, ita vt, ductis ad centra circulorum C et E lineis rectis G C, G E, ſit C G E angulus rectus, tumque a verticibus A, B diametri A C B per centrum E alterius circuli tranſeuntis, ducantur ad punctum quoduis iſtius circuli lineae rectae A H, B H, erunt hae rectae inter ſe in data ratione, vti A G ad B G. Nam ob angulum $AGB = 90° = CGE$, ablato communi angulo C G B, erit $AGC = BGE$; at $AGC = CAG$, ob $AC = CG$, hinc $BGE = EAG$; et ob ang. G E B vtroque triangulo G E B, A G E communem, $\triangle GBE \sim AGE$, hinc $AE : GE = GE : BE$, per Theor. IV. Lib. VI. Euclid. Vnde ducta linea H E ob $HE = GE$, erit quoque $AE : HE = HE : BE$, ideoque $\triangle HBE \sim HAE$, per Theor. VII. Lib. VI. Euclid, ſeu angulus $BHE = BAH$ et $AHE = HBE$, quamobrem fiet $AH : BH = AE : BE = AG : BG$.

§. 3. Pro demonſtranda autem iſta proprietate circulorum in ſuperficie Sphaerae ſe ad angulos rectos interſecantium, neceſſum eſt, vt Lemmatis inſtar ſequens praemittamus.

Theorema.

Tab III. Fig. 2.

Si circulum quempiam A E B in ſuperficie Sphaerae deſcriptum tangat arcus circuli maximi F E in puncto E, tum-

tumque ducatur arcus circuli maximi F A B, qui iſtum circulum minorem in punctis A, B interſecet, et iungatur punctum E cum punctis A, B arcubus circulorum maximorum A E, B E: erit $\sin. FA : \sin. FB = \sin. \tfrac{1}{2} AE^2 : \sin. \tfrac{1}{2} BE^2$.

Demonſtratio.

Sit C Polus circuli iſtius A E B, tumque ex punctis, A, E et B ad hunc Polum ducti concipiantur arcus circulorum maximorum A C, E C, B C. Quum igitur ſit in triangulo F E B

$$\sin. FB : \sin. FE = \sin. FEB : \sin. FBE$$

et in triangulo F A E

$$\sin. FE : \sin. FA = \sin. FAE : \sin. FEA$$

erit componendo rationes

$$\sin. FB : \sin. FA = \sin. FEB : \sin. FAE : \sin. FBE : \sin. FEA,$$

atqui eſt in triangulo A E B,

$$\sin. EAB : \sin. ABE = \sin. EB : \sin. EA,$$

proinde

$$\sin. FB : \sin. FA = \sin. EB. \sin. FEB : \sin. EA. \sin. FBE.$$

Praeterea vero liquet eſſe $\sin. FEB = \cos. CEB$, ob ang. $FEC = 90^\circ$; at per eandem rationem, $\sin. FEA = \cos. AEC$, hinc colligitur

$$\sin. FEB = \cos. CEB = \text{tang.} \tfrac{1}{2} EB. \cot. BC \quad \text{et}$$

$$\sin. FEA = \cos. AEC = \text{tang.} \tfrac{1}{2} EA. \cot. BC;$$

quamobrem denique fiet

$$\sin. FB : \sin. FA = \sin. EB \,\text{tang.} \tfrac{1}{2} EB : \sin. EA \,\text{tang.} \tfrac{1}{2} EA$$
$$= \sin. \tfrac{1}{2} EB^2 : \sin. \tfrac{1}{2} EA^2.$$

§. 4.

§. 4. Hoc Theoremate iam demonstrato nunc progredimur ad Theorema nostrum principale primum, quod ita enunciatur.

Theorema 1.

Si bini circuli B G D, C G A in superficie Sphaerae descripti se intersecent ad angulum rectum, et ex punctis A, B, vbi circulus maximus per polos E, F circulorum propositorum transiens secat circulum B G A, ducantur ad punctum quoduis H alterius circuli C G D, arcus circulorum maximorum B H, A H, erit sin. ½ A H : sin. ½ B H in constanti ratione.

Demonstratio.

Pro hac propositione demonstranda, ratiocinio primum vtamur Analytico, quem in finem arcus A H, B H, G F, G E, A F, B F, E F respectiue indigetentur litteris x, y, a, b, c, e, d, angulus autem H F A littera Φ, tumque fiet:

$$\text{cos}.\, x = \text{cos}.\, a \,\text{cos}.\, c + \text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, c \,\text{cos}.\, \Phi \quad \text{et}$$

$$\text{cos}.\, y = \text{cos}.\, a \,\text{cos}.\, e + \text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, e \,\text{cos}.\, \Phi\,,$$

quum itaque sit cos. $a = \frac{\text{cos}.\, d}{\text{cos}.\, b}$, si pro cos. a hic valor introducatur, prodibit

$$\text{cos}.\, x = \frac{\text{cos}.\, d \,\text{cos}.\, c}{\text{cos}.\, b} + \text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, c \,\text{cos}.\, \Phi \quad \text{et}$$

$$\text{cos}.\, y = \frac{\text{cos}.\, d \,\text{cos}.\, e}{\text{cos}.\, b} + \text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, c \,\text{cos}.\, \Phi, \quad \text{tumque}$$

$$\text{sin}.\, \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{1 - \text{cos}.\, x}{2} = \frac{\text{cos}.\, b - \text{cos}.\, d \,\text{cos}.\, c}{2 \,\text{cos}.\, b} - \tfrac{1}{2} \,\text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, c \,\text{cos}.\, \varphi,$$

$$\text{sin}.\, \tfrac{1}{2} y^2 = \frac{1 - \text{cos}.\, y}{2} = \frac{\text{cos}.\, b - \text{cos}.\, d \,\text{cos}.\, e}{2 \,\text{cos}.\, b} - \tfrac{1}{2} \,\text{sin}.\, a \,\text{sin}.\, e \,\text{cos}.\, \varphi.$$

Quum

Quum igitur ſit $b = d - c$ et $b = e - d$, fiet:

$$\cos b - \cos d \cos c = \sin d \sin c \text{ et}$$

$$\cos b - \cos e \cos d = \sin d \sin e,$$

hincque colligitur:

$$\sin \tfrac{1}{2} x^2 = \frac{\sin d \sin c}{2 \cos b} - \tfrac{1}{2} \sin a \sin c \cos \Phi$$

$$= \frac{\sin c}{2 \cos b} (\sin d - \sin a \cos b \cos \Phi);$$

$$\sin \tfrac{1}{2} y^2 = \frac{\sin d \sin e}{2 \cos b} - \tfrac{1}{2} \sin a \sin e \cos \Phi$$

$$= \frac{\sin e}{2 \cos b} (\sin d - \sin a \cos b \cos \varphi);$$

vnde denique deducitur:

$$\sin \tfrac{1}{2} x^2 : \sin \tfrac{1}{2} y^2 = \sin c : \sin e.$$

Verum nunc praeſtabit, vt aliam Demonſtrationem magis Geometricam et ex Theoremate praemiſſo deducendam adferamus. Ducatur arcus circuli maximi H I, tangens circulum C G D in puncto H, atque arcus E I a Polo perpendicularis circulo maximo A B, occurrat iſti H I in puncto I, tumque iungantur I A, I F, arcubus circulorum maximorum. Quum igitur ſit angulus E G F rectus, erit per proprietates triangulorum Sphaericorum rectangulorum:

$$\cos EF = \cos EG . \cos FG = \cos EA \cos FH,$$

tum vero eſt,

$$\cos IH = \frac{\cos IF}{\cos FH} = \frac{\cos EF \cos EI}{\cos FH}$$

ob ang. I E H rectum, hinc

$$\cos IH = \cos EA . \cos EI = \cos IA,$$

ideoque arcus $IA = IH = IB$. Si igitur polo I, intervallo arcu circuli maximi I A vel I B deſcribatur circulus per A, B, is quoque per H tranſibit, tumque ob angulum I H F rectum, erit arcus circuli maximi H F, tangens

 iſtius

istius circuli per A, H, B descripti. Hinc per Theorema modo demonstratum omnino colligitur esse:

$$\text{sin.} \tfrac{1}{2} AH^2 : \text{sin.} \tfrac{1}{2} BH^2 = \text{sin.} FA : \text{sin.} FB.$$

§. 5. Per hoc Theorema patet, Problemati, quo quaeritur linea curua in dato quodam plano sita et ita comparata, vt ductis a binis punctis fixis, ad quodlibet eius punctum lineis rectis, hae rectae semper in data sint ratione, omnino per circulum satisfieri; siue ista puncta in eodem isto plano, seu extra id fuerint sita. Caeterum hoc quoque colligi potest ex Theoremate de binis circulis in
Tab. III. eodem plano se ad angulos rectos intersecantibus. Nam
Fig. 1. si intelligamus superficiem Sphaericam describi reuolutione circuli D G F circa axem D E F, facile perspicimus omnia huius superficiei puncta eam habere proprietatem, vt si iungantur cum binis punctis datis A et B, tunc sint istae rectae ab A et B ad quodlibet superficiei punctum ductae, inter se in data ratione. Iam vero si ista Sphaera secta intelligatur per planum quodpiam, omni in casu intersectio huius plani cum Sphaera erit circulus, vnde quemcunque demum situm iste habuerit circulus, semper haec illi competet proprietas, quod ductis a quolibet eius puncto ad A et B lineis rectis, hae rectae datam teneant rationem.

§. 6. Quemadmodum ex praecedentibus intelligi-
Fig. 3. tur, Problemati quo quaeritur in superficie Sphaerica linea curua, ita comparata vt iuncto quouis eius puncto H cum binis punctis fixis A, B arcubus circulorum maximorum A H, B H, sit sin. $\tfrac{1}{2}$ A H : sin. $\tfrac{1}{2}$ B H in data ratione, per circulum satisfieri; ita nondum inde colligi debet huiusmodi curuam

cir-

circularem habere figuram, si Problema ita immutetur, vt iam vel sinus, vel cosinus, vel tangentes integrorum arcuum A H, B H, vel cosinus et tangentes dimidiorum arcuum in data censeantur esse ratione. Pro casu quidem quo cosinuum ex arcubus A H, B H ratio supponitur constans, circulus maximus Sphaerae satisfit; nam si arcus A B ita in M sectus intelligatur, vt sit cos. A M : cos. B M in data ista ratione, tumque per M ductus concipiatur circulus maximus normalis ad A B, quodcunque punctum huius circuli maximi H, hanc habebit proprietatem, vt sit cos. A H: cos. B H in data ratione; est enim: Tab. III. Fig. 4.

$$\text{cos. } AH : \text{cos. } BH = \text{cos. } AM \text{ cos. } MH : \text{cos. } BM \text{ cos. } MH$$
$$= \text{cos. } AM : \text{cos. } BM.$$

At si quaestio sit de linea curua, pro qua ratio sinuum ex arcubus A H, H B esse debeat constans, ea nequaquam erit circulus; nam si arcus A B intelligatur bisectus in C, et iungatur C H, tumque indigitentur arcus A H, B H, A C, C H respectiue per litteras x, y, a, z, et angulus H C B per ϕ, habebimus ex triangulo Sphaerico A C H:

$$\text{cos. } x = \text{cos. } a \text{ cos. } z - \text{sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \Phi$$

et ex triangulo Sphaerico B C H

$$\text{cos. } y = \text{cos. } a \text{ cos. } z + \text{sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \Phi,$$

quae aequationes quoque sic repraesentari possunt:

$$\text{cos. } x = \text{cos. } (a - z) - 2 \text{ sin. } a \text{ sin. } z \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\Phi^2 \text{ et}$$
$$\text{cos. } y = \text{cos. } (a - z) - 2 \text{ sin. } a \text{ sin } z \text{ sin. } \tfrac{1}{2}\Phi^2, \text{ siue}$$
$$\text{cos. } x = \text{cos. } (a - z) \text{ sin } \tfrac{1}{2}\Phi^2 + \text{cos. } (a + z) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$
$$\text{cos. } y = \text{cos. } (a - z) \text{ cos. } \tfrac{1}{2}\Phi^2 + \text{cos. } (a + z) \text{ sin. } \tfrac{1}{2}\phi^2,$$

et ob

$$\text{cos. } x^2 = 1 - \text{sin. } x^2 = 1 - m^2 + m^2 \text{ cos } y^2,$$

pe-posito sin. x : sin. $y = m : 1$, consequemur hanc aequationem :

$$\begin{aligned}&\operatorname{cos.}(a-z)^2 \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\Phi^4 + 2\operatorname{cos.}(a-z)\operatorname{cos}(a+z)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\varphi^2\\ &+ \operatorname{cos.}(a+z)^2 \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\Phi^4 = 1 - m^2 + m^2(\operatorname{cos.}(a-z)^2 \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\Phi^4\\ &+ 2\operatorname{cos.}(a-z)\operatorname{cos.}(a+z)\operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\varphi^2\\ &+ \operatorname{cos.}(a+z)^2 \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2)\end{aligned}$$

quae pro circulo esse nequit, nisi fuerit $m = 1$. Hincque iam perspicitur, si quaestio fuerit de curua, in qua ratio Tangentium ex A H, B H esse debeat constans, illam cum circulo non coincidere.

§. 7. Verum pro casu quo ratio cosinuum ex dimidiis arcubus A H B H supponitur constans, curua satisfaciens iterum euadet circulus, quod calculum ex aequationibus §. praecedentis instituenti facile patebit: est enim

$$1 + \operatorname{cos.} x = 1 + \operatorname{cos.}(a-z) - 2 \operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\Phi^2 \text{ et}$$

$$1 + \operatorname{cos.} y = 1 + \operatorname{cos.}(a-z) - 2 \operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2,$$

ideoque si statuatur $m(1 + \operatorname{cos.} x) = 1 + \operatorname{cos.} y$, haec emerget aequatio:

$$\begin{aligned}&m(1 + \operatorname{cos.}(a-z)) - 2m \operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z \operatorname{cos.}\tfrac{1}{2}\Phi^2\\ &= 1 + \operatorname{cos.}(a-z) - 2 \operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z \operatorname{sin.}\tfrac{1}{2}\Phi^2\end{aligned}$$

vnde prodit

$$\begin{aligned}(m-1)\frac{(1+\operatorname{cos.}(a-z))}{\operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z} &= m(1 + \operatorname{cos.}\Phi) - (1 - \operatorname{cos.}\Phi)\\ &= (m-1) + (m+1)\operatorname{cos.}\Phi \text{ hincque}\end{aligned}$$

$$\frac{1+\operatorname{cos.}(a-z)}{\operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z} = 1 + \frac{m+1}{m-1}\operatorname{cos.}\Phi,$$

vnde denuo prodit:

$$1 + \operatorname{cos.} a \operatorname{cos.} z = \frac{m+1}{m-1}\operatorname{sin.} a \operatorname{sin.} z \operatorname{cos.}\Phi,$$

quae aequatio manifesto est pro circulo. Caeterum si suppoponantur (Fig. 3.) arcus A H, B H producti, vsque dum circulo maximo B E A iterum in A′, B′ occurrant, erit

$$\text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\ AH = \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\ A'H \text{ et fin.}\ \tfrac{1}{2}\ BH = \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\ B'H,$$

quare ob fin. $\frac{1}{2}$ A H et fin. $\frac{1}{2}$ B H in data ratione, ratio quoque cof. $\frac{1}{2}$ A′ H, cof. $\frac{1}{2}$ B′ H erit data. Denique fi ratio tangentium ex dimidiis arcubus A H, B H fuerit data, curua quaefita circulus effe nequit, nam fi ftatuatur tang. $\frac{1}{2}x$: tang. $\frac{1}{2}y$ in data ratione, erit quoque

$$m(1 - \text{cof.}\ x)(1 + \text{cof.}\ y) = (1 - \text{cof.}\ y)(1 + \text{cof.}\ x).$$

Hinc ob

$$1 - \text{cof.}\ x = 1 - \text{cof.}\ (a - z) + 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$
$$1 + \text{cof.}\ y = 1 + \text{cof.}\ (a - z) - 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$
$$1 + \text{cof.}\ x = 1 + \text{cof.}\ (a - z) - 2\ \text{fin}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$
$$1 - \text{cof.}\ y = 1 - \text{cof.}\ (a - z) + 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2;$$

ideoque

$$(1 - \text{cof.}\ x)(1 + \text{cof.}\ y) = \text{fin.}\ (a-z)^2 + 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin}\ z\ \text{cof.}\ \Phi$$
$$+ 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ (a - z) - \text{fin.}\ a^2\ \text{fin.}\ z^2\ \text{fin.}\ \Phi^2;$$
$$(1 + \text{cof.}\ x)(1 - \text{cof.}\ y) = \text{fin.}\ (a - z)^2 - 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ \Phi$$
$$+ 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ (a - z) - \text{fin.}\ a^2\ \text{fin.}\ z^2\ \text{fin.}\ \Phi^2, \text{ ob}$$
$$\text{cof.}\ \Phi = \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2 - \text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi^2 \text{ et}$$
$$\text{fin.}\ \Phi = 2\ \text{fin.}\ \tfrac{1}{2}\Phi\ \text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\Phi,$$

aequatio igitur pro curua erit:

$$m(\text{fin.}\ (a - z)^2 + 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ \Phi + 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ (a - z)$$
$$- \text{fin.}\ a^2\ \text{fin.}\ z^2\ \text{fin.}\ \Phi^2) = \text{fin.}\ (a - z)^2 - 2\ \text{fin}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ \Phi$$
$$+ 2\ \text{fin.}\ a\ \text{fin.}\ z\ \text{cof.}\ (a - z) - \text{fin.}\ a^2\ \text{fin.}\ z^2\ \text{fin.}\ \Phi^2,$$

quae quidem, cafu $m = 1$, exiftente tunc cof. $\Phi = 0$, eft

 pro

pro circulo maximo; reliquis vero casibus ab aequatione pro circulo valde differt.

Theorema 2.

Tab. III. Fig. 5. §. 8. *Circulo in superficie Sphaerae descripto B C A, si inscriptum intelligatur triangulum Sphaericum B C A, eiusque latera A B, B C, A C producantur vsque dum oppositis arcubus circulorum maximorum C F, A D, B E circulum propositum in C, A et B tangentibus occurrant, puncta ista occursus F, D, E super eodem circulo maximo reperientur.*

Demonstratio.

Ducatur arcus circuli maximi A G ea ratione, vt angulus $AGF = BDF$; erit igitur in triangulis BDF, AGF, ob angulum AFG communem et $AGF = BDF$, $\sin. BF : \sin. AF = \sin. BD : \sin. AG$. At per Theorema nostrum praeliminare ob arcum F C tangentem et F A B secantem circulum B C A erit:

$$\sin. FB : \sin. AF = \sin. \tfrac{1}{2} BC^2 : \sin. \tfrac{1}{2} AC^2,$$

similique modo

$$\sin. DB : \sin. DC = \sin. \tfrac{1}{2} AB^2 : \sin. \tfrac{1}{2} AC^2 \text{ et}$$

$$\sin. EC : \sin. EA = \sin. \tfrac{1}{2} BC^2 : \sin. \tfrac{1}{2} AB^2;$$

vnde componendo vltimas has rationes:

$$\sin. DB \sin. EC : \sin. DC \sin. EA = \sin. \tfrac{1}{2} BC^2 : \sin. \tfrac{1}{2} AC^2$$
$$= \sin. FB : \sin. AF = \sin. DB : \sin. AG.$$

Hincque colligitur:

$$\sin. EC : \sin. EA = \sin. CD : \sin. AG,$$

quod fieri nequit nisi arcus circuli maximi D G productus oc-

occurrat arcui A C in E. Nam si D G occurreret ipsi A C in E', ob ang. A G F = B D F, fiet A G D = C D E', hincque

$$\text{sin. } E'A : \text{sin. } E'C = \text{sin. } CD : \text{sin. } AG = \text{sin. } EA : \text{sin. } EC,$$

quod locum habere non potest, nisi puncta E et E' coincidant. Si scilicet arcus E C, E A per α, β indicentur, et arcus E E' per x, esse deberet

$$\text{sin.}(x+\alpha) : \text{sin.}(x+\beta) = \text{sin.}\,\alpha : \text{sin.}\,\beta, \text{ hinc}$$

$$\text{sin.}\,x \cot.\,\alpha + \text{cos.}\,x = \text{sin.}\,x \cot.\,\beta + \text{cos.}\,x \text{ et } \cot.\,\alpha = \cot.\,\beta,$$

quod est absonum. Necessum igitur est vt arcus G D productus transeat per E, ideoque tria ista puncta E, D, F in eodem erunt circulo maximo; simili ratione ac de planis demonstrari potest, quod si circulo in plano descripto inscriptum fuerit triangulum, eiusque latera producantur vsque dum tangentibus circuli oppositis occurrant, tum tria ista puncta contactus sita fore in eadem linea recta. Demonstrationes autem huius Theorematis, quum valde obviae sint, heic adferre, nihil attinet.

SE-

SERIERVM QVARVNDAM SINGVLARIVM SVMMATIO.

Auctore

NICOLAO FUSS.

Si pro ſerie quacunque in genere ſtatuantur

Indices:	0,	1,	2,	3 - - - -	x
Termini:	A,	B,	C,	D - - - -	X
Differ. 1^{ae}.	ΔA,	ΔB,	ΔC,	ΔD etc.	
—— 2^{ae}.	$\Delta^2 A$,	$\Delta^2 B$,	$\Delta^2 C$,	$\Delta^2 D$ etc.	
—— 3^{ae}.	$\Delta^3 A$,	$\Delta^3 B$,	$\Delta^3 C$,	$\Delta^3 D$ etc.	

per ea quae de vſu differentiarum in ſerierum doctrina docent Geometrae, conſtat terminum generalem huius ſeriei ita expreſſum iri:

$$X = A + \Delta A\, x + \Delta^2 A \frac{x(x-1)}{1.2} + \Delta^3 A \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Hinc igitur, primo membro ad ſiniſtram partem translato, per x diuidendo prodit haec ſeries:

$$\frac{X-A}{x} = \Delta A + \Delta^2 A \frac{(x-1)}{2} + \Delta^3 A \frac{(x-1)(x-2)}{2.3} + \text{etc.}$$

quae, ſi ponatur $x = 0$, abit in hanc:

$$\Delta A - \tfrac{1}{2}\Delta^2 A + \tfrac{1}{3}\Delta^3 A - \tfrac{1}{4}\Delta^4 A + \text{etc.}$$

cuius

cuius ergo ſumma exprimitur formula: $\frac{X-A}{x}$, quae quidem, poſito $x=0$, ob $X=A$ fit $\frac{X-A}{x}=\frac{0}{0}$; verum quouis caſu determinato valorem huius fractionis ſiue ſeriei modo traditae ſummam facili negotio definire licebit.

His in genere praenotatis ſequentium duarum ſerierum alias haud facilis indaginis, mihi ab Illuſtri quodam Geometra quondam propoſitarum ſummationem aggredior:

I. $l\,2-\frac{1}{2}l\frac{3}{2^2}+\frac{1}{3}l\frac{4.2^2}{3^3}-\frac{1}{4}l\frac{5.3^6}{2^4.4^4}+\frac{1}{5}l\frac{6.2^5.4^{10}}{3^{10}.5^5}-\text{etc.}$

II. $2\,\text{ſin.}\Phi\,\text{coſ.}\,2\Phi+\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\Phi^2\,\text{ſin.}\,3\Phi-\frac{1}{3}.\,2^3\,\text{ſin.}\Phi^3\,\text{coſ.}\,4\Phi$
$-\frac{1}{4}.\,2^4\,\text{ſin.}\Phi^4\,\text{ſin.}\,5\Phi+\frac{1}{5}.\,2^5\,\text{ſin.}\Phi^5\,\text{coſ.}\,6\Phi+\text{etc.}$

Vtriusque lex progreſſionis ex ſequentibus clarius apparebit.

I. Summatio ſeriei

$$l\,2-\frac{1}{2}l\frac{3}{2^2}+\frac{1}{3}l\frac{4.2^2}{3^3}-\frac{1}{4}l\frac{5.3^6}{2^4.4^4}+\frac{1}{5}l\frac{6.2^5.4^{10}}{3^{10}.5^5}-\text{etc.}$$

Pro ſummanda hac ſerie ponatur terminus generalis $X=l(1+x)$, eritque ſeries fundamentalis

$$l\,1+l\,2+l\,3+l\,4+l\,5+l\,6+\text{etc.}$$

ita vt ſint

Term. ſeriei.	Differentiae. Iae	IIae.	IIIae	IVae.	Vae.	VIae.
$A=l\,1$	$l\frac{2}{1}$	$l\frac{1.3}{2^2}$	$l\frac{2^3.4}{1.3^3}$	$l\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4}$	$l\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5}$	$l\frac{1.3^{15}.5^{15}.7}{2^6.4^{20}.6^6}$
$B=l\,2$	$l\frac{3}{2}$	$l\frac{2.4}{3^2}$	$l\frac{3^3.5}{2.4^3}$	$l\frac{2.4^6.6}{3^4.5^4}$	$l\frac{3^5.5^{10}.7}{2.4^{10}.6^5}$	
$C=l\,3$	$l\frac{4}{3}$	$l\frac{3.5}{4^2}$	$l\frac{4^3.6}{3.5^3}$	$l\frac{3.5^6.7}{4^4.6^4}$		
$D=l\,4$	$l\frac{5}{4}$	$l\frac{4.6}{5^2}$	$l\frac{5^3.7}{4.6^3}$			
$E=l\,5$	$l\frac{6}{5}$	$l\frac{5.7}{6^2}$				
$F=l\,6$	$l\frac{7}{6}$					
$G=l\,7$						

Ex hac tabula excerpamus tantum membra suprema cuiusque columnae, quae ita ordine procedunt:

$A = l\,1$	$\Delta A = l\,\frac{2}{1}$
$\Delta^2 A = l\,\frac{1.3}{2^2}$	$\Delta^3 A = l\,\frac{2^3.4}{1.3^3}$
$\Delta^4 A = l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4}$	$\Delta^5 A = l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5}$
$\Delta^6 A = l\,\frac{1.3^{15}.5^{15}.7}{2^6.4^{20}.6^6}$	$\Delta^7 A = l\,\frac{2^7.4^{35}.6^{21}.8}{1.3^{21}.5^{35}.7^7}$
etc.	etc.

Series igitur hinc formata ita se habebit:

$$l\,2 - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1.3}{2^2} + \tfrac{1}{3}\,l\,\frac{2^3.4}{1.3^3} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4} + \tfrac{1}{5}\,l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5} - \text{etc.}$$

cuius ergo summa est $\frac{X - A}{x} = \frac{l(1+x) - l\,1}{x}$, quae autem formula casu $x = 0$ fit indeterminata; eius igitur differentialia sunt sumenda, quo facto fit $\frac{dX}{dx} = \frac{1}{1+x} = 1$. Sequentem igitur hoc modo nacti sumus summationem maxime memorabilem:

$$l\,2 - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{1.3}{2^2} + \tfrac{1}{3}\,l\,\frac{2^3.4}{1.3^3} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{1.3^6.5}{2^4.4^4} + \tfrac{1}{5}\,l\,\frac{2^5.4^{10}.6}{1.3^{10}.5^5} - \text{etc.} = 1.$$

II. Summatio seriei

$$2\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,2\Phi + \tfrac{1}{2}.\,2^2\,\text{sin.}\,\Phi^2\,\text{sin.}\,3\Phi - \tfrac{1}{3}.\,2^3\,\text{sin.}\,\Phi^3\,\text{cos.}\,4\Phi$$
$$- \tfrac{1}{4}.\,2^4\,\text{sin.}\,\Phi^4\,\text{sin.}\,5\Phi + \tfrac{1}{5}.\,2^5\,\text{sin.}\,\Phi^5\,\text{cos.}\,6\Phi + \text{etc.}$$

Statuatur $X = \text{sin.}\,(1 + 2x)\Phi$, eritque series cuius X est terminus generalis

$$\text{sin.}\,\Phi + \text{sin.}\,3\Phi + \text{sin.}\,5\Phi + \text{sin.}\,7\Phi + \text{etc.}$$

cuius si differentiae membrorum sumantur, eae ob

$$\text{sin.}\,n\Phi - \text{sin.}\,(n-2)\Phi = 2\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,(n-1)\Phi \quad \text{et}$$
$$\text{cos.}\,n\Phi - \text{cos.}\,(n-2)\Phi = -2\,\text{sin}\,\Phi\,\text{sin.}\,(n-1)\Phi$$

sequentibus seriebus exprimentur:

Differ.

Diff. I^{ae}.	$+ 2 \sin.\Phi (\cos. 2\Phi + \cos. 4\Phi + \cos. 6\Phi + \text{etc.})$
— II^{ae}.	$- 2^2 \sin.\Phi^2 (\sin. 3\Phi + \sin. 5\Phi + \sin. 7\Phi + \text{etc.})$
— III^{ae}.	$- 2^3 \sin.\Phi^3 (\cos. 4\Phi + \cos. 6\Phi + \cos. 8\Phi + \text{etc.})$
— IV^{ae}.	$+ 2^4 \sin.\Phi^4 (\sin. 5\Phi + \sin. 7\Phi + \sin. 9\Phi + \text{etc.})$
— V^{ae}.	$+ 2^5 \sin.\Phi^5 (\cos. 6\Phi + \cos. 8\Phi + \cos. 10\Phi + \text{etc.})$
	etc. etc.

ita vt hoc casu habeamus

$$\Delta A = + 2 \sin.\Phi \cos. 2\Phi$$
$$\Delta^2 A = - 2^2 \sin.\Phi^2 \sin. 3\Phi$$
$$\Delta^3 A = - 2^3 \sin.\Phi^3 \cos. 4\Phi$$
$$\Delta^4 A = + 2^4 \sin.\Phi^4 \sin. 5\Phi$$
etc.

vnde patet seriem ex his differentiis formatam eam ipsam esse, cuius summam inuestigare nobis est propositum, scilicet:

$$2 \sin.\phi \cos. 2\phi + \tfrac{1}{2}.\, 2^2 \sin.\phi^2 \sin. 3\phi - \tfrac{1}{3}.\, 2^3 \sin.\phi^3 \cos. 4\phi - \tfrac{1}{4}.\, 2^4 \sin.\phi^4 \sin. 5\phi + \tfrac{1}{5}.\, 2^5 \sin.\phi^5 \cos. 6\phi + \text{etc.}$$

cuius seriei igitur summa hac formula exprimitur:

$$\frac{X - A}{x} = \frac{\sin.(1 + 2x)\Phi - \sin.\Phi}{x},$$

quae quidem, sumto $x = 0$ abit in $\frac{0}{0}$; verum sumtis differentialibus prodit

$$\frac{2\Phi\, dx \cos.(1 + 2x)\Phi}{dx} = 2\phi \cos.\phi,$$

sicque nacti sumus hanc summationem memorabilem:

$$2\phi \cos.\phi = \begin{cases} 2 \sin.\phi \cos. 2\phi + \tfrac{1}{2}.\, 2^2 \sin.\phi^2 \sin. 3\phi \\ - \tfrac{1}{3}.\, 2^3 \sin.\phi^3 \cos 4\phi - \tfrac{1}{4}.\, 2^4 \sin.\phi^4 \sin. 5\phi \\ + \tfrac{1}{5}.\, 2^5 \sin.\phi^5 \cos. 6\phi + \text{etc.} \end{cases}$$

cuius veritas etiam sequentem in modum demonstrari potest.

Demonſtratio huius ſummationis.

Ponatur breuitatis gratia $2\,\text{ſin.}\,\Phi = \alpha$ et diſcerpatur ſeries in has duas partes:

$$2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \begin{cases} \alpha\,\text{coſ.}\,2\Phi - \frac{1}{3}\alpha^3\,\text{coſ.}\,4\Phi + \frac{1}{5}\alpha^5\,\text{coſ.}\,6\Phi - \text{etc.} \\ \frac{1}{2}\alpha^2\,\text{ſin.}\,3\Phi - \frac{1}{4}\alpha^4\,\text{ſin.}\,5\Phi + \frac{1}{6}\alpha^6\,\text{ſin.}\,7\Phi - \text{etc.} \end{cases}$$

et vtriusque ſummam ſeorſim inueſtigemus. Hunc in finem notetur, poſito

$$\text{coſ.}\,\Phi + \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\Phi = p$$
$$\text{coſ.}\,\Phi - \sqrt{-1}.\,\text{ſin.}\,\Phi = q$$

ſinus et coſinus angulorum multiplorum fore

$$\begin{array}{l|l} \text{coſ.}\,\Phi = \frac{p+q}{2} & \text{ſin.}\,\Phi = \frac{p-q}{2\sqrt{-1}} \\ \text{coſ.}\,2\Phi = \frac{p^2+q^2}{2} & \text{ſin.}\,2\Phi = \frac{p^2-q^2}{2\sqrt{-1}} \\ \text{coſ.}\,3\Phi = \frac{p^3+q^3}{2} & \text{ſin.}\,3\Phi = \frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

quibus in noſtra ſerie ſubſtitutis prodit:

$$2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \begin{cases} \alpha\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right) - \frac{1}{3}\alpha^3\left(\frac{p^4+q^4}{2}\right) + \frac{1}{5}\alpha^5\left(\frac{p^6+q^6}{2}\right) - \text{etc.} \\ \frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{p^3-q^3}{2\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{4}\alpha^4\left(\frac{p^5-q^5}{2\sqrt{-1}}\right) + \frac{1}{6}\alpha^6\left(\frac{p^7-q^7}{2\sqrt{-1}}\right) - \text{etc.} \end{cases}$$

Ponatur ſumma ſeriei ſuperioris $= \frac{P}{2}$, inferioris vero $= \frac{Q}{2\sqrt{-1}}$, ita vt habeamus:

$$2\Phi\,\text{coſ.}\,\Phi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{-1}}, \text{ eritque}$$

$$P = \begin{cases} \alpha pp - \frac{1}{3}\alpha^3 p^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 p^6 - \frac{1}{7}\alpha^7 p^8 + \text{etc.} \\ \alpha qq - \frac{1}{3}\alpha^3 q^4 + \frac{1}{5}\alpha^5 q^6 - \frac{1}{7}\alpha^7 q^8 + \text{etc.} \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha^2 p^3 - \frac{1}{4}\alpha^4 p^5 + \frac{1}{6}\alpha^6 p^7 - \frac{1}{8}\alpha^8 p^9 + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2}\alpha^2 q^3 + \frac{1}{4}\alpha^4 q^5 - \frac{1}{6}\alpha^6 q^7 + \frac{1}{8}\alpha^8 q^9 - \text{etc.} \end{cases}$$

Ex

Ex elementis autem constat esse

$$A\ \text{tang.}\ v = v - \tfrac{1}{3} v^3 + \tfrac{1}{5} v^5 - \tfrac{1}{7} v^7 + \tfrac{1}{9} v^9 - \text{etc.}$$

$$\log. (1 + zz) = z^2 - \tfrac{1}{2} z^4 + \tfrac{1}{3} z^6 - \tfrac{1}{4} z^8 + \tfrac{1}{5} z^{10} - \text{etc.}$$

vnde statim manifestum est fore

$$P = p\ A\ \text{tang.}\ \alpha p + q\ A\ \text{tang.}\ \alpha q$$

$$Q = \tfrac{1}{2} p\, l (1 + \alpha\alpha pp) - \tfrac{1}{2} q\, l (1 + \alpha\alpha qq)$$

et nunc demonstrandum est quod sit

$$2 \Phi \cos. \Phi = \tfrac{p}{2} A\ \text{tang.}\ \alpha p + \tfrac{p}{4\sqrt{-1}} l (1 + \alpha\alpha pp)$$
$$+ \tfrac{q}{2} A\ \text{tang}\ \alpha q - \tfrac{q}{4\sqrt{-1}} l (1 + \alpha\alpha qq).$$

Hunc in finem consideremus primo valorem P, et cum posuerimus

$$p = \cos \Phi + \sqrt{-1} \sin. \Phi$$

$$q = \cos. \Phi - \sqrt{-1} \sin. \Phi,$$

his valoribus in coëfficientibus tantum substitutis prodibit:

$$P = \cos. \Phi (A\ \text{tang.}\ \alpha p + A\ \text{tang.}\ \alpha q)$$
$$+ \sin. \Phi \sqrt{-1} (A\ \text{tang.}\ \alpha p - A\ \text{tang.}\ \alpha q.).$$

Est vero

$$A\ \text{tang.}\ \alpha p + A\ \text{tang.}\ \alpha q = A\ \text{tang.}\ \tfrac{\alpha (p + q)}{1 - \alpha\alpha pq}$$

$$A\ \text{tang.}\ \alpha p - A\ \text{tang.}\ \alpha q = A\ \text{tang.}\ \tfrac{\alpha (p - q)}{1 + \alpha\alpha pq},$$

quae expressiones ob

$$p + q = 2 \cos. \Phi \text{ et } p - q = 2 \sqrt{-1} \sin. \Phi$$

in has contrahuntur:

$$A\ \text{tang.}\ \alpha p + A\ \text{tang.}\ \alpha q = A\ \text{tang.}\ \tfrac{2 \alpha \cos. \Phi}{1 - \alpha\alpha}$$

$$A\ \text{tang.}\ \alpha p - A\ \text{tang.}\ \alpha q = A\ \text{tang.}\ \tfrac{2 \alpha \sin. \Phi \sqrt{-1}}{1 + \alpha\alpha},$$

 ita

ita vt nunc sit

$$P = \cos.\,\Phi\, A\, \mathrm{tang.}\, \tfrac{2\alpha \cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} + \sin.\,\Phi \sqrt{-1}\; A\, \mathrm{tang.}\, \tfrac{2\alpha \sin.\Phi \sqrt{-1}}{1+\alpha\alpha}.$$

Hanc autem expressionem sequenti modo ad maiorem concinnitatis gradum euchere licet. Incipiendo a parte posteriore, ob

$$A\ \mathrm{tang.}\, t = \int \tfrac{dt}{1+tt} = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \tfrac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}},$$

sumatur $t = \frac{2\alpha\sqrt{-1}\,\sin.\Phi}{1+\alpha\alpha}$, eritque

$$A\ \mathrm{tang.}\, \tfrac{2\alpha\sqrt{-1}\,\sin.\Phi}{1+\alpha\alpha} = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \tfrac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{1+2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}.$$

Multiplicetur haec fractio $\frac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{1+2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}$ supra et infra per $1+\alpha\alpha-2\alpha\sin.\Phi$, eritque hoc membrum

$$\tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \tfrac{(1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha)^2}{(1+\alpha\alpha)^2-4\alpha\alpha\sin.\Phi^2} = \tfrac{1}{\sqrt{-1}}\, l\, \tfrac{1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha}{\sqrt{1+2\alpha\alpha\cos.2\Phi+\alpha^4}}.$$

At vero ob $2\sin.\Phi = \alpha$ est $1-2\alpha\sin.\Phi+\alpha\alpha = 1$, vnde tota haec pars valoris P reducitur ad

$$-\tfrac{1}{2}\sin.\Phi\, l\,(1+2\alpha\alpha\cos.2\Phi+\alpha^4).$$

Altera pars valoris P, $\cos.\Phi\, A\,\mathrm{tang.}\,\frac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha}$, hoc modo reducitur: Cum sit $\alpha = 2\sin.\Phi$, erit

$$2\alpha\cos.\Phi = 4\sin.\Phi\cos.\Phi = 2\sin.2\Phi \text{ et}$$

$$1-\alpha\alpha = 1-4\sin.\Phi^2 = 2\cos.2\Phi - 1,$$

ideoque

$$A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} = A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{2\sin.2\Phi}{2\cos.2\Phi-1}. \quad \text{At}$$

$$A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{2\sin.2\Phi}{2\cos.2\Phi-1} = A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{\sin.2\Phi}{\cos.2\Phi} + A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{\sin.2\Phi}{2-\cos.2\Phi}$$

ideoque

$$A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{2\alpha\cos.\Phi}{1-\alpha\alpha} = 2\Phi + A\ \mathrm{tang.}\,\tfrac{\sin.2\Phi}{2-\cos.2\Phi},$$

vnde

vnde colligitur:

$$P = 2\Phi \cos.\Phi + \cos.\Phi . A \tang. \frac{\sin. 2\Phi}{2 - \cos. 2\Phi}$$
$$- \tfrac{1}{2} \sin.\Phi\, l(1 + 2\alpha^2 \cos. 2\Phi + \alpha^4).$$

Reducatur nunc vlterius valor Q, ſubſtituendo loco p et q eorum valores, eritque

$$Q = \tfrac{1}{2}\cos.\Phi\, l(1+\alpha\alpha pp) + \tfrac{1}{2}\surd -1 \sin.\Phi\, l(1+\alpha\alpha pp)$$
$$- \tfrac{1}{2}\cos.\Phi\, l(1+\alpha\alpha qq) + \tfrac{1}{2}\surd -1 \sin.\Phi\, l(1+\alpha\alpha qq),$$

ſiue contractis logarithmis

$$Q = \tfrac{1}{2}\cos.\Phi\, l\frac{1+\alpha\alpha pp}{1+\alpha\alpha qq} + \tfrac{1}{2}\surd -1 \sin.\Phi\, l(1+\alpha\alpha pp)(1+\alpha\alpha qq),$$

cuius expreſſionis vtramque partem iterum ſeorſim tractemus.

Quod priorem partem attinet ea ſtatim hoc modo repraeſentari poteſt:

$$\tfrac{1}{2}\cos.\Phi\, l\frac{1+\alpha\alpha \cos. 2\Phi + \alpha\alpha\surd -1 \sin. 2\Phi}{1+\alpha\alpha \cos. 2\Phi - \alpha\alpha\surd -1 \sin. 2\Phi},$$

ſiue etiam hoc modo:

$$\tfrac{1}{2}\cos.\Phi\, l\frac{1+\frac{\alpha\alpha\surd -1 \sin. 2\Phi}{1+\alpha\alpha\cos. 2\Phi}}{1-\frac{\alpha\alpha\surd -1 \sin. 2\Phi}{1+\alpha\alpha\cos. 2\Phi}}.$$

Nouimus autem eſſe

$$l\frac{1+t\surd -1}{1-t\surd -1} = 2\surd -1 \text{ A tang. } t,$$

vnde haec pars hanc induet formam e logarithmica in circularem expreſſionem conuerſam:

$$\surd -1 \cos.\Phi \text{ A tang. } \frac{\alpha\alpha \sin. 2\Phi}{1+\alpha\alpha\cos. 2\Phi},$$

quem porro arcum in hos duos reſoluere licet:

$$\surd -1 \cos.\Phi\left(\text{A tang.} \frac{\sin. 2\Phi}{\cos. 2\Phi} + \text{A tang.} \frac{-\sin. 2\Phi}{\cos. 2\Phi + \alpha\alpha}\right),$$

ſiue

siue

$$\sqrt{-1}\,\text{cos.}\,\Phi\left(2\Phi - A\,\text{tang.}\,\frac{\text{sin.}\,2\,\Phi}{2-\text{cos.}\,2\,\Phi}\right)$$

ob $\alpha\alpha = 4\,\text{sin.}\,\Phi^2 = 2 - 2\,\text{cos.}\,2\Phi$.

Altera pars valoris Q erit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi\, l\,(1 + \alpha\alpha(pp+qq) + \alpha^4 ppqq),$$

quae ergo ob $pp + qq = 2\,\text{cos.}\,2\Phi$ et $pq = 1$, abit in

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{cos.}\,2\,\Phi + \alpha^4).$$

Collectis ergo his membris erit

$$Q = 2\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\,\text{cos.}\,\Phi\,A\,\text{tang.}\,\frac{\text{sin.}\,2\,\Phi}{2-\text{cos.}\,2\,\Phi}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,\text{sin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{cos.}\,2\,\Phi + \alpha^4).$$

Cum igitur esse debeat

$2\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2\sqrt{-1}}$, erit

$$2\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi = \Phi\,\text{cos.}\,\Phi + \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,\Phi\,A\,\text{tang.}\,\frac{\text{sin.}\,2\,\Phi}{2-\text{cos.}\,2\,\Phi}$$
$$+ \Phi\,\text{cos.}\,\Phi - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,\Phi\,A\,\text{tang.}\,\frac{\text{sin.}\,2\,\Phi}{2-\text{cos.}\,2\,\Phi}$$
$$- \tfrac{1}{4}\,\text{sin.}\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{cos.}\,2\,\Phi + \alpha^4)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\,\text{sin.}\,\Phi\, l\,(1 + 2\,\alpha\alpha\,\text{cos.}\,2\,\Phi + \alpha^4).$$

Sicque etiam per hanc Analysin prorsus singularem convincimur, summam seriei:

$$2\,\text{sin.}\,\Phi\,\text{cos.}\,2\Phi + \tfrac{1}{2}.\,2^2\,\text{sin.}\,\Phi^2\,\text{sin.}\,3\Phi - \tfrac{1}{3}.\,2^3\,\text{sin.}\,\Phi^3\,\text{cos.}\,4\,\Phi + \text{etc.}$$

reuera esse $= 2\,\Phi\,\text{cos.}\,\Phi$.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

DE MOTV GLOBI
CIRCA AXEM OBLIQVVM QVEMCVNQVE GYRANTIS ET SVPER PLANO HORIZONTALI INCEDENTIS.

Auctore
L. EVLERO.

Cum in omnibus quae hactenus de motu globorum ſuper planis ſunt tradita alius motus gyratorius non ſit conſideratus, niſi qui fiat circa axem ad motus directionem normalem; quaeſtio ſupereſt maxime ardua: quomodo globus, cui circa axem quemcunque obliquum fuerit impreſſus motus gyratorius, ſuper plano ſit progreſſurus; quoniam principia, ex quibus huiusmodi motus determinari oportet, neutiquam adhuc ſatis ſunt euoluta, vt ad quosuis caſus, qui occurrere poſſunt, applicari queant. Primus equidem haec principia in Tractatu meo de motu corporum ſolidorum ſeu rigidorum iſta principia in lucem produxi, indeque plurima motus Phoenomena explicaui, quae principiis mechanicis vulgaribus prorſus erant inacceſſa. Quin etiam in vltimo huius libri capite hoc ipſum argumentum de globo ſuper plano horizontali incedente,

 dum

dum interea circa axem obliquum quemcunque gyratur, omnio studio sum perscrutatus. Verum quia hic liber in paucorum manibus versatur, ac ista ipsa tractatio plerisque Geometris etiamnunc videtur incognita; haud abs re fore arbitror, si totum hoc argumentum hic denuo in lucem protraxero, prouti in loco memorato est pertractatum, vbi quidem nonnullas dilucidationes, si opus fuerit visum, adiungam, quo vniuersa Theoria globorum super plano horizontali vtcunque propulsorum completa reddatur. In hac autem inuestigatione imprimis ad effectum frictionis est respiciendum, quandoquidem remota frictione globus perpetuo eundem motum tam progressiuum quam gyratorium, sine vlla alteratione, esset conseruaturus. Frictionem autem eodem modo in calculum introducam, quo hactenus a Geometris tractari est solita. Quanquam enim forte omnia frictionis symptomata nondum fuerint penitus perspecta: tamen ista tractatio inde nullam mutationem pati est censenda; quoniam praecipuum negotium hic in euolutione abstrusissimorum principiorum mechanicae sublimioris et in integratione plurium formularum differentialium alias difficillimarum absoluitur.

Problema I.

§. 1. *Si globus super plano horizontali vtcunque tam motu progressiuo quam gyratorio moueatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit superficiem horizontalem.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. Sit I centrum globi, simulque eius centrum inertiae eiusque radius sit $= f$, et contactus fiat in puncto imo T, motus

motus autem globi ita ſit comparatus, vt centrum inertiae moueatur ſecundum directionem P I R celeritate $= v$, ſimul vero gyretur circa axem quemcunque I O celeritate angulari $= \mathfrak{s}$, in eum ſenſum, vt punctum T circa O incedat per arculum $T t$, ac pro poſitione puncti O ſtatuamus angulum $P T O = \theta$ et arcum $T O = s$, vbi quidem arcus ita ſumo, quaſi radius globi eſſet $= 1$. Ducatur T V ipſi P I R parallela, ac ſi motus gyratorius abeſſet, punctum contactus T raſurum eſſet planum horizontale celeritate v in directione T V. Deinde ſi globus ſolo motu gyratorio ferretur, punctum T per $T t$ moueretur celeritate $f \mathfrak{s}$ ſin. $T O = f \mathfrak{s}$ ſin s, cuius directio cum ſit horizontalis, in plano per rectam $T \Theta$ referatur, ita vt ſit angulus $S T \Theta = P T t = \theta - 90°$, ob $O T t$ rectum. Erit ergo $V T \theta = 270° - \theta$. Capiantur rectae $T V = v$ et $T \Theta = f \mathfrak{s}$ ſin. s, et quia punctum T his duobus motibus coniunctim mouetur, eius verus motus fiet ſecundum rectam T F, diagonalem parallelogrammi $T V F \Theta$. Ex F ad T V ducta normali F H, erit $V H = f \mathfrak{s}$ ſin. s ſin. θ et $F H = - f \mathfrak{s}$ ſin. s coſ. θ, vnde fit $F H = v - f \mathfrak{s}$ ſin. s ſin. θ atque celeritas radens

$$T F = \sqrt{(v v - 2 f \mathfrak{s} v \text{ ſin. } s \text{ ſin.} \theta + f f \mathfrak{s} \mathfrak{s} \text{ ſin. } s^2)} \text{ et}$$

$$\text{tang. } V T F = \frac{- f \mathfrak{s} \text{ ſin. } s \text{ coſ.} \theta}{v - f \mathfrak{s} \text{ ſin. } s \text{ ſin. } \theta}.$$

Ducatur ex centro I ipſi T F parallela I Q, erit arcus T Q quadrans, et angulus $R T Q = V T F$; quare ſi I Q ſit directioni, ſecundum quam punctum T radit, parallela, erit

$$\text{tang. } P T Q = \frac{f \mathfrak{s} \text{ ſin.} s \text{ coſ.} \theta}{v - f \mathfrak{s} \text{ ſin.} s \text{ ſin.} \theta},$$

ac poſita celeritate radente

$\sqrt{(v v - 2 f \aleph v \sin. s \sin. \theta + f f \aleph^2 \sin. s^2)} = u$, erit
$\sin. PTQ = -\frac{f \aleph \sin. s \cos. \theta}{u}$ et
$\cos. PTQ = \frac{f \aleph \sin. s \sin. \theta - v}{u}$.

Corollarium 1.

§. 2. Fieri ergo poteſt, vt celeritas radens ideoque et attritus euaneſcat, quo caſu hae duae aequationes locum habere debent: altera $\aleph \sin. s \cos. \theta = 0$, altera vero $v = f \aleph \sin. s \sin. \theta$. Vnde ſtatim patet, ſi nullus adſit motus progreſſiuus, ſeu $v = 0$, nullum attritum affore ſi $\sin. s = 0$, hoc eſt ſi globus circa axem verticalem ZT gyretur.

Corollarium 2.

§. 3. Deinde motus globi ab attritu erit liber, ſi fuerit primo $\cos. \theta = 0$, ſeu angulus PTO rectus: deinde celeritas progreſſiua v ad angularem $\aleph$ hanc relationem tenere debet, vt ſit $v = f \aleph \sin. s$, ſeu $TV = T\Theta$, et angulus $ST\Theta = 0$.

Corollarium 3.

§. 4. Quando ergo globus huiusmodi motum eſt conſecutus, quia ſublato omni attritu etiam nulla adeſt frictio, globus eundem motum conſtanter conſeruabit, ſiquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

Scholion 1.

§. 5. Quemadmodum hic frictionem conſtituimus, ea non obſtat, quominus globus ſuper plano horizontali motum

motum suum intemeratum conseruari possit, quod tamen minime fieri obseruamus, cum globus super tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cuius rei caussa resistentiae aëris tribui nequit. Verum hic primum animaduerto, experimenta Theoriae nunquam perfectissime congruere: veluti dum casu hic tractato assumsimus, contactum vnico fieri puncto, id semper in praxi secus euenit. Interim tamen si arcus T O est quadrans et $PTO = 90°$, existente $v = f\theta$, etsi contactus non fiat in vnico puncto, tamen attritus euanescit, ideoque haec motus extinctio frictioni neutiquam adscribi potest. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, vti hic eam definiuimus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora super superficiebus incedunt, a frictione probe distinguendum, cuius ratio vtcunque fuerit comparata, eius effectus potius seorsim inuestigari conuenit, quam frictionis indolem hic stabilitam immutari. Et quemadmodum hic a resistentia aëris mentem abstrahimus ita etiam licebit hoc obstaculum frictionem concomitans a praesenti argumento seiungere.

Scholion 2.

§. 6. Corpora hic sphaerica considero, in quorum centro situm sit ipsorum centrum inertiae I, quod ergo ipsum etiam in plano horizontali moueatur, et puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat; ex quo patet, pressionem in contactu semper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia vniformi constaret, omnes eius diametri proprietate axium principalium gauderent. Sed concipiamus materiae distributionem vtcun-

vtcunque inaequabilem, ita tamen vt centrum inertiae cadat in centrum figurae: hocque pacto necesse erit in globo ternos axes principales considerari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a se inuicem distantia, quorum respectu sint momenta inertiae M aa, M bb, M cc. Quanquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter se aequalia statuemus, tamen conueniet tria huiusmodi puncta in superficie fixa notasse, quo ex eorum relatione ad spatium absolutum facilius motus globi definiri possit. Constitutis autem in globis his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam Tt dirigi assumimus, sensum habet CBA, contrarium ei quem supra statuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc casum celeritatem angularem ε vt negatiuam spectare debemus.

Problema II.

§. 7. *Si globus super plano horizontali vtcunque moueatur, definire vires, quibus sollicitatur, earumque momenta respectu ternorum axium principalium globi.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 2. Inclusus concipiatur globus Sphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progressiuum habenti, in qua Z sit punctum verticale eiusque oppositum T punctum contactus, DE vero sit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens et DPQE circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapso tempore t moueatur globus motu progressiuo secundum directionem PI celeritate $= v$, ponaturque arcus DP, seu angulus DZP $= \varphi$; axes autem prin-

principales nunc ſint in A, B, C. Tum vero globus iam gyretur circa axem I O, celeritate angulari $= \varepsilon$ in ſenſum A C B, ſitque pro ſitu puncti O angulus P T O ſeu P Z O $= \theta$ et arcus Z O $= s$. Etſi enim ante arcum T O poſuimus $= s$, quia tantum eius ſinus in computum intrat, perinde eſt. Erit ergo angulus D Z O $= \theta + \Phi$ et E Z O $= 180° - \theta - \Phi$. Deinde a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum maximorum ducti concipiantur, ſintque hi arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$ et anguli $EZA = \lambda$, $EZB = \mu$, $EZC = \nu$. In praecedente autem problemate oſtendimus, punctum contactus T planum ſubiectum radere ſecundum directionem radio I Q parallelam celeritate $= \sqrt{(vv - 2f\varepsilon v \text{ ſin.} s \text{ ſin.} \theta + ff\varepsilon\varepsilon \text{ ſin.} s^2)}$, foreque

$$\text{tang. } PTQ = \text{tang. } PZQ = \frac{f\varepsilon \text{ ſin. } s \text{ coſ. } \theta}{v - f\varepsilon \text{ ſin. } s \text{ ſin. } \theta},$$

denotante f radium globi. Cum igitur preſſio in T ſit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T eſt applicata ſecundum directionem ipſi Q I parallelam. Hac ergo vi reſoluta ſecundum directiones axium principalium I A, I B, I C, prodibunt ternae vires, quae in puncto T applicatae ſunt concipiendae, ex quibus porro colliguntur ſequentia momenta:

Reſpectu axis I A in ſenſum B C:

$$-\delta M f \text{ coſ. } CQ \text{ coſ. } BT + \delta M f \text{ coſ. } BQ \text{ coſ. } CT = P.$$

Reſpectu axis I B in ſenſum C A:

$$-\delta M f \text{ coſ. } AQ \text{ coſ. } CT + \delta M f \text{ coſ. } CQ \text{ coſ. } AT = Q.$$

Reſpectu axis I C in ſenſum A B:

$$-\delta M f \text{ coſ. } BQ \text{ coſ. } AT + \delta M f \text{ coſ. } AQ \text{ coſ. } BT = R,$$

 erunt

erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta M f (\operatorname{cof.} m \operatorname{cof.} CQ - \operatorname{cof} n \operatorname{cof.} BQ)$$

$$Q = \delta M f (\operatorname{cof.} n \operatorname{cof.} AQ - \operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} CQ)$$

$$R = \delta M f (\operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} BQ - \operatorname{cof.} m \operatorname{cof.} AQ).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum $PZQ = \xi$, vt fit

$$\operatorname{tang.} \xi = \frac{f \text{ȣ} \operatorname{fin.} s \operatorname{cof.} \theta}{v - f \text{ȣ} \operatorname{fin.} s \operatorname{fin.} \theta}$$

et pofita celeritate radente

$$\surd(v v - 2 f v \text{ȣ} \operatorname{fin.} s \operatorname{fin.} \theta + f f \text{ȣ}\text{ȣ} \operatorname{fin.} \theta^2 = u, \text{ erit}$$

$$\operatorname{fin.} \xi = \frac{- f \text{ȣ} \operatorname{fin.} s \operatorname{cof.} \theta}{u} \text{ et } \operatorname{cof.} \xi = \frac{f \text{ȣ} \operatorname{fin.} s \operatorname{fin.} \theta - v}{u}.$$

Fit ergo $DZQ = \Phi + \xi$ et $EZQ = 180° - \Phi - \xi$, hinc $AZQ = 180° - \xi - \Phi - \lambda$; $BZQ = \mu + \xi + \Phi - 180°$; ergo

$$\operatorname{cof.} AQ = - \operatorname{cof.} (\xi + \Phi + \lambda) \operatorname{fin.} l$$

$$\operatorname{cof.} BQ = - \operatorname{cof.} (\xi + \Phi + \mu) \operatorname{fin.} m$$

$$\operatorname{cof.} CQ = - \operatorname{cof.} (\xi + \Phi + \nu) \operatorname{fin.} n.$$

Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:

$$P = \delta M f \operatorname{fin.} l \times \operatorname{fin.} (\lambda + \Phi + \xi)$$

$$Q = \delta M f \operatorname{fin.} m \times \operatorname{fin.} (\mu + \Phi + \xi)$$

$$R = \delta M f \operatorname{fin.} n \times \operatorname{fin.} (\nu + \Phi + \xi).$$

Pro-

Problema III.

§. 8. *Si motum gyratorium ad quoduis tempus vt datum spectemus, definire motum progressiuum globi.*

Solutio.

Quia centrum globi in plano horizontali mouetur, descripserit id tempore t lineam G I, quae referatur ad directionem G X superiori directioni fixae D E parallelam, ductaque I X ad G X normali, sint coordinatae $GX = X$, $XY = Y$. Per I ducatur recta D E ipsi G X parallela, quae erit ipsa diameter D E (fig. 2). Ducatur I P, ita vt sit angulus $DIP = EIR = \Phi$, et centrum I per hypothesin progreditur in directione I R celeritate $= v$, ita vt sit celeritas secundum $GX = v \operatorname{cos.} \Phi$ et celeritas secundum $XI = v \operatorname{sin.} \Phi$, ideoque $dX = v\, dt \operatorname{cos.} \Phi$ et $dY = v\, dt \operatorname{sin.} \Phi$. Ducatur recta Q I S, ita vt I Q sit directioni, qua punctum contactus radit, parallela, erit angulus $EIQ = DIS = 180° - \xi - \Phi$; (est enim aequalis angulo E Z Q in praecedente figura) vnde globus sollicitari censendus est vi $= \delta M$ in directione I S. Hinc ergo oritur vis secundum $ID = -\delta M \operatorname{cos.} (\xi + \Phi)$ et vis secundum $XI = \delta M \operatorname{sin.} (\xi + \Phi)$, ex quibus colligitur Tab. IV. Fig. 3.

$$\frac{d.\, v \operatorname{cos.} \Phi}{2g\, dt} = \frac{dv \operatorname{cos.} \Phi - v\, d\Phi \operatorname{sin.} \Phi}{2g\, dt} = \delta \operatorname{cos.} (\xi + \Phi)$$

$$\frac{d.\, v \operatorname{sin.} \Phi}{2g\, dt} = \frac{dv \operatorname{sin.} \Phi + v\, d\Phi \operatorname{cos.} \Phi}{2g\, dt} = \delta \operatorname{sin.} (\xi + \Phi)$$

hincque porro

$$\frac{dv}{2g\, dt} = \delta \operatorname{cos.} \xi \quad \text{et} \quad \frac{v\, d\Phi}{2g\, dt} = \delta \operatorname{sin.} \xi,$$

ita vt ſit

$$\frac{v\,d\Phi}{dv} = \text{tang.}\,\xi = \frac{f\text{ש}\,\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,\theta}{v - f\text{ש}\,\text{ſin.}\,s\,\text{ſin.}\,\theta}.$$

Problema IV.

§. 9. *Definito motu progreſſiuo globi, determinare eius motum gyratorium.*

Solutio.

Tab. IV. Fig. 2. Spectetur nunc centrum globi I vt quieſcens, et maneant omnes denominationes in Problemate II adhibitae, ſintque M aa, M bb, M cc momenta inertiae reſpectu axium principalium I A, I B, I C, quae primo vt inaequalia conſideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem ש vt negatiuam ſpectare debemus, quia tendit in ſenſum A C B, ſi ponamus ש coſ. $\alpha = x$, ש coſ. $\beta = y$, et ש coſ. $\gamma = z$, in formulis generalibus has litteras x, y, z negatiue ſumi oportet, quo facto ex § 810. Theoriae meae motus corporum ſolidorum deducuntur hae aequationes motum determinantes:

$$dx + \frac{bb-cc}{aa} yz\,dt + \frac{2\delta fg}{aa} dt\,\text{ſin.}\,l\,\text{ſin.}\,(\lambda+\Phi+\xi) = 0;$$

$$dy + \frac{cc-aa}{bb} xz\,dt + \frac{2\delta fg}{bb} dt\,\text{ſin.}\,m\,\text{ſin.}\,(\mu+\Phi+\xi) = 0;$$

$$dz + \frac{aa-bb}{cc} xy\,dt + \frac{2\delta fg}{cc} dt\,\text{ſin.}\,n\,\text{ſin.}\,(\nu+\Phi+\xi) = 0;$$

$$dl\,\text{ſin.}\,l = dt\,(z\,\text{coſ.}\,m - y\,\text{coſ.}\,n);$$

$$dm\,\text{ſin.}\,m = dt\,(x\,\text{coſ.}\,n - z\,\text{coſ.}\,l);$$

$$dn\,\text{ſin.}\,n = dt\,(y\,\text{coſ.}\,l - x\,\text{coſ.}\,m);$$

$$d\lambda\,\text{ſin.}\,l^2 = dt\,(y\,\text{coſ.}\,m + z\,\text{coſ.}\,n);$$

$$d\mu\,\text{ſin.}\,m^2 = dt\,(z\,\text{coſ.}\,n + x\,\text{coſ.}\,l);$$

$$d\nu\,\text{ſin.}\,n^2 = dt\,(x\,\text{coſ.}\,l + y\,\text{coſ.}\,m).$$

Tum

Tum vero ex motu progreſſiuo habemus

$$d v = 2\delta g\, d t \operatorname{cof.} \xi,$$
$$v\, d\Phi = 2\delta g\, d t \operatorname{fin.} \xi \text{ et}$$
$$\operatorname{tang.} \xi = \frac{f\, \mathrm{fin.}\, s\, \mathrm{cof.}\, \theta}{v - f\, \mathrm{fin.}\, s\, \mathrm{cof.}\, \theta},$$

vbi eſt $PZO = \theta$ et $ZO = s$. Cum ergo ſit angulus $EZO = 180° - \theta - \Phi$, erit $AZO = 180° - \lambda - \theta - \Phi$: hincque

$$\operatorname{cof.} \alpha = \operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} s - \operatorname{fin.} l \operatorname{fin.} s \operatorname{cof.} (\lambda + \theta + \Phi)$$
$$\operatorname{cof.} \beta = \operatorname{cof.} m \operatorname{cof.} s - \operatorname{fin.} m \operatorname{fin.} s \operatorname{cof.} (\mu + \theta + \Phi)$$
$$\operatorname{cof.} \gamma = \operatorname{cof.} n \operatorname{cof.} s - \operatorname{fin.} n \operatorname{fin.} s \operatorname{cof.} (\nu + \theta + \Phi),$$

exiſtente

$$\operatorname{cof.} s = \operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} \alpha + \operatorname{cof.} m \operatorname{cof.} \beta + \operatorname{cof.} n \operatorname{cof.} \gamma,$$

vnde ſequitur fore

$$\left.\begin{array}{l} + \operatorname{fin.} l \operatorname{cof.} l \operatorname{cof.} (\lambda + \theta + \Phi) \\ + \operatorname{fin.} m \operatorname{cof.} m \operatorname{cof.} (\mu + \theta + \Phi) \\ + \operatorname{fin.} n \operatorname{cof.} n \operatorname{cof.} (\nu + \theta + \Phi) \end{array}\right\} = 0.$$

Ponamus $\mathfrak{v} \operatorname{cof.} s = p$ et $\mathfrak{v} \operatorname{fin.} s = q$ ita vt ſit

$$\operatorname{tang.} \xi = \frac{f q \operatorname{cof.} \theta}{v - f q \operatorname{fin.} \theta} = \frac{v\, d\Phi}{d v},$$

eritque

$$x = p \operatorname{cof.} l - q \operatorname{fin.} l \operatorname{cof.} (\lambda + \theta + \Phi),$$
$$y = p \operatorname{cof.} m - q \operatorname{fin.} m \operatorname{cof.} (\mu + \theta + \Phi),$$
$$z = p \operatorname{cof.} n - q \operatorname{fin.} n \operatorname{cof.} (\nu + \theta + \Phi),$$

ex quibus valoribus fit

$$d l = q\, d t \operatorname{fin.} (\lambda + \theta + \Phi);$$
$$d m = q\, d t \operatorname{fin.} (\mu + \theta + \Phi);$$
$$d n = q\, d t \operatorname{fin.} (\nu + \theta + \Phi);$$
$$d \lambda = p\, d t + q\, d t \operatorname{cot.} l \operatorname{cof.} (\lambda + \theta + \Phi);$$
$$d \mu = p\, d t + q\, d t \operatorname{cot.} m \operatorname{cof.} (\mu + \theta + \Phi);$$
$$d \nu = p\, d t + q\, d t \operatorname{cot.} n \operatorname{cof.} (\nu + \theta + \Phi);$$

 inde-

indeque porro

$$dx = dp \operatorname{cos.} l - dq \operatorname{sin.} l \operatorname{cos} (\lambda + \theta + \Phi) \\ + q (d\theta + d\Phi) \operatorname{sin.} l \operatorname{sin.} (\lambda + \theta + \Phi),$$

$$dy = dp \operatorname{cos.} m - dq \operatorname{sin.} m \operatorname{cos.} (\mu + \theta + \Phi) \\ + q (d\theta + d\Phi) \operatorname{sin.} m \operatorname{sin.} (\mu + \theta + \Phi),$$

$$dz = dp \operatorname{cos.} n - dq \operatorname{sin.} n \operatorname{cos} (\nu + \theta + \Phi) \\ + q (d\theta + d\Phi) \operatorname{sin.} n \operatorname{sin.} (\nu + \theta + \Phi),$$

At sine subsidio harum substitutionum ex aequationibus ternis primis cum in genere sit

$$\operatorname{sin.} l \operatorname{cos.} l \operatorname{sin.} (\lambda + A) + \operatorname{sin.} m \operatorname{cos.} m (\mu + A) \\ + \operatorname{sin} n \operatorname{cos.} n \operatorname{sin.} (\nu + A) = 0,$$

elicimus hanc aequationem:

$$\left.\begin{matrix} aadx \operatorname{cos.} l + bbdy \operatorname{cos.} m + ccdz \operatorname{cos.} n \\ -aaxdl \operatorname{sin.} \lambda - bbydm \operatorname{sin.} m - cczdn \operatorname{sin.} n \end{matrix}\right\} = 0,$$

cuius integrale est

$$aax \operatorname{cos.} l + bby \operatorname{cos.} m + ccz \operatorname{cos.} n = C,$$

quae aequatio, adhibitis substitutionibus, abit in hanc:

$$\left.\begin{matrix} p (aa \operatorname{cos.} l^2 + bb \operatorname{cos.} m^2 + cc \operatorname{cos.} n^2) \\ - qaa \operatorname{sin.} l \operatorname{cos.} l \operatorname{cos.} (A + \theta + \Phi) \\ - qbb \operatorname{sin.} m \operatorname{cos.} m \operatorname{cos.} (\mu + \theta + \Phi) \\ - qcc \operatorname{sin.} n \operatorname{cos.} n \operatorname{cos.} (\nu + \theta + \Phi) \end{matrix}\right\} = \text{Const.}$$

Deinde etiam per reductiones §. 934. Theoriae meae traditas pro vi viua colligitur haec aequatio differentialis:

$$aaxdx + bbydy + cczdz = 2\delta fgqdt \operatorname{sin.} (\xi - \theta).$$

Scholion.

§. 10. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis traditis, vbi angulos μ et ν per l, λ, m, n exprespressimus, notari conuenit fieri

$$\operatorname{cos.}(\mu+\theta+\Phi) = \frac{-\operatorname{cos.} l \operatorname{cos.} m \operatorname{cos.}(\lambda+\theta+\Phi) + \operatorname{cos.} n \operatorname{sin.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\operatorname{sin.} l \operatorname{sin.} m},$$

$$\operatorname{cos}(\nu+\theta+\Phi) = \frac{-\operatorname{cos.} l \operatorname{cos.} n \operatorname{cos.}(\lambda+\theta+\Phi) - \operatorname{cos.} m \operatorname{sin.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\operatorname{sin.} l \operatorname{sin} m},$$

$$\operatorname{sin.}(\mu+\theta+\Phi) = \frac{-\operatorname{cos.} l \operatorname{cos.} m \operatorname{sin.}(\lambda+\theta+\Phi) - \operatorname{cos.} n \operatorname{cos.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\operatorname{sin.} l \operatorname{sin.} m},$$

$$\operatorname{sin.}(\nu+\theta+\Phi) = \frac{-\operatorname{cos.} l \operatorname{cos.} n \operatorname{sin.}(\lambda+\theta+\Phi) + \operatorname{cos.} m \operatorname{cos.}(\lambda+\theta+\Phi)}{\operatorname{sin.} l \operatorname{sin.} n}.$$

Ac simili modo anguli $\mu+\Phi+\xi$ et $\nu+\Phi+\xi$ ad angulum $\lambda+\Phi+\xi$ reuocari possunt. Deinde etiam pro sequentibus reductionibus haec forma imprimis est notanda:

$$\operatorname{sin.}(\mu+B)\operatorname{cos.}(\nu+C) = \operatorname{sin.}(\nu+B)\operatorname{cos.}(\mu+C),$$

quae ob

$$\operatorname{sin.} M \operatorname{cos.} N = \tfrac{1}{2}\operatorname{sin.}(M+N) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sin.}(M-N),$$

reducitur ad

$$\operatorname{sin.}(\mu-\nu)\operatorname{cos}(B-C);$$

hocque modo reductionem pro aliis formulis instituendo, reperiemus:

$$\operatorname{sin}(\mu+B)\operatorname{cos}(\nu+C) - \operatorname{sin.}(\nu+B)\operatorname{cos.}(\mu+C)$$
$$= \operatorname{sin.}(\mu-\nu)\operatorname{cos.}(B-C),$$

$$\operatorname{sin.}(\mu+B)\operatorname{sin.}(\nu+C) - \operatorname{sin.}(\nu+B)\operatorname{sin.}(\mu+C)$$
$$= -\operatorname{sin.}(\mu-\nu)\operatorname{sin.}(B-C),$$

$$\operatorname{cos.}(\mu+B)\operatorname{cos}(\nu+C) - \operatorname{cos}(\nu+B)\operatorname{cos.}(\mu+C)$$
$$= -\operatorname{sin.}(\mu-\nu)\operatorname{sin}(B-C),$$

vbi $\operatorname{sin}(\mu-\nu)$ per formulas vsurpatas datur: est enim $\operatorname{sin.}(\mu-\nu) = \frac{\operatorname{cos.} e}{\operatorname{sin.} m \operatorname{sin.} n}$.

Problema V.

§. 11. *Si globus ex materia vniformi constet, vel saltem ita fuerit comparatus, vt omnia momenta inertiae sint inter*

inter se aequalia, eique initio impressus fuerit motus quicunque, determinare eius continuationem.

Solutio.

Cum hic sit $aa = bb = cc$, seu momentum inertiae respectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Const. vnde p erit quantitas constans. Statuatur ergo $p = h$, et ternae aequationes priores hanc induent formam:

$$\text{I.}\ -dq\cos.(\lambda+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\sin.(\lambda+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin.(\lambda+\varphi+\xi) = 0,$$

$$\text{II.}\ -dq\cos.(\mu+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\sin.(\mu+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin.(\mu+\varphi+\xi) = 0,$$

$$\text{III.}\ -dq\cos.(\nu+\theta+\varphi) + q(d\theta+d\varphi)\sin.(\nu+\theta+\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin.(\nu+\varphi+\xi) = 0,$$

quarum autem sufficit binas considerasse, quia iam inde nata est conclusio $p = h$. Iam per superiores reductiones binae posteriores aequationes ita combinentur:

$$\text{II.}\cos.(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\cos.(\mu+\theta+\varphi)$$

quae combinatio praebet

$$q(d\theta+d\varphi)\sin.(\mu-\nu) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\sin.(\mu-\nu)\cos.(\xi-\theta) = 0,$$

seu

$$q(d\theta+d\varphi) + \frac{2\delta fg}{aa}dt\cos.(\xi-\theta) = 0.$$

Deinde combinatio

$$\text{II.}\sin.(\nu+\theta+\varphi) - \text{III.}\sin.(\mu+\theta+\varphi)\ \text{dat}$$

dq

$$d\,q\,\text{fin.}\,(\mu - \nu) - \tfrac{2\delta f g}{a a}\,d\,t\,\text{fin.}\,(\mu - \nu)\,\text{fin.}\,(\xi - \theta) = 0$$

feu

$$d\,q = \tfrac{2\delta f g}{a a}\,d\,t\,\text{fin.}\,(\xi - \theta),$$

qui valor in vltima aequatione pro viribus viuis fubftitutus praebet

$$x\,d\,x + y\,d\,y + z\,d\,z = q\,d\,q, \text{ hincque}$$

$$x\,x + y\,y + z\,z = s\,s = \text{conft.} + q\,q = \text{conft.} + s\,s\,\text{fin.}\,s^2$$

ita vt fit $s\,s\,\text{cof.}\,s^2$ quantitas conftans, vti iam inuenimus, ob $s\,\text{cof}\,s = p = h$. Hinc iftas habemus aequationes a litteris l, m, n, λ, μ, ν immunes:

$$\text{I. } q\,(d\,\theta + d\,\varphi) + \tfrac{2\delta f g}{a a}\,d\,t\,\text{cof.}\,(\xi - \theta) = 0,$$

$$\text{II. } d\,q = \tfrac{2\delta f g}{a a}\,d\,t\,\text{fin.}\,(\xi - \theta) = 0,$$

$$\text{III. } d\,v = 2\,\delta\,g\,d\,t\,\text{cof.}\,\xi,$$

$$\text{IV. } v\,d\,\varphi = 2\,\delta\,g\,d\,t\,\text{fin.}\,\xi,$$

quibus adiungatur haec finita: $\text{tang.}\,\xi = \frac{f\,q\,\text{cof.}\,\theta}{v - f\,q\,\text{fin.}\,\theta}$, quae in hanc transformata:

$$v\,\text{fin.}\,\xi - f\,q\,\text{cof.}\,(\xi - \theta) = 0,$$

differentietur, prodibitque

$$d\,v\,\text{fin.}\,\xi + v\,d\,\xi\,\text{cof.}\,\xi - f\,d\,q\,\text{cof.}\,(\xi - \theta) + f\,q\,d\,\xi\,\text{fin.}\,(\xi - \theta)$$
$$- f\,q\,d\,\theta\,\text{fin.}\,(\xi - \theta) = 0.$$

Iam combinatio:

$$\text{I. fin.}\,(\xi - \theta) + \text{II. cof.}\,(\xi - \theta) \text{ dat}$$

$$q\,(d\,\theta + d\,\varphi)\,\text{fin.}\,\xi - \theta) + d\,q\,\text{cof.}\,(\xi - \theta) = 0,$$

quae aequatio per f multiplicata illi addatur, fietque

$$d\,v\,\text{fin.}\,\xi + v\,d\,\xi\,\text{cof}\,\xi + f\,q\,(d\,\xi + d\,\varphi)\,\text{fin.}\,(\xi - \theta) = 0.$$

 Porro

Porro ob $\frac{dv}{v\,d\Phi} = \frac{\operatorname{cos.}\xi}{\operatorname{sin.}\xi}$ crit

$$v\,(d\varphi + d\xi) \operatorname{cos} \xi + fq\,(d\Phi + d\xi) \operatorname{sin.} (\xi - \theta) = 0, \text{ seu}$$

$$(d\varphi + d\xi)\,(v \operatorname{cos.} \xi + fq \operatorname{sin.} (\xi - \theta)) = 0,$$

quorum factorum finitus: $v \operatorname{cos.} \xi + fq \operatorname{sin.} (\xi - \theta)$, euanescere nequit ob

$$v \operatorname{sin.} \xi - fq \operatorname{cos.} (\xi - \theta) = 0,$$

sequeretur enim inde $v \operatorname{cos.} \theta = 0$ et $fq \operatorname{cos.} \theta = 0$, quod non nisi casu $\theta = 90^\circ$ locum habet. Relinquitur ergo vt sit $d\varphi + d\xi = 0$, ideoque $\varphi + \xi$ constans. Hoc impetrato reliqua non difficulter expedientur. Ad integrationes autem determinandas pro statu initiali $t = 0$, ponamus fuisse celeritatem progressiuam $v = e$, $\varphi = 0$, $PZO = \theta = \mathfrak{h}$; $ZO = s = \mathfrak{f}$ et celeritatem angularem $\varkappa = \varepsilon$ in sensum ACB; hinc erit $p = b = \varepsilon \operatorname{cos.} \mathfrak{f}$ et $q = \varepsilon \operatorname{sin.} \mathfrak{f}$; porro

$$\operatorname{tang} \xi = \frac{\varepsilon f \operatorname{sin.} \mathfrak{f} \operatorname{cos.} \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \operatorname{sin.} \mathfrak{f} \operatorname{sin.} \mathfrak{h}}.$$

Statuatur

$$\frac{\varepsilon f \operatorname{sin.} \mathfrak{f} \operatorname{cos.} \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \operatorname{sin.} \mathfrak{f} \operatorname{sin.} \mathfrak{h}} = \operatorname{tang.} \zeta,$$

vt fuerit initio $\xi = \zeta$, ac perpetuo erit $\xi + \varphi = \zeta$, ita vt angulus $DZQ = \zeta$ maneat constans. Quare cum sit $\xi = \zeta - \varphi$ erit

$$v \operatorname{sin.} (\zeta - \varphi) = fq \operatorname{cos.} (\zeta - \theta - \varphi).$$

Supra autem inuenimus:

$$\frac{d.\, v \operatorname{cos.} \Phi}{2g\,dt} = \delta \operatorname{cos.} (\xi + \varphi) = \delta \operatorname{cos.} \zeta \text{ et}$$

$$\frac{d.\, v \operatorname{sin.} \Phi}{2g\,dt} = \delta \operatorname{sin.} (\xi + \varphi) = \delta \operatorname{sin.} \zeta,$$

vnde integrando colligimus:

$$v \operatorname{cos.} \varphi = e + 2\delta g t \operatorname{cos.} \zeta \text{ et } v \operatorname{sin.} \varphi = 2\delta g t \operatorname{sin.} \zeta,$$

hinc-

hincque

$$v = \sqrt{(ee + 4\delta egt\,\text{cos.}\,\zeta + 4\delta\delta ggtt)},$$

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{2\delta gt\,\text{sin.}\,\zeta}{e + 2\delta gt\,\text{cos.}\,\zeta}, \text{ atque}$$

$$\text{tang.}\,(\zeta - \varphi) = \frac{e\,\text{sin.}\,\zeta}{e\,\text{cos.}\,\zeta + 2\delta gt} = \frac{fq\,\text{cos.}\,\theta}{v - fq\,\text{sin.}\,\theta} = \text{tang.}\,\xi.$$

Deinde ob $d\Phi = -d\xi$ binae priores aequationes abeunt in

$$\text{I.}\quad q\,(d\xi - d\theta) = \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\text{cos.}\,(\xi - \theta).$$

$$\text{II.}\quad dq = \frac{2\delta fg}{aa}\,dt\,\text{sin.}\,(\xi - \theta),$$

quarum haec per illam diuisa dat

$$\frac{dq}{q\,(d\xi - d\theta)} = \frac{\text{sin.}\,(\xi - \theta)}{\text{cos.}\,(\xi - \theta)},$$

qua integrata prodit $q\,\text{cos.}\,(\xi - \theta) = C$, ideoque

$$q\,\text{cos.}\,(\xi - \theta) = \varepsilon\,\text{sin.}\,\mathfrak{f}\,\text{cos.}\,(\zeta - \mathfrak{h}),$$

vnde valor ipsius q in prima substitutus praebet:

$$\frac{\varepsilon\,(d\xi - d\theta)\,\text{sin.}\,\mathfrak{f}\,\text{cos.}\,(\zeta - \mathfrak{h})}{\text{cos.}\,(\xi - \theta)^2} = \frac{2\delta fg}{aa}\,dt,$$

et integrando

$$\varepsilon\,\text{sin.}\,\mathfrak{f}\,\text{cos.}\,(\zeta - \mathfrak{h})\,\text{tang.}\,(\xi - \theta) = C + \frac{2\delta fg}{aa}\,t,$$

vbi $C = \varepsilon\,\text{sin.}\,\mathfrak{f}\,\text{sin.}\,(\theta - \mathfrak{h})$, at

$$\text{tang.}\,(\xi - \theta) = \text{tang.}\,(\zeta - \varphi - \theta) = \frac{\text{tang.}\,(\zeta - \Phi) - \text{tang.}\,\theta}{1 + \text{tang.}\,(\zeta - \Phi)\,\text{tang.}\,\theta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\,\theta = \frac{\text{tang.}\,\xi - \text{tang.}\,(\xi - \theta)}{1 + \text{tang.}\,\xi\,\text{tang.}\,(\xi - \theta)}.$$

Sed per hypothesin est $\varepsilon\,\text{sin.}\,\mathfrak{f} = \frac{e\,\text{sin.}\,\zeta}{f\,\text{cos.}\,(\zeta - \mathfrak{h})}$, vnde fit

$$\text{tang.}\,(\xi - \theta) = \text{tang.}\,(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa\,\text{sin.}\,\zeta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{e\,\text{sin.}\,\zeta}{e\,\text{cos.}\,\zeta + 2\delta gt},$$

hincque angulus θ facile determinatur: indeque $q = \frac{e\,\text{sin.}\,\zeta}{f\,\text{cos.}\,(\xi - \theta)}$.

Verum hic notari oportet, cum ſit

$$\text{tang.}\ \zeta = \frac{e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}},$$

eſſe vt ſupra de angulo ξ oſtendimus

$$\text{ſin.}\ \zeta = \frac{-e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{\sqrt{(e e - 2 e \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)}}\ \text{et}$$

$$\text{coſ.}\ \zeta = \frac{-e + \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h}}{\sqrt{(e e - 2 \varepsilon e f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)}},\ \text{vnde}$$

$$\text{coſ.}\ (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e\ \text{coſ.}\ \mathfrak{h}}{\sqrt{(e e - 2 e \varepsilon f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}\ \text{ſin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon \varepsilon f f\ \text{ſin.}\ \mathfrak{f}^2)}}.$$

His inuentis cum ſit $\otimes\ \text{coſ.}\ s = \varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}$ et $\otimes\ \text{ſin.}\ s = q$, erit

$$\otimes = \sqrt{(q q + \varepsilon \varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}^2)}\ \text{et tang.}\ s = \frac{q}{\varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}}.$$

Sicque tam motus progreſſiuus, quam ad quoduis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari $\otimes$ poterit asſignari, id quod ad motus cognitionem ſufficit. Determinatio autem ſitus punctorum A, B, C ad quoduis tempus nimis eſt ardua, quam vt eam perficere liceat.

Corollarium 1.

§. 12. Cum ſit celeritas angularis $\otimes = \frac{\varepsilon\ \text{coſ.}\ \mathfrak{f}}{\text{coſ.}\ s}$, ſeu coſinui arcus S O reciproce proportionalis; ſequitur ſi polus gyrationis O initio fuerit in ſuperiori hemiſphaerio DZE, eum nunquam in inferius peruenire poſſe; in tranſitu enim per circulum horizontalem D E prodiret celeritas angularis $\otimes$ infinita.

Corollarium 2.

§. 13. Ob eandem rationem, ſi polus gyrationis O initio fuerit in hemiſphaerio inferiori D T E, is nunquam in ſuperius aſcendet; ſin autem initio fuerit in

ipſo

ipſo circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit: ſcilicet ſi initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

Corollarium 3.

§. 14. Si fuerit initio angulus DZO $= \mathfrak{h}$ rectus, fiet ſin. $\zeta = 0$ et ob

$$\text{tang.}\,(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f\,\text{ſin.}\,\mathfrak{f} - e\,\text{ſin.}\,\mathfrak{h}}{e\,\text{coſ.}\,\mathfrak{h}},$$

erit etiam $\xi - \theta$ rectus. Sed ob tang. $\xi = \frac{e\,\text{ſin.}\,\zeta}{e\,\text{coſ.}\,\zeta + 2\delta g t}$ angulus ξ euaneſcit, vnde angulus $\theta =$ PZO prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

Corollarium 4.

§. 15. Memorabilis eſt etiam proprietas, quod angulus $\xi + \varphi$, ſeu DZQ, et in fig. 3 angulus DIQ ſit conſtans. Recta enim QIS ſibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progreſſiuo ſollicitatur vi conſtante δ M ſecundum eandem directionem IS, curua ab eo deſcripta GI parabola ſit neceſſe eſt.

Scholion 1.

§. 16. Hic autem motus globi, vti noſtris formulis eſt definitus, diutius non durat, quam reuera frictio adeſt, ſeu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eueniat vt raſio ceſſet, ſeu celeritas radens in T euaneſcat, ſubito frictio euaneſcit, formulaeque inuentae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progreſſiuo quam gyratorio vniformiter in directum progredietur, neque axis gyrationis vllam amplius mutationem patietur. Ac si statim initio motus globo impressus ita fuerit comparatus, vt frictio fuerit nulla, quod euenit si tam εf sin. f cos. $\mathfrak{h} = 0$, quam $e = \varepsilon f$ sin. f sin. $\mathfrak{h}$, tum etiam globus nullam frictionem sentiet, et statim ab initio motum progressiuum uniformiter in directum prosequetur, simulque vniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum si corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impressus, semper aliquo tempore elapso eo reducetur, vt frictio euanescat, indeque motum suum vniformiter prosequetur, quod memorabile temporis punctum in sequenti problemate inuestigabimus.

Scholion 2.

Tab. IV. Fig. 2. §. 17. Quae in solutione problematis elicuimus, huc redeunt: ex motu primum impresso habemus celeritatem motus progressiui $= e$, secundum directionem DI: ac si gyretur circa axem IO celeritate angulari ε in sensum ACB, seu ZETD, qui sensus *antrorsum tendens* dici solet, fueritque arcus ZO $=$ f et angulus DZO $= \mathfrak{h}$: tum vero radius globi sit $= f$ eiusque momentum inertiae $= M\,a\,a$ respectu omnium diametrorum, existente M eius massa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \sqrt{(e\,e - 2\varepsilon\,e\,f\ \text{sin. f sin.}\ \mathfrak{h} + \varepsilon\,\varepsilon\,f\,f\ \text{sin. f}^2)}$, quae si ponatur $= k$, quaeratur angulus DZQ $= \zeta$, vt sit

$$\text{sin.}\ \zeta = \frac{-\varepsilon f\ \text{sin. f cos.}\ \mathfrak{h}}{k} \quad \text{et} \quad \text{cos.}\ \zeta = \frac{\varepsilon f\ \text{sin. f sin.}\ \mathfrak{h} - e}{k},$$

eritque IQ directio motus radentis. Tum si elapso tempore t globi centrum proferatur celeritate v secundum directionem PI, et gyret celeritate angulari $= \vartheta$ in sensum

ſum Z E T D circa polum O, ponaturque $DZP = \Phi$, $PZO = \theta$ et $ZO = s$: inuenimus primo

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{2\delta g t \,\text{ſin.}\, \zeta}{e + 2\delta g t \,\text{coſ.}\, \zeta}$$

et celeritatem centri $= \sqrt{(ee + 4\delta egt \,\text{coſ.}\, \zeta + 4\delta\delta ggtt)}$,

at celeritas radens etiamnunc fiet in directione I Q, existente $DZQ = \zeta$; vnde poſito $PZQ = \xi$ erit

$$\text{tang.}\, \xi = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{e \,\text{coſ.}\, \zeta + 2\delta g t}. \quad \text{Porro eſt}$$

$$\text{tang.}\, (\xi - \theta) = \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa \,\text{ſin.}\, \zeta},$$

exiſtente

$$\text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\varepsilon f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} - e \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h}}{e \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h}},$$

vnde angulus θ innoteſcit, hincque ob $DZO = \Phi + \theta = \zeta - \xi + \theta$, concluditur

$$\text{tang.}\, DZO = \text{tang.}\, (\Phi + \theta) = \frac{\varepsilon aak \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h} + 2\delta fgt(e - \varepsilon) f \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{ſin.}\, \mathfrak{h}}{\varepsilon aak \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h} - 2\delta \varepsilon ff gt \,\text{ſin.}\, \mathfrak{f} \,\text{coſ.}\, \mathfrak{h}}.$$

Atque ex his tandem nacti ſumus $\vartheta \,\text{coſ.}\, s = \varepsilon \,\text{coſ.}\, \mathfrak{f}$ et $\vartheta \,\text{ſin.}\, s = \frac{e \,\text{ſin.}\, \zeta}{f \,\text{coſ.}\, (\xi - \theta)}$. Denique pro celeritate radente ſecundum I Q, ea eſt $\sqrt{(vv - 2\vartheta vf \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta + \vartheta\vartheta ff \,\text{ſin.}\, s^2)}$; quae ſi vocetur $= w$, ſupra oſtendimus eſſe

$$\text{ſin.}\, \xi = -\frac{\vartheta f \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, \theta}{w} \quad \text{et} \quad \text{coſ.}\, \xi = \frac{\vartheta f \,\text{ſin.}\, s \,\text{ſin.}\, \theta - v}{w},$$

vnde ϑ et s definiuntur. Sed pro ſitu punctorum A, B, C in globo fixorum ad quoduis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, vt nihil inde concludi queat. Interim ſi pro puncto A vocetur $ZA = l$ et $EZA = \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

I. dl

$$\text{I. } dl = dt\left(\varepsilon \text{ fin. f fin.}(\mathfrak{h} + \lambda) - \tfrac{2\delta f g t}{aa} \text{ cof.}(\zeta + \lambda)\right),$$

$$\text{II. } d\lambda \text{ fin.} l = \varepsilon dt \text{ cof. f fin.} l + \varepsilon dt \text{ cof.} l \text{ fin. f cof.}(\mathfrak{h} + \lambda) + \tfrac{2\delta f g t}{aa} \text{ fin.}(\zeta + \lambda),$$

quarum refolutio vereor ne fruftra fufcipiatur. Cum autem ad quoduis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari affignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo defideratur, fufficere poteft, eo magis mirum videtur, quod motus fingulorum globi punctorum quafi vires analyfeos fuperet. Multo minus igitur de motu globorum, in quibus momenta inertiae non funt aequalia, quicquam definire licebit.

Problema VI.

§. 18. *Si globo, cuius omnia momenta inertiae funt inter fe aequalia, motus quicunque fuerit impreffus, affignare temporis punctum, vbi celeritas radens, ideoque et frictio euanefcit, indeque globus motu vniformi progredi pergit.*

Solutio.

Supra §. 2. vidimus, vt attritus euanefcat, has duas conditiones requiri: alteram $\mathfrak{v}$ fin. s cof. $\theta = 0$, alteram $v = f\mathfrak{v}$ fin. s fin. θ, feu in expreffione

$$\text{tang. } \xi = \frac{f\mathfrak{v} \text{ fin. } s \text{ cof. } \theta}{v - f\mathfrak{v} \text{ fin. } s \text{ fin. } \theta},$$

tam numeratorem quam denominatorem fimul euanefcere debere. Cum autem inuenerimus

$$\text{tang. } \xi = \frac{e \text{ fin. } \zeta}{e \text{ cof. } \zeta + 2\delta g t},$$

vbi numerator e fin. ζ eft conftans, fi in illa forma numerator euanefcat, pofitio cof. $\theta = 0$ tempus quaefitum declarabit.

Verum

Verum idem luculentius determinabimus, si ad quoduis tempus elapsum t celeritatem radentem w inuestigemus. Cum igitur ex valore §. 17. inuento: $\text{sin.}\, \xi = -\frac{\vartheta f\, \text{sin.}\, s\, \text{cos.}\, \theta}{w}$ habeamus

$$w = \frac{-\vartheta f\, \text{sin.}\, s\, \text{cos.}\, \theta}{\text{sin.}\, \xi},$$

quae expressio ob $\vartheta\, \text{sin.}\, s = \frac{e\, \text{sin.}\, \zeta}{f\, \text{cos.}\, (\xi - \theta)}$ abit in hanc:

$$w = \frac{-e\, \text{sin.}\, \zeta\, \text{cos.}\, \theta}{\text{sin.}\, \xi\, \text{cos.}\, (\xi - \theta)}:$$

atque ob $\theta = \xi - (\xi - \theta)$ in hanc:

$$w = -e\, \text{sin.}\, \zeta\, (\text{cot.}\, \xi + \text{tang.}\, (\xi - \theta));$$

si hic pro tang. ξ et tang. $(\xi - \theta)$ valores supra inuentos substituamus, reperiemus:

$$w = -(e\, \text{cos.}\, \zeta + 2\delta g t + e\, \text{sin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{aa}).$$

At vero est

$$\text{cos.}\, \zeta + \text{sin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\text{cos.}\, \mathfrak{h}}{\text{cos.}\, (\zeta - \mathfrak{h})} \text{ et}$$
$$\text{cos.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = -\frac{e\, \text{cos.}\, \mathfrak{h}}{k}, \text{ vnde fit}$$
$$e\, \text{cos.}\, \zeta + e\, \text{sin.}\, \zeta\, \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) = -k,$$

vbi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapso tempore t habebimus celeritatem radentem

$$w = k - 2\delta g (1 + \frac{ff}{aa}) t,$$

ita vt ea labente tempore vniformiter decrescat, tandem ergo certe euanescat, id quod eueniet elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g (aa + ff)}$, eritque tum $\text{cos.}\, \theta = 0$ et $\theta = 90° = PZO$. Quod ergo cum euenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes se sint habiturae, et quoniam

 $2\delta g t$

$$2\delta g t = \frac{aak}{aa+ff} \text{ erit}$$

$$\text{tang.}\, \Phi = \frac{aak \,\text{fin.}\, \zeta}{e(aa+ff)+aak\,\text{cof.}\,\zeta} \text{ et}$$

$$\text{tang.}\, \xi = \frac{e(aa+ff)\,\text{tang.}\,\zeta}{e(aa+ff)+aak},$$

hinc fit $\mathfrak{s}\,\text{fin.}\, s = \frac{e\,\text{fin.}\,\zeta}{f\,\text{fin.}\,\xi}$. Cum autem fit

$$v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\,\text{cof.}\,\zeta}{aa+ff} + \frac{a^4 kk}{(aa+ff)^2}\right)} \text{ erit}$$

$$\text{fin.}\, \Phi = \frac{aak\,\text{fin.}\,\zeta}{(aa+ff)v}, \quad \text{cof.}\, \Phi = \frac{e(aa+ff)+aak\,\text{cof.}\,\zeta}{(aa+ff)v},$$

atque $\text{fin.}\,\xi = \frac{e\,\text{fin.}\,\zeta}{v}$ ideoque $\mathfrak{s}\,\text{fin.}\, s = \frac{v}{f}$. Porro quia eſt $\mathfrak{s}\,\text{cof.}\, s = \varepsilon\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}$, erit $\text{tang.}\, s = \frac{v}{\varepsilon f\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}}$ et

$$\mathfrak{s} = \sqrt{\left(\frac{vv}{ff} + \varepsilon\varepsilon\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}^2\right)},$$

ſiue ſubſtituto valore v:

$$\mathfrak{s} = \frac{\sqrt{(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}^2)}}{aa+ff}$$

ob $kk = ee - 2\varepsilon ef\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}^2$.

Corollarium 1.

§. 19. Quo maior ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam ceſſante frictione ad vniformitatem redigatur. Ac ſi globus conſtet ex materia homogenea, fit $aa = \frac{2}{5}ff$, ideoque motus vniformitas incipit elapſo tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. ſec., hinc in hypotheſi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, exiſtente $g = 15\frac{5}{8}$ pedum Rhenanorum.

Corollarium 2.

§. 20. Vt centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, ſtatus initialis ita comparatus eſſe debet, vt ſit $\text{cof.}\,\zeta = -1$ et $e = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $\text{fin.}\,\mathfrak{h} = 1$ et $k = e - \varepsilon f\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} = e - \varepsilon f\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}$

hinc-

hincque ε sin. $\mathfrak{f} = \frac{ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$, fit $s = 0$ et $\mathfrak{v} = \varepsilon \cos. \mathfrak{f}$, qua celeritate angulari iam globus circa axem verticalem quiescentem gyrabitur, elapso ab initio tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ min. sec.

Corollarium 3.

§. 21. Hoc autem casu, quo initio est $\mathfrak{h} = 90^\circ$ et $\varepsilon = \frac{-ef}{aa \sin. \mathfrak{f}}$ fit $\zeta = 180^\circ$; $\Phi = 0$; $\xi = 180^\circ$; $\theta = 90^\circ$; $v = e - 2\delta g t$; tum vero habebimus $\mathfrak{v} \cos. s = \frac{-ef \cos. \mathfrak{f}}{aa \sin. \mathfrak{f}}$; $\mathfrak{v} \sin. s = -\frac{ef}{aa}\left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right)$; hincque

$$\text{tang. } s = \left(1 -- \frac{2\delta g t}{e}\right) \text{tang. } \mathfrak{f} \text{ et}$$

$$\mathfrak{v} = \frac{-e}{aa \sin. \mathfrak{f}} \sqrt{\left(1 - \frac{4\delta g t}{e} \sin. \mathfrak{f} + \frac{4\delta\delta g g t t}{ee} \sin. \mathfrak{f}^2\right)}.$$

At initio erat celeritas radens $k = e\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)$, elapso autem tempore t ea est $w = \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)(e - 2\delta g t)$, sicque posito $t = \frac{e}{2\delta g}$ simul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, vt ante.

Corollarium 4.

§. 22. Ne valor $\mathfrak{v} \sin. s = \frac{e \sin. \zeta}{s \cos. (\xi - \theta)}$ indefinitus videatur, quod fit si numerator ac denominator euanescant, seu $\zeta = 0$, conueniet loco sin. ζ et cos. $(\xi - \theta)$ valores ex superioribus substitui,, atque hinc reperietur:

$$\mathfrak{v} \sin s = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon \sin. \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin. \mathfrak{f}(\varepsilon f \sin. \mathfrak{f} - e \sin. \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)},$$

vnde ob $\mathfrak{v} \cos. s = \varepsilon \cos. \mathfrak{f}$ prodit

$$\mathfrak{v}\mathfrak{v} = \varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin. \mathfrak{f}(\varepsilon f \sin. \mathfrak{f} - e \sin. \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}.$$

Corollarium 5.

§. 23. Cum ſit vis viua globi $= M(vv + aa\vartheta\vartheta)$, erat ea initio $= M(ee + eeaa)$; elapſo autem tempore t ea erit $= M(ee + \varepsilon\varepsilon aa - 4\delta gkt + 4(1 + \frac{ff}{aa})\delta\delta ggtt)$. At elapſo tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, vis viua fiet

$$\frac{M(eeff + 2\varepsilon e aaf\,\sin.\mathfrak{f}\,\sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa + ff\cos.\mathfrak{f}^2))}{aa + ff},$$

cuius defectus ab initiali eſt

$$\frac{M aa(ee - 2\varepsilon ef\,\sin.\mathfrak{f}\,\sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\sin.\mathfrak{f}^2)}{aa + ff} = \frac{M aakk}{aa + ff},$$

ita vt iſta vis viua ſit

$$M(ee + \varepsilon\varepsilon aa - \frac{aakk}{aa + ff}).$$

Scholion.

Tab. IV. Fig. 2. §. 24. Ex his ergo formulis totus globi motus aſſignari poteſt, quicunque motus ei initio fuerit impreſſus. Interim tamen hae formulae non parum ſunt complexae, vnde ad clariorem explicationem haud abs re erit caſus quosdam magis notabiles euoluere. Cuiusmodi ſunt, vti iam ſupra innuimus, duo potiſſimum: alter quo arcus ZO initio erat quadrans; alter vero quo angulus $DZO = \mathfrak{h}$ erat rectus: vtrumque igitur ſeorſim explicemus.

Problema VII.

§ 25. *Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impreſſus, praeter motum progreſſiuum definire continuationem motus.*

Solutio.

Solutio.

Cum initio axis gyrationis fuerit horizontalis, erit $f = ZO = 90^\circ$. Denotante ergo e celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem circa axem IO, in sensum ZETD, sit pro puncto O angulus $DZO = \mathfrak{h}$, manente f radio globi et Maa momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens

$$k = \sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff)}$$

et pro eius directione IQ angulus $DZQ = \zeta$, vt sit

$$\sin.\zeta = \frac{-\varepsilon f \cos.\mathfrak{h}}{k} \text{ et } \cos.\zeta = \frac{\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - e}{k}.$$

His pro statu initiali constitutis, elapso tempore t centrum globi descripserit viam GI, vt iam sit in I, vbi eius celeritas secundum IR erit Tab. IV. Fig. 3.

$$v = \sqrt{(ee + \frac{4\delta egt(\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - e)}{k} + 4\delta\delta ggtt)},$$

vnde positis coordinatis $GX = X$, et $XI = Y$, ob

$$\text{tang.} EIR = \text{tang.}\Phi = \frac{-2\delta\varepsilon fgt \cos.\mathfrak{h}}{ek + 2\delta gt(\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - e)}$$

erit

$$dX = \varepsilon dt + \frac{2\delta gtdt}{k}(\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - e) \text{ et}$$

$$dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgtdt \cos.\mathfrak{h}}{k}, \text{ ideoque}$$

$$GX = X = \varepsilon t + \frac{\delta gtt}{k}(\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - e) \text{ et}$$

$$XI = Y = -\frac{\delta\varepsilon fgtt}{k} \cos.\mathfrak{h}.$$

Tum vero pro motu gyratorio, qui iam fiat in sensum Fig. 2. ZETD celeritate angulari $= \varkappa$ circa polum O, existente $ZO = s$, $PZO = \theta$ et $DZQ = \Phi + \xi$, vbi IQ refert directionem celeritatis radentis, quia constanter est $\Phi + \xi = \zeta$, seu directio IQ constans, erit

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{-\varepsilon f \cos.\mathfrak{h}}{\varepsilon f \sin.\mathfrak{h} - ee + 2\delta gkt} \text{ et}$$

$$\text{tang.}(\xi - \theta) = \frac{2f - e\sin.\mathfrak{h}}{e\cos.\mathfrak{h}} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon eaa\cos.\mathfrak{h}},$$

vnde ambo anguli ξ et θ definiuntur. Vel erit

$$\text{tang.}(\Phi + \theta) = \frac{\varepsilon aak\sin.\mathfrak{h} + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin.\mathfrak{h})}{\varepsilon aak\cos.\mathfrak{h} - 2\delta\varepsilon ffgt\cos.\mathfrak{h}}.$$

Celeritas autem radens secundum directionem IQ est

$$w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t.$$

Tum vero ob $\vartheta\cos.s = 0$ erit arcus $ZO = s$ quadrans et

$$\vartheta = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin.\mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)}.$$

Hic autem motus inaequabilis tantum durabit per tempus $t = \frac{aak}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapso est $s = 90°$,

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{-\varepsilon aaf\cos.\mathfrak{h}}{e(aa + ff) + aa(\varepsilon f\sin.\mathfrak{h} - e)} = \frac{-\varepsilon aa\cos.\mathfrak{h}}{ef + \varepsilon aa\sin.\mathfrak{h}}$$

$$= \sqrt{\left(ee + \frac{2aae(\varepsilon f\sin.\mathfrak{h} - e)}{aa + ff} + \frac{a^4kk}{(aa + ff)^2}\right)};$$

$$\vartheta = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{(eeff + 2\varepsilon eaaf\sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4)}}{aa + ff}$$

substituto pro kk valore. Tum autem fit angulus $\theta = 90°$ et $\sin.\xi = \frac{e\sin.\zeta}{v}$.

Corollarium 1.

§. 26. Si initio fuerit angulus $DZO = f = 0$, erit $k = \sqrt{(ee + \varepsilon\varepsilon ff)}$: pro angulo $DZQ = \zeta$ fit $\sin.\zeta = -\frac{\varepsilon f}{k}$ et $\cos.\zeta = \frac{-e}{k}$; tum vero post tempus t prodit

$$v = \sqrt{\left(ee - \frac{4\delta eegt}{k} + 4\delta\delta ggtt\right)}$$

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{-2\delta\varepsilon fgt}{e(k - 2\delta gt)};$$

$$X = et\left(1 - \frac{\delta gt}{k}\right);$$

$$Y = \frac{-\delta\varepsilon fgtt}{k}.$$

tang.

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{\varepsilon e f}{ee - 2\delta g k t};$$
$$\text{tang}\,(\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f}{e} - \frac{2\delta f g k t}{\varepsilon e a a};$$
$$\text{tang.}\,(\Phi + \theta) = \frac{2\delta e f g t}{\varepsilon a a k - 2\delta e f f g t};$$
$$ȣ = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta \varepsilon\varepsilon f f g t}{a a k} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)} \text{ et}$$
$$w = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t.$$

Elapſo autem tempore $t = \frac{a a k}{2\delta g(a a + f f)}$ erit tang. $\Phi = \frac{\varepsilon a a}{e f}$; $v = \frac{f\sqrt{(e e f f + \varepsilon\varepsilon a^4)}}{a a + f f} = f ȣ$; $\theta = 90°$ et

$$\text{tang.}\,\xi = \frac{\varepsilon e f(a a + f f)}{ee(aa + ff) - a a k k)} = \frac{\varepsilon e(a a + f f)}{f(e e - \varepsilon\varepsilon a a)}.$$

Corollarium 2.

§. 27. Si angulus DZO $= \mathfrak{f}$ eſſet $= 180°$, eaedem formulae motum indicabunt ſumta celeritate angulari $ȣ$ negatiua, ſeu motu gyratorio in contrarium verſo. At ſi ſit $\varepsilon = 0$, ſeu globo ſolus motus progreſſiuus fuerit impreſſus, fit $k = e$, $\zeta = 180°$, $v = e - 2\delta g t$; $\Phi = 0$, $X = t(e - \delta g t)$, $Y = 0$, $\xi = 180°$; $\theta = 90°$; $ȣ = \frac{2\delta f g t}{a a}$, et elapſo tempore $t = \frac{a a e}{2\delta g(a a + f f)}$ fit $v = \frac{e f f}{a a + f f}$, $ȣ = \frac{e f}{a a + f f}$ et

$$X = \frac{\varepsilon t(a a + 2 f f)}{2(a a + f f)} = \frac{a a e e(a a + 2 f f)}{4\delta g(a a + f f)}.$$

Scholion.

§. 27. Caſus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium eſt adeptus, in genere valet, neque ad vllam hypotheſin angulorum $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{h}$ eſt adſtrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progreſſiuo retardato, motumque paullatim gyratorium accipiet, donec elapſo tempore $t = \frac{a a e}{2\delta g(a a + f f)}$ motum vniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur

mur ad caſum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit, ſine vllo motu progreſſiuo, cuius euolutio eſt facilis. Poſito enim $e = 0$ erit $k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, hincque fit $\sin. \zeta = -\cos. \mathfrak{h}$ et $\cos. \zeta = \sin. \mathfrak{h}$, ergo $\zeta = \mathfrak{h} - 90°$, vbi pro axe gyrationis initio impreſſae I O eſt $ZO = \mathfrak{f}$ et $DZO = \mathfrak{h}$, exiſtente celeritate angulari in ſenſum ZETD $= \varepsilon$. Elapſo ergo tempore t fit $\Phi = \zeta$, ſcilicet ſublato ab angulo $DZO = \mathfrak{h}$ angulo recto PZO, erit PI directio motus progreſſiui, quem globus acquiret, cuius celeritas erit $v = 2 \delta g t$, ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit $\text{tang.} \xi = 0$ et $\text{tang.} (\xi - \theta) = \infty$, ergo ob $\Phi + \xi = \zeta = \mathfrak{h} - 90°$ erit $\xi = 0$ et $\theta = 90°$, hinc $DZO = \zeta + 90° = \mathfrak{h}$, ita vt polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex § 22. eſt

$$\mathfrak{v} \sin. s = \sqrt{\left(e e \sin. \mathfrak{f}^2 - \frac{4 \delta \varepsilon f g t \sin. \mathfrak{f}}{a a} + \frac{4 \delta \delta f f g g t t}{a^4}\right.} = \varepsilon \sin \mathfrak{f} - \frac{2 \delta f g t}{a a})$$

et $\mathfrak{v} \cos. s = \varepsilon \cos. \mathfrak{f}$, vnde fit

$$\text{tang.} s = \text{tang.} \mathfrak{f} - \frac{2 \delta f g t}{\varepsilon a a \cos. \mathfrak{f}},$$

ita vt arcus ZO diminuatur, niſi fuerit quadrans vel eo maior, et

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\left(\varepsilon \varepsilon - \frac{4 \delta \varepsilon f g t \sin. \mathfrak{f}}{a a} + \frac{4 \delta \delta f f g g t t}{a^4}\right)}.$$

Motus autem ad vniformitatem reducetur elapſo tempore $t = \frac{\varepsilon a a f \sin. \mathfrak{f}}{2 \delta g (a a + f f)}$; fitque tum

$$\mathfrak{v} = \frac{\varepsilon \sqrt{(a^4 \sin. \mathfrak{f}^2 + (a a + f f)^2 \cos. \mathfrak{f}^2)}}{a a + f f};$$

$$v = \frac{\varepsilon a a f \sin. \mathfrak{f}}{a a + f f} \quad \text{et} \quad \text{tang.} s = \frac{a a \text{ tang.} \mathfrak{f}}{a a + f f}.$$

Si ergo fuiſſet $\mathfrak{f} = 0$, ſeu globo motus gyratorius circa axem verticalem impreſſus eſſet, ſine vllo motu progreſſiuo, eundem motum ſine vlla mutatione eſſet conſeruaturus.

Problema

Problema VIII.

§. 28. *Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, motus gyratorius fuerit impressus circa axem ad motus progressiui directionem normalem; definire continuationem motus.*

Solutio.

Cum motus progressiui initio impressi directio sit recta DIE, et celeritas $= e$, angulus DZO$=\mathfrak{h}$ est rectus, et sumto $ZO = \mathfrak{f}$ erat O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ in sensum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (e - f \varepsilon \sin. \mathfrak{f})$, vbi valorem positiuum pro k sumi oportet, ita vt hic duo prodeant casus seorsim euoluendi.

Casus primus

Sit $e > \varepsilon f \sin. \mathfrak{f}$, erit $k = e - \varepsilon f \sin. \mathfrak{f}$, quae est celeritas radens initio, eiusque directio IQ, ita vt sit $\sin. DQ = 0$ et $\cos. DQ = -1$, ideoque $DQ = \zeta = 180°$, et Q cadat in E globusque a frictione δM secundum directionem ID constanter retrahatur; vnde statim concluditur globi centrum I in eadem recta DE esse mansurum. Elapso ergo tempore t, ob $\cos. \zeta = -1$, fit celeritas centri $v = e - 2 \delta g t$, et celeritas radens

$$w = e - \varepsilon f \sin. \mathfrak{f} - 2 \delta g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t;$$

tum vero $\Phi = 0$; $\xi = 180°$ atque $\theta = 0$. Quare pro axe gyrationis praesente IO est DIO $= 90°$, et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \mathfrak{v}$ habemus $\mathfrak{v} \cos. s = \varepsilon \cos. \mathfrak{f}$ et ex (§. 22.)

$$\mathfrak{v} \sin. s = \varepsilon \sin. \mathfrak{f} + \frac{2 \delta f g t}{a a},$$

vnde colligitur:

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathfrak{f} + \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \cos.\mathfrak{f}} \text{ et}$$

$$\text{ȣ} = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\delta \varepsilon f g t \sin.\mathfrak{f}}{a a} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right)}.$$

Hoc autem tempore t percurrit centrum I lineam rectam $GX = X = t(e - \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{a a (e - \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g (a a + f f)}$, quo elapso erit spatium

$$X = \frac{a a (e - \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})(e(a a + f f) + \varepsilon a a f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g (a a + f f)^2}$$

et celeritas $v = \frac{f(\varepsilon a^2 f \sin.\mathfrak{f} + e f)}{a a + f f}$. At pro motu gyratorio fit

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathfrak{f} + \frac{f(e - \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})}{\varepsilon(a a + f f)\cos.\mathfrak{f}} = \frac{e f + \varepsilon a a \sin.\mathfrak{f}}{\varepsilon(a a + f f)\cos.\mathfrak{f}},$$

(existente $DIO = 90°$) et celeritas angularis:

$$\text{ȣ} = \frac{\sqrt{(e e f f + 2\varepsilon e f a a \sin.\mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin.\mathfrak{f}^2 - \varepsilon\varepsilon(a a + f f)^2 \cos.\mathfrak{f}^2)}}{a a + f f}.$$

Casus secundus

Sit $e < \varepsilon f \sin.\mathfrak{f}$, seu $k = \varepsilon f \sin.\mathfrak{f} - e$, quae est celeritas radens initio, eiusque directio IQ talis, vt sit $\sin. DQ = 0$, $\cos. DQ = 1$, ergo $DQ = \zeta = 0$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM secundum directionem IE constanter acceleratur, eiusque centrum I in eadem recta IE progreditur, atque elapso tempore t erit celeritas $v = e + 2\delta g t$ et celeritas radens

$$w = \varepsilon f \sin\mathfrak{f} - e - 2\delta g\left(1 + \frac{f f}{a a}\right) t.$$

Tum vero fit $\Phi = 0$ et $\xi = 0$ atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praesenti IO est $DIO = 90°$ et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= \text{ȣ}$ habebimus $\text{ȣ}\cos. s = \varepsilon \cos.\mathfrak{f}$ et $\text{ȣ}\sin. s = \varepsilon\sin.\mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{a a}$, vnde fit

tang.

$$\text{tang.}\, \varsigma = \text{tang.}\, \mathrm{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \cos.\mathrm{f}} \text{ et}$$

$$\vartheta = \sqrt{}\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon f g t \sin.\mathrm{f}}{a a} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{a^4}\right),$$

hoc tempore t centrum globi percurrit lineam rectam $GX = X = t(e + \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum per tempus $t = \frac{a a(\varepsilon f \sin.\mathrm{f} - e)}{2\delta g(a a + f f)}$, quo elapſo erit celeritas $v = \frac{f(e f - \varepsilon a a \sin.\mathrm{f})}{a a + f f}$ et ſpatium

$$X = \frac{a a(\varepsilon f \sin.\mathrm{f} - e)(e(a a + f f) + \varepsilon a a f \sin.\mathrm{f})}{2\delta g(a a + f f)^2}.$$

At pro motu gyratorio reperitur

$$\text{tang.}\, \varsigma = \text{tang.}\, ZO = \frac{e f + \varepsilon a a \sin.\mathrm{f}}{\varepsilon(a a + f f)\cos.\mathrm{f}},$$

(exiſtente perpetuo $DIO = 90°$), et celeritas angularis

$$\vartheta = \frac{\sqrt{}(e e f f + 2\varepsilon e a a f \sin.\mathrm{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin.\mathrm{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(a a + f f)^2 \cos.\mathrm{f}^2)}{a a + f f}.$$

Corollarium 1.

§. 29. Si fuerit $e = \varepsilon f \sin.\mathrm{f}$, globus ſtatim ab initio motum proſequetur vniformem, tam progreſſiuum quam gyratorium, qui caſus limitem conſtituit inter binos tractatus.

Corollarium 2.

§. 30. Ad priorem caſum, quo $e > \varepsilon f \sin.\mathrm{f}$, referendi ſunt ii, quibus ε habet negatiuum valorem, ſeu globo impreſſus fuerit initio motus gyratorius in ſenſum ZDTE. Poſito autem $-\varepsilon$ loco ε, fieri poteſt vt globus reuertatur, antequam ad vniformitatem peruenerit.

Corollarium 3.

§. 31. Caſu hoc quo ε negatiue capitur, ad tempus t habebimus, $\phi = 0$, $\theta = 0$, $\xi = 180°$, $v = e - 2\delta g t$,

S 2 $w =$

$$w = e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f} - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t;$$

$$\text{tang.}\, s = \text{tang.}\, \mathfrak{f} - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon a a \cos.\mathfrak{f}} \text{ et}$$

$$\vartheta = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta \varepsilon f g t \sin.\mathfrak{f}}{aa} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}\right)};$$

at poſt tempus $t = \frac{aa(e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g(aa + ff)}$, percurſo ſpatio

$$X = \frac{aa(e + \varepsilon f \sin.\mathfrak{f})(e(aa + 2ff) - \varepsilon a^2 f \sin.\mathfrak{f})}{2\delta g(aa + ff)^2},$$

globi motus vniformitatem attinget, eritque tum

$$v = \frac{f(ef - \varepsilon a a \sin.\mathfrak{f})}{aa + ff};$$

$$\text{tang.}\, s = \frac{\varepsilon a a \sin.\mathfrak{f} - ef}{\varepsilon(aa + ff)\cos.\mathfrak{f}} \text{ et}$$

$$\vartheta = \frac{\sqrt{(eeff - 2\varepsilon e a a f \sin.\mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin.\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos.\mathfrak{f}^2)}}{aa + ff}.$$

Scholion.

§. 32. Caſus hic praecipue eſt memorabilis, quo globo eiusmodi motus imprimi poteſt, vt primo recedat, mox autem iterum reuertatur, quod experimento oſtendi ſolet, dum digito ad globum circa D applicato et deorſum preſſo duplex motus globo imprimitur, alter progreſſiuus in directione D I E, alter gyratorius in ſenſum Z D T E. Sed vt phaenomenon ſuccedat, neceſſe eſt vt celeritas angularis prae progreſſiua certum quendam limitem excedat, quem quo facilius agnoſcamus, calculum ad iſtum caſum accommodemus quo motus gyratorius globo circa axem horizontalem et ad directionem motus progreſſiui normalem imprimitur. Quod ſi ergo e denotet celeritatem progreſſiuam ſecundum directionem D I E, et ε celeritatem angularem retrogyrantem in ſenſum Z D T E, exiſtente f radio globi et Maa eius momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapſo tempore t eius celeritas ſecundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta g t$, confecto ſpatio

$X =$

$X = t(e - \delta g t)$: tum vero etiamnunc circa eundem axem retrouoluetur celeritate angulari $\upsilon = \varepsilon - \frac{2\delta f g t}{aa}$. Motus autem aequabilis euadit elapſo tempore $t = \frac{aa(e + \varepsilon f)}{2\delta g(aa + ff)}$, eritque tum celeritas progreſſiua $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa)}{aa + ff}$ et angularis $\upsilon = \frac{\varepsilon aa - ef}{aa + ff}$. Quare ſi fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro mouetur, gyratorio motu adhuc retro vergente: ſin autem fuerit $\varepsilon < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio in ſenſum contrarium eſt verſa. Illo caſu globus regredi coepit elapſo tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus ſit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$ et ef exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae ſi vocetur $= h$, erit poſt tempus t celeritas progreſſiua $v = e - 2\delta g t$, et gyratoria in puncto contactus, quae ſit $u = h - 5\delta g t$, et ſpatium percurſum $= t(e - \delta g t)$: motus vero aequabilis euadet elapſo tempore $t = \frac{e + h}{7\delta g}$, et confecto ſpatio $= \frac{(6e - h)(e + h)}{49\delta g}$, vbi erit celeritas progreſſiua $v = \frac{5e - 2h}{7}$ et gyratoria $u = \frac{2h - 5e}{7}$. Vt ergo phoenomenon memoratum ſuccedat, debet eſſe initio $h > \frac{5}{2}e$. Sin autem eſſet $h = \frac{5}{2}e$, vterque motus ſimul extingueretur, elapſo ſcilicet tempore $\frac{e}{2\delta g}$ min. ſec. et confecto ſpatio $\frac{ee}{4\delta g}$.

Concluſiones.

Pro determinatione motus, quo globus quomodocunque impulſus ſuper plano horizontali progreditur.

I. *Status quaeſtionis.* Globus hic ita comparatus ſupponitur, vt non ſolum eius centrum grauitatis in ipſum

ſum figurae centrum incidat, ſed etiam omnia momenta inertiae reſpectu cuiusque diametri inter ſe ſint aequalia. Talis globi radius hic ponitur $= f$, eiusque maſſa ſeu pondus $= M$ et momentum inertiae reſpectu axis cuiuscunque per centrum grauitatis tranſeuntis $= M a a$, ita vt, ſi globus ex materia homogenea conſtet, futurum ſit $aa = \frac{2}{5} ff$. Praeterea vero tam ipſum planum horizontale quam tota globi ſuperficies ita aequaliter laeuigata aſſumitur, vt dum globus ſuper plano radendo ingreditur, vbique eandem frictionem patiatur, quae, cum preſſioni ſeu ipſi ponderi globi ſit proportionalis, hic ſtatuitur $= \delta M$.

Tab. IV. Fig. 1. II. *Status initialis.* Ponamus globum initio in puncto D plano inſiſtere eique motum progreſſiuum ſecundum directionem D O eſſe impreſſum cum ea celeritate, vt globus vno minuto ſecundo ſpatium $= e$ eſſet percurſurus, quae celeritas non tam puncto contactus D quam centro globi impreſſa eſt intelligenda. Tum vero referat circulus A B C D ſectionem verticalem globi ſecundum directionem D O factam, qui ſimul hemiſphaerium globi conuexum nobis obuerſum referat, in quo ſit E polus, circa quem globo motus gyratorius initio fuit impreſſus, cuius celeritas angularis in ſenſum A B C D vergens ſit $= \varepsilon$, ita vt ε deſignet angulum vno minuto ſecundo abſoluendum. Pro ſitu autem huius puncti E ſit B punctum globi ſummum, puncto contactus D diametraliter oppoſitum, vnde per polum E agatur circulus maximus B E et vocetur arcus $BE = \mathfrak{f}$ et angulus $ABE = \mathfrak{h}$; quibus ergo poſitis tota vis viua globo initio impreſſa erit $= M (ee + \varepsilon\varepsilon aa)$. Poſtquam igitur globo talis duplex motus fuerit impreſſus, quaeritur quomodo is deinceps ſit pro-

progreſſurus; ac primo quidem ſtatim duos caſus notaſſe iuuabit, quibus globus eundem motum impreſſum perpetuo eſſet conſeruaturus: Alter ſcilicet caſus tum locum habebit, quando celeritas progreſſiua e fuerit nulla, ſimulque globus circa axem verticalem BD gyretur, ita vt hoc caſu fuerit $BE = \mathfrak{f} = 0$; quia enim tum nulla adeſt frictio, globus perpetuo in eodem loco gyrari perget. Alter vero caſus tum locum habet, quando axis gyrationis fuerit horizontalis ideoque angulus $\mathfrak{h} = 90°$, ſimul vero inſuper $e = \varepsilon f \sin.\mathfrak{f}$, quandoquidem hoc caſu frictio pariter ceſſat. Reliquis autem caſibus omnibus globus ab initio per aliquod tempus motu inaequabili feretur, dum tam motus progreſſiuus quam gyratorius continuo variabitur, hocque temporis interuallum repertum eſt

$$= \frac{aa\sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin.\mathfrak{f} \sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin.\mathfrak{f}^2)}}{2\delta g (aa + ff)},$$

in minutis ſecundis expreſſum, ſiquidem g denotet altitudinem, per quam grauia vno minuto ſecundo delabuntur. Vnde vniuerſus globi motus ſponte in duas partes diſtinguitur, quarum priore motus erit inaequabilis, poſteriore vero aequabilis.

III. *Determinatio partis prioris.* Elapſum nunc ſit ab initio tempus quodcunque indefinitum $= t$ in minutis ſecundis expreſſum, quod autem minus ſit quam limes modo aſſignatus

$$\frac{aa\sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \sin.\mathfrak{f} \sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \sin.\mathfrak{f}^2)}}{2\delta g (aa + ff)},$$

hocque tempore tangat globus planum horizontale in puncto T, ex quo ad rectam fixam DO ducatur normalis TX vocenturque coordinatae $DX = X$, $XT = Y$, pro linea curua DT, per quam punctum contactus hucusque proceſſit, fit, ita vt centrum grauitatis globi fimilem viam defcripfiffe fit cenfendum. Tum vero ponatur angulus quo elementum Tt ad directionem DO inclinatur $= \Phi$, vt fit tang. $\Phi = \frac{dY}{dX}$, ipfa autem celeritas, qua centrum globi hoc momento fecundum Tt ingreditur, vocetur tantisper $= v$, eritque $\frac{dX}{dt} = v$ cof. Φ et $\frac{dY}{dt} = v$ fin. Φ. Hos autem valores demum ex motu gyratorio, qui nunc globo conuenit, determinari oportet, quos mox exhibebimus, poftquam fcilicet motum gyratorium fuerimus contemplati. Hunc in finem fecetur iterum globus plano in T infiftens, plano verticali $MZNT$, illi quod in ftatu initiali confiderauimus parallelo, ita vt circulus $MZNT$ hemifphaerium nunc

Tab IV. Fig. 5. nobis obuerfum repraefentet, in quo punctum O fit polus, circa quem globus nunc gyratur in fenfum $MZNT$ celeritate angulari $= \mathfrak{v}$. His pofitis ifta motus determinatio ita fuccincte proponi poterit: Ex elementis ad ftatum initialem pertinentibus colligatur angulus ζ, vt fit

$$\text{tang.}\, \zeta = \frac{\varepsilon f \,\text{fin.}\, \mathfrak{f} \,\text{cof.}\, \mathfrak{h}}{e - \varepsilon f \,\text{fin.}\, \mathfrak{f} \,\text{fin.}\, \mathfrak{h}},$$

Tab IV. Fig. 4. ex eoque ftatim pro motu progreffiou oritur

$$DX = X = ct + \delta g t t \,\text{cof.}\, \zeta,$$
$$TX = Y = \delta g t t \,\text{fin.}\, \zeta,$$

vnde colligitur celeritas fecundum $DX = \frac{dX}{dt} = e + 2 \delta g t \,\text{cof.}\, \zeta$ et celeritas fecundum XT, fiue $\frac{dY}{dt} = 2 \delta g t \,\text{fin.}\, \zeta$, hincque fit tang. $\Phi = \frac{2 \delta g t \,\text{fin.}\, \zeta}{e + 2 \delta g t \,\text{fin.}\, \zeta}$, et ipfa celeritas progreffiua

$$v = \surd (e e + 4 \delta e g t \,\text{cof.}\, \zeta + 4 \delta \delta g g t t).$$

Pro motu autem gyratorio circa polum O quaeratur angulus η, vt fit

$$\text{tang.}\, \eta = \text{tang.}\, (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2 \delta f f g t}{e a a \,\text{fin.}\, \zeta},$$

hinc-

hincque porro quantitas $q = \frac{e\,\sin.\zeta}{f\cos.\eta\,\xi}$, eritque pro diſtantia huius poli O a puncto globi ſummo Z, tang. $ZO = \frac{a}{\varepsilon\cos.\mathfrak{f}}$, ipſa vero celeritas angularis $\mathfrak{s} = \sqrt{(qq + \varepsilon\varepsilon\cos.\mathfrak{f}^2)}$, denique erit angulus $MZO = \zeta - \eta$. Sicque omnia quae ad motus determinationem requiruntur ſunt definita.

IV. *Determinatio partis poſterioris.* Iam notauimus motum aequabilem incipere elapſo tempore

$$t = \frac{aa\sqrt{(ee - 2e\varepsilon f\sin.\mathfrak{f}\sin.\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\sin.\mathfrak{f}^2)}}{2\delta g(aa + ff)}.$$

Quod ſi ergo hic valor loco t ſubſtituatur, coordinatae X et Y dabunt punctum in curua DT, quod ſit K, vbi motus aequabilis incipiet. Introducto autem angulo ζ erit tempus illud $t = -\frac{aa\varepsilon f\sin.\mathfrak{f}\cos.\mathfrak{h}}{2\delta g(aa + ff)\sin.\zeta}$, vbi notetur ſin. ζ eſſe negatiuum. Cum igitur corpus vsque ad punctum K peruenerit, erit eius celeritas progreſſiua in directione DT Tab IV. Fig. 4.

$$= e - \frac{aa\varepsilon f\sin.\mathfrak{f}\cos.\mathfrak{h}\cos.\zeta}{(aa + ff)\sin.\zeta} = \frac{eff - aa\varepsilon f\sin.\mathfrak{f}\sin.\mathfrak{h}}{aa + ff},$$

et celeritas in directione LK

$$= -\frac{aa\varepsilon f\sin.\mathfrak{f} - e\cos.\mathfrak{h}}{aa + ff}.$$

Pro motu autem gyratorio deinceps ſequente habebimus primo

$$\text{tang.}\,\eta = \text{tang.}\,(\zeta - \mathfrak{h}) - \frac{f^3\varepsilon\sin.\mathfrak{f}\cos.\mathfrak{h}}{e(aa + ff)\sin.\zeta^2},$$

$$\text{tang.}\,\eta = -\frac{e(aa + ff) - aak}{e(aa + ff)\,\text{tang.}\,\zeta},$$

vnde innoteſcit pro noſtro tempore angulus $MZO = \zeta - \eta$. Porro vero pro eodem tempore, vbi contactus fit in puncto K, celeritas centri inuenta eſt

$$v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\cos.\zeta}{aa + ff} + \frac{a^4kk}{(aa + ff)^2}\right)},$$

inclinatio autem directionis motus in K ad rectam fixam

DO, quae in genere erat Φ, nunc fiet

$$\text{tang.}\,\Phi = \frac{aak\,\text{fin.}\,\zeta}{e(aa+ff)+aak\,\text{cof.}\,\zeta},$$

vnde cognofcitur motus progreffiuus, quo globus poft hoc tempus vniformiter progredietur. Pro polo autem gyrationis O iam vidimus effe angulum MZO $= \zeta - \eta$; praeterea vero inuenimus tang. ZO $= \frac{v}{\varepsilon f\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}}$, et ipfam celeritatem gyratoriam:

$$\text{ȣ} = \frac{\sqrt{(eeff + 2e\varepsilon aaf\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon a^4\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}^2)}}{aa+ff}$$

hunc ergo motum gyratorium globus pofthac perpetuo conferuabit. Cum autem globus ad hanc vniformitatem peruenerit, erit eius vis viua

$$= \frac{M(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa+ff)\,\text{cof.}\,\mathfrak{f}^2)}{aa+ff},$$

quae deficit ab initiali quantitate

$$\frac{Maa(ee - 2\varepsilon ef\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin.}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}^2)}{aa+ff} = \frac{Maakk}{aa+ff},$$

vbi breuitatis gratia pofuimus

$$kk = ee - 2\varepsilon ef\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}\,\text{fin}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}^2.$$

Pro hoc motu vniformi notaffe iuuabit fore angulum MZO $= \zeta - \eta = 90° + \Phi$, tum vero $v = f\,\text{ȣ}\,\text{fin.}\,s$, quibus ergo formulis conditio motus aequabilis continetur.

Additamentum.

Praeterea cafus hic imprimis notatu dignus videtur quo globo initio nullus plane motus progreffiuus fuit impreffus, ita vt fit $e = 0$; tum enim erit tang $\zeta = -\text{cot.}\,\mathfrak{h}$ ideoque $\zeta = 90° + \mathfrak{h}$ et $k = \varepsilon f\,\text{fin.}\,\mathfrak{f}$: tum vero pro via defcripta erit $X = \delta gtt\,\text{cof.}\,\zeta$ et $Y = \delta gtt\,\text{fin}\,\zeta$; vnde patet, hanc viam effe lineam rectam ad axem DO fub angulo

gulo $= \zeta$ inclinatam. Praeterea vero erit

$$v \,\text{cof.}\, \Phi = 2\delta g t \,\text{cof.}\, \zeta \;\text{ et }\; v \,\text{fin.}\, \Phi = 2\delta g t \,\text{fin.}\, \zeta,$$

vnde colligitur tang. $\Phi =$ tang. ζ ideoque $\Phi = \zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$, tum vero ipfa celeritas $v = 2\delta g t$. Deinde pro motu gyratorio erit tang. $\eta =$ tang $(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{ea u \,\text{fin.}\, \zeta}$, vbi quia $\zeta - \mathfrak{h} = 90^\circ$, erit tang. $\eta = \infty$, ideoque $\eta = 90^\circ$, confequenter angulus $MZO = \zeta - \eta = \mathfrak{h}$; vnde patet, polum gyrationis O perpetuo in eodem circulo verticali manere. Cum igitur fit

$$\mathfrak{v} \,\text{cof.}\, \mathfrak{s} = \varepsilon \,\text{cof}\, \mathfrak{f} \;\text{ et }\; \mathfrak{v} \,\text{fin.}\, \mathfrak{s} = \frac{2\delta g t}{e},$$

colligitur

$$\text{tang.}\, \mathfrak{s} = \frac{2\delta g t}{\varepsilon f \,\text{cof.}\, \mathfrak{f}} \;\text{ et }\; \mathfrak{v} = \sqrt{\left(\varepsilon\varepsilon \,\text{cof.}\, \mathfrak{f} + \frac{4\delta\delta gg ff tt}{a^4}\right)};$$

hincque motus inaequabilis durabit per temporis fpatium $t = \frac{\varepsilon aaf \,\text{fin.}\, \mathfrak{f}}{2\delta g (aa + ff)}$, quo elapfo erit $v = \frac{\varepsilon aaf \,\text{fin.}\, \mathfrak{f}}{aa + ff}$, manente $\Phi = \zeta = 90^\circ + \mathfrak{h}$. Porro etiamnunc erit angulus $MZO = \mathfrak{h}$, at tang. $\mathfrak{s} = \frac{aa}{aa + ff}$ tang. $\mathfrak{f}$ et

$$\mathfrak{v} = \frac{\varepsilon \sqrt{(a^4 \,\text{fin.}\, \mathfrak{f}^2 + (aa + ff)^2 \,\text{cof.}\, \mathfrak{f}^2)}}{aa + ff}.$$

ACCVRATIOR EVOLVTIO FORMVLARVM PRO FILORVM FLEXIBILIVM AEQVILIBRIO ET MOTV INVENTARVM.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Tab. IV. Fig. 6. Propositum sit filum quodcunque flexile $EZzF$, siue elasticitate praeditum siue destitutum, quod situm teneat in figura repraesentatum, quem, quatenus non in eodem plano continetur, referamus more solito ad ternos axes fixos OA, OB, OC inter se normales. Tum pro quouis fili puncto Z constitutis ternis coordinatis OX, XY, YZ, vocemus $OX = x$, $XY = y$, $Yz = z$; tum vero ipsa portio fili EZ vocetur $= s$, vt sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Praeterea vero consideretur crassities fili vtcunque variabilis atque elementi $Zz = ds$ statuatur massula $= S\,ds$; ita vt S sit functio quaecunque data ipsius s. His positis fili elementum $Zz = ds$ sollicitetur a tribus viribus secundum directiones axibus parallelas, quae sint: $ZP = P$, $ZQ = Q$, $ZR = R$, elasticitas autem absoluta in loco Z designetur littera G, quae pro indole fili poterit esse vel constans vel vtcunque variabilis ab arcu s pendens.

§. 2.

§. 2. Quodsi iam istud filum fuerit in aequilibrio, tres sequentes aequationes sunt erutae:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G\,(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G\,(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G\,(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Hae autem tres aequationes ita a se inuicem pendent, vt binae iam tertiam in se inuoluant, ita vt sufficiat binas earum tantum resoluisse, quippe quibus totus status aequilibrii iam perfecte determinatur.

§. 3. Praeterea vero si tensio fili in puncto Z ponatur $= T$, pro eius determinatione inuenta est haec formula:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy}{ds}\int Q\,ds - \frac{dz}{ds}\int R\,ds.$$

Tensio autem ista T exprimet eam vim, qua punctum Z secundum tangentem versus E trahi deberet ad aequilibrium conseruandam, si portio antecedens fuisset resciffa.

§. 4. Sin autem filum in motu versetur atque elapso tempore t, quod semper in minutis secundis exprimi assumimus, situm habeat in figura repraesentatum, tum ternae coordinatae x, y, z tanquam functiones binarum variabilium, scilicet arcus $EZ = s$ et temporis t spectari debent. Tum autem denotante g altitudinem ex qua grauia vno minuto secundo delabuntur, ex viribus sollicitantibus P, Q, R quaerantur sequentes valores deriuati:

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);$$

$$Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);$$

$$R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right);$$

vbi formulae $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$, tantum ex variabilitate temporis t ſunt determinandae, arcu s pro conſtante habito. Quo facto iſti valores P′, Q′, R′ denuo vt functiones tantum ipſius s ſpectentur et in ſuperioribus formulis loco P, Q, R ſcribantur, vt prodeant ſequentes aequationes:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds - \frac{1}{2g}\int dy \int S\,ds\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + \frac{1}{2g}\int dx \int S\,ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds - \frac{1}{2g}\int dz \int S\,ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{2g}\int dy \int S\,ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds - \frac{1}{2g}\int dx \int S\,ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + \frac{1}{2g}\int dz \int S\,ds\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Iidem vero valores loco P, Q, R in formula pro tenſione T data ſubſtituti praebebunt tenſionem durante motu, quae ergo erit

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy}{ds}\int Q\,ds - \frac{dz}{ds}\int R\,ds + \frac{dx}{2g\,ds}\int S\,ds\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) + \frac{dy}{2g\,ds}\int S\,ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{dz}{2g\,ds}\int S\,ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

§. 5. Quanquam autem in his formulis omnes plane motus, qui huiusmodi filis a viribus quibuscunque induci poſſunt continentur: tamen maxime dolendum eſt, ob defectum analyſeos vix vllum fructum ex iis adhuc percipi potuiſſe. Quicquid enim mihi quidem inde elicere licuit ad motus reciprocos et quaſi infinite paruos reſtringitur, cuiusmodi ſunt motus chordarum, laminarum elaſticarum et oſcillationes funium libere ſuſpenſorum, vnde etiamnunc ſuperfluum foret iſtas formulas diligentius euolvere,

vere, praeterquam quod tam arcto nexu cum formulis pro aequilibrio cohaerent, vt non difficile sit, quicquid de his reperietur, etiam ad illas transferre.

§ 6. Deinde vero etiam hoc loco elasticitatem fili seponam et tantum statum aequilibrii filorum perfecte flexibilium plenius sum inuestigaturus, quo facilius formulae inuentae ad omnes plane casus accommodari queant. Hoc modo tantum habebimus tres aequationes sequentes:

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds = \int dx \int Q\,ds;$$
$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds;$$
$$\text{III. } \int dx \int R\,ds = \int dz \int P\,ds;$$

quibuscum coniungamus formulam pro tensione datam:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy}{ds}\int Q\,ds - \frac{dz}{ds}\int R\,ds.$$

Illae igitur aequationes differentiatae praebent istae:

$$\text{I. } dy \int P\,ds = dx \int Q\,ds,$$
$$\text{II. } dz \int Q\,ds = dy \int R\,ds,$$
$$\text{III. } dx \int R\,ds = dz \int P\,ds.$$

§. 7. Quod si harum trium aequationum prima ducatur in dz, secunda in dx, ac tertia in dy, eae inuicem additae producent aequationem $0 = 0$, quae, cum sit identica, declarat in binis aequationibus tertiam iam contineri, quaemadmodum iam supra monuimus Hinc autem trium formularum integralium $\int P\,ds$, $\int Q\,ds$, $\int R\,ds$ binae quaelibet per tertiam definiri possunt, atque hinc habebimus

$$\int Q\,ds = \frac{dy}{dx}\int P\,ds \quad \text{et} \quad \int R\,ds = \frac{dz}{dx}\int P\,ds.$$

Simi-

Simili modo per formulam $\int Q\,ds$ erit

$$\int P\,ds = \frac{dx}{dy}\int Q\,ds \quad \text{et} \quad \int R\,ds = \frac{dz}{dy}\int Q\,ds.$$

Porro vero per $\int R\,ds$ fiet

$$\int P\,ds = \frac{dx}{dz}\int R\,ds \quad \text{et} \quad \int Q\,ds = \frac{dy}{dz}\int R\,ds.$$

§. 8. Hinc igitur tensionem T per quamlibet harum formularum integralium, exclusis binis reliquis, exprimere poterimus. Primo enim erit per formulam $\int P\,ds$:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy^2}{ds\,dx}\int P\,ds - \frac{dz^2}{ds\,dx}\int P\,ds = -\frac{ds}{dx}\int P\,ds,$$

propter $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Eodem modo per formulam $\int Q\,ds$ reperiemus quoque $T = -\frac{ds}{dy}\int Q\,ds$ et per formulam $\int R\,ds$, $T = -\frac{ds}{dz}\int R\,ds$.

§. 9. Quod si ergo tensionem T tanquam datam spectemus, nostrae formulae integrales ita definientur vt sit

$$\int P\,ds = -\frac{T\,dx}{ds},$$
$$\int Q\,ds = -\frac{T\,dy}{ds},$$
$$\int R\,ds = -\frac{T\,dz}{ds},$$

ex quarum differentiatione, si elementum ds constans capiamus, ipsas vires sollicitantes $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$, ex tensione T definire licebit hoc modo:

$$P\,ds = -\frac{dT\,dx - T\,ddx}{ds};$$
$$Q\,ds = -\frac{dT\,dy - T\,ddy}{ds};$$
$$R\,ds = -\frac{dT\,dz - T\,ddz}{ds};$$

atque hinc porro concludimus fore:

P $d x$

$$P\,dx = -\frac{dT\,dx^2}{ds^2} - \frac{T\,dx\,ddx}{ds^2};$$
$$Q\,dy = -\frac{dT\,dy^2}{ds^2} - \frac{T\,dy\,ddy}{ds^2};$$
$$R\,dz = -\frac{dT\,dz^2}{ds^2} - \frac{T\,dz\,ddz}{ds^2};$$

quae tres formulae coniunctae, cum ſit $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, hincque $dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz = 0$, ob ds conſtans, fient $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dT$.

§. 10. Euidens autem eſt hanc formulam $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, exprimere vim tangentialem, qua elementum ds ſecundum ipſam directionem Zz a ternis viribus $P\,ds$, $Q\,ds$, $R\,ds$ ſollicitatur. Quod ſi ergo hanc vim tangentialem deſignemus per $\Theta\,ds$, vt $\Theta\,ds = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, erit vtique $dT = -\Theta\,ds$, ideoque $T = C - \int \Theta\,ds$, quemadmodum ex natura rei conſtat, quandoquidem tenſio ſemper aequatur ſummae omnium virium tangentialium; ſicque viciſſim ex vi tangentiali $\Theta\,ds$ et tenſione T innoteſcent ternae vires ſollicitantes

$$P\,ds = +\Theta\,dx - \frac{T\,ddx}{ds};$$
$$Q\,ds = +\Theta\,dy - \frac{T\,ddy}{ds};$$
$$R\,ds = +\Theta\,dz - \frac{T\,ddz}{ds};$$

§. 11. Quod ſi iam praeter vim tangentialem $\Theta\,ds$ etiam vim normalem in calculum introducere velimus, eamque ponamus $= \Pi\,ds$, cuius directio non ſolum ad elementum Zz normalis eſt intelligenda, ſed etiam ad planum, in quo duo elementa contigua ſunt ſita, ita vt omnes vires ſollicitantes iunctim ſumtae ad has duas vires $\Theta\,ds$ et $\Pi\,ds$ reuocentur: quoniam vis tribus viribus ſollicitantibus $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$ aequiualens eſt

$ds\,\sqrt{(P^2+Q^2+R^2)}$, at vero vires normalis et tangentialis $\Pi\,ds$ et $\Theta\,ds$ reducuntur ad hanc vnicam: $ds\,\sqrt{(\Pi^2+\Theta^2)}$; necesse est vt fiat $\sqrt{(\Pi^2+\Theta^2)} = \sqrt{(P^2+R^2+Q^2)}$ ideoque $\Pi^2 = P^2+Q^2+R^2-\Theta^2$, siue

$$\Pi\,\Pi\,ds^2 = (P\,P+Q\,Q+R\,R)\,ds^2 - \Theta\,\Theta\,ds^2.$$

§. 12. Supra autem vidimus esse

$$\Theta\,ds = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

vnde fit

$$\Theta\,\Theta\,ds^2 = P\,P\,dx^2 + Q\,Q\,dy^2 + R\,R\,dz^2 + 2\,P\,Q\,dx\,dy + 2\,P\,R\,dx\,dz + Q\,R\,dy\,dz.$$

Tum vero loco ds^2 valorem suum $dx^2+dy^2+dz^2$ substituendo erit

$$(P\,P+Q\,Q+R\,R)\,ds^2 = \begin{cases} +(P\,P+Q\,Q+R\,R)\,dx^2 \\ +(P\,P+Q\,Q+R\,R)\,dy^2 \\ +(P\,P+Q\,Q+R\,R)\,dz^2, \end{cases}$$

vnde si subtrahatur $\Theta^2\,ds^2$, remanebit

$$\Pi\,\Pi\,ds^2 = (Q\,Q+R\,R)\,dx^2 + (P\,P+R\,R)\,dy^2 + (P\,P+Q\,Q)\,dz^2 - 2\,P\,Q\,dx\,dy - 2\,P\,R\,dx\,dz - 2\,Q\,R\,dy\,dz,$$

quae expressio manifesto reducitur ad summam trium sequentium quadratorum:

$$\Pi\,\Pi\,ds^2 = (P\,dy - Q\,dx)^2 + (Q\,dz - R\,dy)^2 + (R\,dx - P\,dz)^2.$$

§. 13. Cum igitur supra inuenerimus

$$P = \frac{\Theta\,dx}{ds} - \frac{T\,ddx}{ds^2};$$

$$Q = \frac{\Theta\,dy}{ds} - \frac{T\,ddy}{ds^2};$$

$$R = \frac{\Theta\,dz}{ds} - \frac{T\,ddz}{ds^2},$$ erit

P dy

$$P\,dy - Q\,dx = -\frac{T(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^2},$$
$$Q\,dz - R\,dy = -\frac{T(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^2},$$
$$R\,dx - P\,dz = -\frac{T(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^2},$$

quarum formularum quadrata inuicem addita praebebunt:

$$\Pi\Pi\,ds^2 = \frac{TT}{ds^4}\left\{\begin{array}{l} +(dy\,ddx - dx\,ddy)^2 \\ +(dz\,ddy - dy\,ddz)^2 \\ +(dx\,ddz - dz\,ddx)^2 \end{array}\right\}.$$

§. 14. Quod si autem radius osculi curuae in puncto Z dicatur r, qui cadit in planum duorum elementorum contiguorum, alia occasione ostensum est esse

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dy\,ddx - dx\,ddy)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dx\,ddz - dz\,ddx)^2}}$$

ergo radio osculi introducto erit $\Pi\Pi\,ds^2 = \frac{TT\,ds^2}{rr}$, ideoque $\Pi = \frac{T}{r}$, ita vt hoc modo simplicissime vis normalis ex sola tensione et radio osculi definiatur, dum vis tangentialis, vti ante inuenimus, est $\Theta = -\frac{dT}{ds}$.

§. 15. Quando ergo agitur de aequilibrio fili perfecte flexilis, cui in singulis elementis ds applicatae sint binae vires, altera tangentialis $= \Theta\,ds$, altera normalis $= \Pi\,ds$, quarum quidem haec cadat in planum in quo filum hoc loco incuruatur, praeterea vero tensio in hoc loco ponatur $= T$; tum status aequilibrii his duabus aequationibus determinatur; 1°). $T = \Pi r$ et 2°.) $dT = -\Theta ds$. Quare cum ex priore sit $dT = \Pi\,dr + r\,d\Pi$, elisa tensione T pro aequilibrio habebitur haec vnica aequatio: $r\,d\Pi + \Pi\,dr + \Theta\,ds = 0$; vnde si ambae vires Π et Θ per elementa curuae fuerint datae, haec aequatio naturam curuae determinabit. Sin autem ipsa curua fuerit data

 cum

cum altera harum virium, inde altera reperietur. Veluti si data sit vis Π, erit

$$\Theta = -\frac{r\,d\,\Pi - \Pi\,dr}{ds} = -d.\frac{\Pi r}{ds};$$

sin autem altera Θ fuerit data, tum erit $\Pi = -\int \frac{\Theta ds}{r}$.

§. 16. Hinc iam facillime problema non ita pridem tractatum, quo quaerebatur status aequilibrii funis corpori cylindrico circumplicati et vtrinque a viribus tensi, multo generalius resolui poterit. Quando scilicet totus funis non in eodem plano versatur, atque etiam corpori cuiuscunque figurae fuerit circumuolutus, ita vt figura funis sit cognita; tum si frictio se habeat ad pressionem vt λ ad 1, ita vt sit $\Theta = \lambda\,\Pi$, prior aequatio statim praebet $r\,d\,\Pi + \Pi\,d\,r + \lambda\,\Pi\,d\,s = 0$, vnde fit

$$\frac{d\,\Pi}{\Pi} + \frac{dr}{r} + \frac{\lambda\,ds}{r} = 0,$$

vbi cum $\frac{ds}{r}$ denotet angulum elementarem, quo bina elementa proxima incuruantur, si ponamus $\int \frac{ds}{r} = \Phi$, habebimus integrando $\Pi\,r\,e^{\lambda\Phi} = C$, ideoque $\Pi = \frac{C\,e^{-\lambda\Phi}}{r}$, hinc $\Theta = \frac{\lambda\,C\,e^{-\lambda\Phi}}{r}$ et ipsa funis tensio $T = C\,e^{\lambda-\Phi}$. Quod si ergo in altero termino, vbi $\Phi = 0$, vis tendens fuerit $= M$, in altero autem termino, vbi $\Phi = \theta$, vis tendens $= N$: habebimus $M = C$, deinde $N = C\,e^{-\lambda\theta}$; vnde patet constantem C esse debere $= M$, ita vt $N = M\,e^{-\lambda\theta}$. Haec ergo solutio non solum conuenit cum ea quae nuper est inuenta, sed etiam multo patet latius.

§. 17. Quando autem funis corpori cuiuscunque figurae circumplicatur, cuius quidem superficies sit laeuigata, funis tensus super ea ad aliam figuram se componere nequit, nisi quae sit breuissima inter suos terminos. Ne igitur opus sit hanc limitationem adiungere, res ita concipi potest, quasi funis per canalem in superficie excauatum circumduceretur, cui proinde figuram quamcunque tribuere licebit. Praeterea vero si totus funis in eodem plano esset applicatus, tum $\int \frac{ds}{r} = \Phi$ designaret amplitudinem curuae a fune formatae. At si funis non in eodem plano applicetur, idea amplitudinis quodammodo cessat: interim tamen Φ denotabit summam omnium angulorum elementarium $\frac{ds}{r}$, etiamsi non in idem planum cadant. Caeterum hinc patet vt ante, si $\lambda \Pi$ totum effectum frictionis denotet pressioni Π respondentem, tum aequilibrium tam diu subsistere posse, quamdiu vis tendens maior M non maior fuerit quam N $e^{\lambda \theta}$.

§. 18. Solutio autem tum tantum tam simplex euadit, quando vires sollicitantes sunt vel tangentiales vel normales. Quando autem hae vires secundum directiones ternorum axium OA, OB, OC agunt, quas litteris P, Q, R indicauimus, ita vt eae sint functiones ternarum coordinatarum x, y, z; tum inuestigatio curuae, quam hae vires filo flexili inducent, multo maiori laborat difficultate, quoniam aequationes primo inuentas a formulis integralibus liberari oportet. Interim tamen adhibendis sequentibus artificiis negotium confici satis commode poterit, vbi quidem etiamnunc mentem ab elasticitate abstrahimus.

§. 19. Hic scilicet statim in calculum introducemus sequentes formulas analyticas:

$$\frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{ds^3} = r,$$
$$\frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{ds^3} = p,$$
$$\frac{dx\,ddz - dz\,ddx}{ds^3} = q,$$

quae litterae cum supra adhibitis non sunt confundendae. Hinc igitur statim radius osculi curuae in puncto Z euadet $\frac{1}{\sqrt{pp+qq+rr}}$; deinde vero habebimus vt sequitur:

$$\text{I. } d.\frac{dy}{dx} = -\frac{r\,ds^3}{dx^2};\quad \text{II. } d.\frac{dx}{dy} = +\frac{r\,ds^3}{dy^2};$$
$$\text{III. } d.\frac{dz}{dy} = -\frac{p\,ds^3}{dy^2};\quad \text{IV. } d.\frac{dy}{dz} = +\frac{p\,ds^3}{dz^2};$$
$$\text{V. } d.\frac{dx}{dz} = -\frac{q\,ds^3}{dz^2};\quad \text{VI. } d.\frac{dz}{dx} = +\frac{q\,ds^3}{dx^2}.$$

Caeterum hae tres quantitates p, q, r a se inuicem ita pendent, vt sit $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$.

§. 20. His constitutis cum prima aequatio fuerit $dy\int P\,ds = dx\int Q\,ds$, erit $\frac{dy}{dx}\int P\,ds = \int Q\,ds$ et differentiando

$$-\frac{r\,ds^3}{dx^2}\int P\,ds + \frac{dy}{dx}P\,ds = Q\,ds,$$

vnde colligimus

$$\int P\,ds = \frac{-Q\,dx^2 + P\,dx\,dy}{r\,ds^2}.$$

Simili vero modo si aequationem $\int P\,ds = \frac{dx}{dy}\int Q\,ds$ differentiemus, prodibit

$$P\,ds = \frac{r\,ds^3}{dy^2}\int Q\,ds + \frac{Q\,dx\,ds}{dy};$$

vnde nanciscimur

$$\int Q\,ds = \frac{P\,dy^2 - Q\,dx\,dy}{r\,ds^2},$$

simili modo ex reliquis aequationibus deducemus

$$\int Q\,ds = -\frac{R\,dy^2 + Q\,dy\,dz}{p\,ds^2};\quad \int R\,ds = \frac{Q\,dz^2 - R\,dy\,dz}{p\,ds^2};$$
$$\int R\,ds = -\frac{P\,dz^2 + R\,dz\,dx}{q\,ds^2};\quad \int P\,ds = \frac{R\,dx^2 - P\,dx\,dz}{q\,ds^2}.$$

§. 21.

§. 21. Quoniam igitur pro qualibet formula integrali geminos adepti ſumus valores, iis inter ſe aequatis impetrabimus ſequentes aequationes:

$$\frac{Pdy - Qdx}{r} = \frac{Rdx - Pdz}{q};$$
$$\frac{Qdx - Pdy}{r} = \frac{Rdy - Qdz}{p};$$
$$\frac{Rdy - Qdz}{p} = \frac{Pdz - Rdx}{q}.$$

quae omnes tres, ob $pdx + qdy + rdz = 0$, reuocantur ad hanc vnicam: $Pp + Qq + Rr = 0$. In hac ergo aequatione iam inſignis ſtatus aequilibrii continetur proprietas; neque tamen ea ſtatus aequilibrii penitus exhauritur, ſed inſuper alia aequatione eſt opus ad ſolutionem completam perficiendam.

§. 22. Hunc in finem accipiatur pro lubitu unus valor cuiuspiam formulae integralis, ac prima quidem erat $\int P\,ds = \frac{dx(Pdy - Qdx)}{rds^2}$, quae denuo differentiata ſumto elemento ds conſtante praebet

$$P\,ds = \frac{ddx(Pdy - Qdx)}{rds^2} + \frac{dx(Pddy - Qddx)}{rds^2}$$
$$+ \frac{dx(dPdy - dQdx)}{rds^2} - \frac{dxdr(Pdy - Qdx)}{rds^2},$$

quae per $rrds^2$ multiplicata ac omnibus terminis ad eandem partem translatis abit in hanc formam:

$$0 = -Prrds^3 + rddx(Pdy - Qdx) + rdx(Pddy - Qddx)$$
$$+ rdx(dPdy - dQdx) - drdx(Pdy - Qdx).$$

In iſta aequatione littera P ducitur in hanc formulam:

$$-rrds^3 + r(dyddx + dxddy) - drdxdy,$$

quae loco rds^3 ſubſtituto valore fit $2rdxddy - drdxdy$; at vero littera Q ducitur in $drdx^2 - 2rdxddx$, vnde tota haec aequatio per dx diuiſa erit

P(2r

$P(2rddy - drdy) - Q(2rddx - drdx) + r(dPdy - dQdx) = 0$
ex qua colligitur

$$\frac{dr}{r} = \frac{2Qddx - 2Pddy - dPdy + dQdx}{Qdx - Pdy},$$

siue commodius

$$\frac{dr}{r} = \frac{2Qddx + dQdx - 2Pddy - dPdy}{Qdx - Pdy},$$

quae eadem aequatio etiam ex secunda formula $\int Q ds$ elicitur. Eodem igitur modo ex reliquis obtinebitur

$$\frac{dp}{p} = \frac{2Rddy + dRdy - 2Qddz - dQdz}{Rdy - Qdz},$$
$$\frac{dq}{q} = \frac{2Pddz + dPdz - 2Rddx - dRdx}{Pdz - Rdx}.$$

Quoniam autem vnica tantum aequatio, praeter inuentam $Pp + Qq + Rr = 0$, ad aequilibrium determinandum requiritur, necesse est has tres aequationes modo inuentas ad vnicam reduci posse, si quidem in subsidium vocetur formula $pdx + qdy + rdz = 0$.

§. 23. Quo haec clarius perspiciantur in calculum introducamus tensionem fili T, quandoquidem per eam ternas nostras formulas integrales concinne expressas inuenimus: erat autem

$$\int P ds = -\frac{Tdx}{ds}; \int Q ds = -\frac{Tdy}{ds}; \int R ds = -\frac{Tdz}{ds};$$

vnde differentiando elicimus

$$P = -\frac{dTdx - Tddx}{ds^2}; \ Q = -\frac{dTdy - Tddy}{ds^2}; \ R = -\frac{dTdz - Tddz}{ds^2};$$

vnde colligimus pro prima nostra aequatione

$$Qdx - Pdy = Trds \text{ et } Qddx - Pddy = -2rdsdt;$$

deinde vero hinc erit porro

$$dP = -\frac{ddTdx - 2dTddx - Td^3x}{ds^2} \text{ et } dQ = -\frac{ddTdy - 2dTddy - Td^3y}{ds^2};$$

vnde

vnde fit

$$d Q d x - d P d y = 2 r d s d T + \frac{T(d y d^3 x - d x d^3 y)}{d s^2},$$

quibus valoribus substitutis prima aequatio fiet $\frac{d r}{r} = \frac{(d y d^3 x - d x d^3 y)}{r d s^3}$, et cum sit $d y d d x - d x d d y = r d s^3$, hinc fiet differentiando $d y d^3 x - d x d^3 y = d r d s^3$; vnde patet aequationem nostram fieri identicam, id quod mirum non est, cum introducta tensione T ipsae aequationes primitiuae

$$d y \int P d s = d x \int Q d s,$$

$$d z \int Q d s = d y \int R d s,$$

$$d x \int R d s = d z \int P d s,$$

iam sint identicae. Interim tamen quaelibet trium aequationum inuentarum continet vnam determinationem necessariam pro statu aequilibrii.

§. 24. Optime autem haec perspicientur, si quaestionem ad casum quendam particularem accommodemus. Consideremus igitur filum cylindro circulari ita circumuolutum, vt in eius superficie lineam breuissimam exhibeat, quam ergo figuram tanquam datam spectemus, et quaeramus vires P, Q, R, quae filo in singulis elementis applicatae ipsi hanc ipsam figuram inducere valeant. Sit radius istius cylindri $= 1$, et notum est pro quauis fili portione s coordinatas ita determinari, vt sit $x = \alpha \cos. s$, $y = \alpha \sin s$ et $z = n s$, existente $\alpha = \sqrt{(1 - n n)}$ ideoque n fractione vnitate minore. Hinc ergo sumto elemento $d s$ constante erit

$$d x = - \alpha d s \sin. s; \; d y = \alpha d s \cos. s; \; d z = n d s;$$

tum vero porro

$$d d x = - \alpha d s^2 \cos. s; \; d d y = - \alpha d s^2 \sin. s; \; d d z = 0;$$

 vnde

vnde pro p, q, r ſequentes nanciſcimur valores:

$$p = -\alpha n \,\text{ſin.}\, s;\; q = \alpha n \,\text{coſ.}\, s;\; r = -\alpha\alpha;$$

ex quibus valoribus vtique erit $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$. Tum vero pro ſtatu aequilibrii aequatio primo inuenta praebet hanc determinationem: $Pp + Qq + Rr = 0$, quae ergo fit $-\alpha n P \,\text{ſin.}\, s + \alpha n Q \,\text{coſ.}\, s - \alpha\alpha R = 0$. Altera vero conditio petatur ex aequatione noſtra prima $\frac{dr}{r}$, vnde fiet

$$0 = \frac{2Q\,ds \,\text{coſ.}\, s + dQ \,\text{ſin.}\, s - 2P\,ds \,\text{ſin.}\, s + dP \,\text{coſ.}\, s}{Q \,\text{ſin.}\, s + P \,\text{coſ.}\, s},$$

at vero duae reliquae aequationes dabunt

$$\frac{ds \,\text{coſ.}\, s}{\text{ſin.}\, s} = -\frac{2\alpha R\,ds \,\text{ſin.}\, s + \alpha\,dR \,\text{coſ.}\, s - n\,dQ}{\alpha R \,\text{coſ.}\, s - nQ},$$

$$-\frac{ds \,\text{ſin.}\, s}{\text{coſ.}\, s} = \frac{2\alpha R\,ds \,\text{coſ.}\, s + \alpha\,dR \,\text{ſin.}\, s + n\,dP}{nP + \alpha R \,\text{ſin.}\, s}.$$

§. 25. Hae autem tres poſtremae aequationes vnicam continent determinationem, ad quod oſtendendum eas primo ad formam ſimpliciſſimam reuocemus, eritque:

$$\text{I. } 0 = 2Q\,ds \,\text{coſ.}\, s + dQ \,\text{ſin.}\, s - 2P\,ds \,\text{ſin.}\, s + dP \,\text{coſ.}\, s;$$

$$\text{II. } \alpha R\,ds \,\text{coſ}\, s^2 - nQ\,ds \,\text{coſ.}\, s = -2\alpha R\,ds \,\text{ſin.}\, s^2 + \alpha\,dR \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, s - n\,dQ \,\text{ſin.}\, s,$$

ſiue

$$\text{II. } 0 = -\alpha R\,ds\,(1 + \text{ſin.}\, s^2) + nQ\,ds \,\text{coſ.}\, s + \alpha\,dR \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, s - n\,dQ \,\text{ſin.}\, s$$

$$\text{III. } -nP\,ds \,\text{ſin.}\, s - \alpha R\,ds \,\text{ſin.}\, s^2 = 2\alpha R\,ds \,\text{coſ.}\, s^2 + \alpha\,dR \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, s + n\,dP \,\text{coſ.}\, s,$$

ſiue

$$\text{III. } 0 = \alpha R\,ds\,(1 + \text{coſ.}\, s^2) + nP\,ds \,\text{ſin.}\, s + \alpha\,dR \,\text{ſin.}\, s \,\text{coſ.}\, s + n\,dP \,\text{coſ.}\, s;$$

et

et quoniam prima conditio dedit

$$R = \frac{n\,Q\,\text{cof.}\,s - n\,P\,\text{fin.}\,s}{\alpha}, \text{ erit}$$

$$dR = \frac{n\,dQ\,\text{cof.}\,s - n\,Q\,ds\,\text{fin.}\,s - n\,dP\,\text{fin.}\,s - n\,P\,ds\,\text{cof.}\,s}{\alpha}.$$

Iam hi valores in fecunda et tertia aequatione fubftituti perducent ad ipfam aequationem primam; vnde patet has tres aequationes vnicae tantum aequiualere.

§. 26. Sufficit igitur primam euoluiffe, quae eft

$$0 = 2\,Q\,ds\,\text{cof.}\,s + dQ\,\text{fin.}\,s - 2\,P\,ds\,\text{fin.}\,s + dP\,\text{cof.}\,s,$$

vnde patet alteram quantitatum P et Q pro lubitu accipi poffe. Spectemus ergo quantitatem P tanquam cognitam et alteram Q quaeramus ex hac aequatione:

$$dQ\,\text{fin.}\,s + 2\,Q\,ds\,\text{cof.}\,s = 2\,P\,ds\,\text{fin.}\,s - dP\,\text{cof.}\,s,$$

quae per fin. s multiplicata integretur, vnde prodit

$$Q\,\text{fin.}\,s^2 = 2\int P\,ds\,\text{fin.}\,s^2 - \int dP\,\text{fin.}\,s\,\text{cof.}\,s,$$

eft autem per reductionem notiffimam:

$$\int dP\,\text{fin.}\,s\,\text{cof.}\,s = P\,\text{fin.}\,s\,\text{cof.}\,s - \int P\,ds\,(\text{cof.}\,s^2 - \text{fin.}\,s^2),$$

vnde erit

$$Q\,\text{fin.}\,s^2 = -P\,\text{fin.}\,s\,\text{cof}\,s + \int P\,ds\,(\text{cof.}\,s^2 + \text{fin.}\,s^2)$$

$$= -P\,\text{fin.}\,s\,\text{cof.}\,s + \int P\,ds,$$

ita vt fit $Q = -\frac{P\,\text{cof.}\,s}{\text{fin.}\,s} + \frac{\int P\,ds}{\text{fin.}\,s^2}$, hincque porro

$$R = -\frac{n\,P}{\alpha\,\text{fin.}\,s} + n\,\text{cof}\,s\,\frac{\int P\,ds}{\alpha\,\text{fin.}\,s^2},$$

ficque ex affumta quantitate P binae reliquae Q et R determinantur; vnde patet filum infinitis modis in hoc fitu in aequilibrio confiftere poffe.

§. 27. Quando autem vna trium virium P, Q et R vt cognita fpectatur, binae reliquae multo facilius ex ea definire possunt per geminos valores quos ante pro formulis $\int P\,ds$ $\int Q\,ds$ et $\int R\,ds$ inuenimus; neque opus est ad vlteriorem differentiationem descendere. Ita si vis P fuerit data, tum gemini valores pro $\int P\,ds$ dati hoc casu euadent

$$\int P\,ds = Q\,\text{sin.}\,s^2 + P\,\text{sin.}\,s\,\text{cos.}\,s = \frac{\alpha R\,\text{sin.}\,s^2 + n P\,\text{sin.}\,s}{n\,\text{cos.}\,s},$$

vnde colligimus vt ante

$$Q = \frac{\int P\,ds - P\,\text{sin.}\,s\,\text{cos.}\,s}{\text{sin.}\,s^2} = \frac{\int P\,ds}{\text{sin.}\,s^2} - \frac{P\,\text{cos.}\,s}{\text{sin.}\,s} \text{ et}$$

$$R = \frac{n\,\text{cos.}\,s \int P\,ds}{\alpha\,\text{sin.}\,s^2} - \frac{n P}{\alpha\,\text{sin.}\,s},$$

Simili modo si vim R pro data accipiamus, bini valores pro $\int R\,ds$ dati fient

$$\int R\,ds = \frac{-n Q}{\alpha\,\text{sin.}\,s} + \frac{R\,\text{cos.}\,s}{\text{sin.}\,s} = \frac{-n P}{\alpha\,\text{cos.}\,s} - \frac{R\,\text{sin.}\,s}{\text{cos.}\,s},$$

vnde reperitur:

$$P = \frac{\alpha R\,\text{sin.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,\text{cos.}\,s}{n}\int R\,ds \text{ et } Q = \frac{\alpha R\,\text{cos.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,\text{sin.}\,s \int R\,ds}{n},$$

vnde si fuerit, $R = 1$, quod euenit si axis cylindri sit verticalis et singula funis elementa a grauitate vrgeantur, tum binae reliquae vires requisitae ad aequilibrium erunt

$$P = \frac{\alpha\,\text{sin.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,(s+a)\,\text{cos.}\,s}{n} \text{ et } Q = \frac{\alpha\,\text{cos.}\,s}{n} - \frac{\alpha\,(s+a)\,\text{sin.}\,s}{n}.$$

Ex quo patet, quaestionem etiamnunc esse indeterminatam, quoniam constantem a pro lubitu accipere licet.

§. 28. Quin etiam tensionem funis in singulis punctis pro arbitrio sumere licet; tum enim pro nostro casu, quem hic tractamus, formulae supra (§. 9.) exhibitae erunt

$$\int P\,ds = \alpha T\,\text{sin.}\,s;\ \int Q\,ds = -\alpha T\,\text{cos.}\,s;\ \int R\,ds = -n T,$$

vnde ipsae vires erunt

P =

$$P = \alpha \frac{dT}{ds} \sin. s + \alpha T \cos. s;$$
$$Q = -\alpha \frac{dT}{ds} \cos. s + \alpha T \sin. s;$$
$$R = -\frac{\pi d T}{d s},$$

quo ergo casu omnes tres vires perfecte determinantur; vnde si tensio vbique debeat esse constans, siue $T = D$, nostrae vires erunt $P = \alpha D \cos. s$; $Q = \alpha D \cos. s$; $R = 0$, atque hinc manifestum est quemadmodum omnes huiusmodi quaestiones tractari conueniat.

De aequilibrio filorum elasticorum a viribus quibuscunque sollicitatorum.

§. 29. Formulae generales pro filis elasticis datae multo commodiores reddentur introductione litterarum p, q, r, quarum valores erant positi

$$q = \frac{dzddy - dyddz}{ds^3}; \quad q = \frac{dxddz - dzddx}{ds^3}; \quad r = \frac{dyddx - dxddy}{ds^3};$$

circa quas formulas iam supra notauimus fore $p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$. Praeterea vero quoque euidens est fore $p\,ddx + q\,ddy + r\,ddz = 0$; vnde ex differentiatione prioris aequalitatis oritur $dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz = 0$, id quod etiam inde patet, quod sumto elemento ds constante sit

$$dp = \frac{dz\,d^3y - dy\,d^3z}{ds^3};$$
$$dq = \frac{dx\,d^3z - dz\,d^3x}{ds^3};$$
$$dr = \frac{dy\,d^3x - dx\,d^3y}{ds^3};$$

hinc autem insuper sequitur fore

$$dp\,d^3x + dq\,d^3y + dr\,d^3z = 0.$$

Has igitur insignes relationes inter quantitates p, q, r probe notasse iuuabit.

§. 30. Praeterea vero etiam formula irrationalis $\surd(pp + qq + rr)$ memorabilem reductionem suppeditat: fiet enim

$$ds^6(pp+qq+rr)=(dy^2+dz^2)ddx^2+(dx^2+dz^2)ddy^2+(dx^2+dy^2)+ddz^2$$
$$-2dxdyddxddy-2dxdzddxddz-2dydzddyddz,$$

cum igitur $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, haec formula transformabitur in sequentem:

$$pp+qq+rr=\frac{ddx^2+ddy^2+ddz^2}{ds^4}-\frac{dx^2ddx^2-dy^2ddy^2-dz^2ddz^2}{ds^6}$$
$$-\frac{2dxdyddxddy-2dxdzddxddz-2dydzddyddz}{ds^6},$$

vbi membra negatiua manifesto continent quadratum formulae $dxddx + dyddy + dzddz$. Est vero

$$dxddx + dyddy + dzddz = dsdds,$$

nullo scilicet elemento pro constante assumto, hoc ergo valore substituto nascetur haec expressio satis concinna:

$$pp+qq+rr=\frac{ddx^2+ddy^2+ddz^2-dds^2}{ds^4};$$

quamobrem radius osculi curuae ad Z generalissime erit $\frac{ds^2}{\surd(ddx^2+ddy^2+ddz^2-dds^2)}$, vbi quodlibet elementum pro lubitu vt constans accipi poterit, ita vt valor expressionis hinc neutiquam pendeat, quandoquidem quouis casu differentialia secundi gradus sponte se mutuo tollunt. Veluti in casu ante tractato, vbi erat

$$dx = -\alpha ds \sin. s;\ dy = \alpha ds \cos. s;\ dz = nds;$$

existente $\alpha = \surd(1 - nn)$, etiam elemento ds variabili sumto, fiet

$$ddx = -\alpha dds \sin. s - \alpha ds^2 \cos. s;$$
$$ddy = \alpha dds \cos. s - \alpha ds^2 \sin. s;$$
$$ddz = ndds,$$

quibus valoribus sustitutis reperietur:

ddx

$$d\,d\,x^2 + d\,d\,y^2 + d\,d\,z^2 - d\,d\,s^2 = \alpha\,\alpha\,d\,s^4;$$

ſicque radius oſculi erit $\frac{1}{\alpha}$.

§. 31. His praenotatis, ſi G exprimat elaſticitatem abſolutam fili in ſingulis punctis, quam hic tanquam conſtantem aſſumemus, ita vt filum vbique vniformiter craſſum ſit concipiendum; tum aequationes pro aequilibrio erunt

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = G\,r.$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = G\,p.$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = G\,q,$$

quae differentiatae praebent

$$dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = G\,dr,$$

$$dz \int Q\,ds - dy \int R\,ds = G\,dp,$$

$$dx \int R\,ds - dz \int P\,ds = G\,dq.$$

§. 32. Hinc primo tam $\int Q\,ds$ quam $\int R\,ds$ per $\int P\,ds$ exprimamus eritque

$$\int Q\,ds = \frac{dy}{dx}\int P\,ds - \frac{G\,dr}{dx} \text{ et } \int R\,ds = \frac{dz}{dx}\int P\,ds + \frac{G\,dq}{dx},$$

qui valores in formula pro tenſione **T** data ſubſtituti praebent hanc expreſſionem:

$$T = -\frac{dx}{ds}\int P\,ds - \frac{dy^2}{dx\,ds}\int P\,ds - \frac{dz^2}{dx\,ds}\int P\,ds - \frac{G\,dr\,dy}{dx\,ds} - \frac{G\,dq\,dz}{dx\,ds},$$

quae reducitur ad hanc formam:

$$T = -\frac{ds}{dx}\int P\,ds + \frac{G(dr\,dy - dq\,dz)}{dx\,ds},$$

vnde colligimus:

$$\int P\,ds = \frac{G(dr\,dy - dq\,dz)}{ds^2} - \frac{T\,dx}{ds}.$$

Similique modo reperietur:

$\int Q$

$$\int Q\, ds = \frac{G(dp\,dz - dr\,dx)}{ds^2} - \frac{T\,dy}{ds},$$

$$\int R\, ds = \frac{G(dq\,dx - dp\,dy)}{ds^2} - \frac{T\,dz}{ds}.$$

Hinc autem differentiando porro fiet

$$P = \frac{G(dr\,ddy + dy\,ddr - dq\,ddz - dz\,ddq)}{ds^3} - \frac{T\,ddx - dT\,dx}{ds^2},$$

$$Q = \frac{G(dp\,ddz + dz\,ddp - dr\,ddx - dx\,ddr)}{ds^3} - \frac{T\,ddy - dT\,dy}{ds^3},$$

$$R = \frac{G(dq\,ddx + dx\,ddq - dp\,ddy - dy\,ddp)}{ds^3} - \frac{T\,ddz - dT\,dz}{ds^2}.$$

§. 33. Cum nunc ſit vis tangentialis, vt ſupra vidimus $= P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, quam per $\Theta\, ds$ deſignauimus, erit

$$\Theta\, ds = -G(p\,dp + q\,dq + r\,dr) - dT,$$

quare cum ſit radius oſculi curuae $= \frac{1}{\sqrt{(pp + qq + rr)}}$, ſi eum vocemus $= \varrho$, erit $pp + qq + rr = \frac{1}{\varrho\varrho}$, hincque

$$p\,dp + q\,dq + r\,dr = -\frac{d\varrho}{\varrho^3},$$

quo valore ſubſtituto fiet $\Theta\, ds = \frac{G\,d\varrho}{\varrho^3} - dT$.

Quod ſi porro vim normalem pro elemento ds ſtatuamus $= \Pi\, ds$, ſupra iam vidimus fore

$$\Pi\, ds = \sqrt{((P\,dy - Q\,dx)^2 + (Q\,dz - R\,dy)^2 + (R\,dx - P\,dz)^2)},$$

vbi ſi loco P, Q, R valores ſupra exhibitos ſubſtituere vellemus, in calculos inextricabiles delaberemur.

§. 34. Quoniam modo inuenimus

$$\int Q\, ds = \frac{dy}{dx}\int P\, ds - \frac{G\,dr}{dx},$$

erit differentiando

$$Q\, ds = -\frac{r\,ds^3}{dx^2}\int P\, ds + \frac{P\,ds\,dy}{dx} - \frac{G\,ddr}{dx} + \frac{G\,dr\,ddx}{dx^2},$$

vnde colligitur

$\int P\,ds$

$$\int P\,ds = \frac{P\,dx\,dy}{r\,ds^2} - \frac{Q}{r}\,\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{G\,(dr\,ddx - dx\,ddr)}{r\,ds^3},$$ fiue

$$\int P\,ds = \frac{dx\,(P\,dy - Q\,dx)}{r\,ds^2} + \frac{G\,(dr\,ddx - dx\,ddr)}{r\,ds^3},$$

hinc autem porro erit

$$\int Q\,ds = \frac{dy\,(P\,dy - Q\,dx)}{r\,ds^2} - \frac{G\,(dy\,ddr - dr\,ddy)}{r\,ds^3},$$

ex quibus per analogiam concludimus:

$$\int Q\,ds = \frac{dy\,(Q\,dz - R\,dy)}{p\,ds^2} + \frac{G\,(dp\,ddy - dy\,ddp)}{p\,ds^3},$$

$$\int R\,ds = \frac{dz\,(Q\,dz - R\,dy)}{p\,ds^2} - \frac{G\,(dz\,ddp - dp\,ddz)}{p\,ds^3},$$

$$\int R\,ds = \frac{dz\,(R\,dx - P\,dz)}{q\,ds^2} + \frac{G\,(dq\,ddz - dz\,ddq)}{q\,ds^3},$$

$$\int P\,ds = \frac{px\,(R\,dx - P\,dz)}{q\,ds^2} - \frac{G\,(dx\,ddq - dq\,ddx)}{q\,ds^2},$$

hocque modo pro qualibet formula integrali binos nacti fumus valores, qui inter fe aequati praebent aequationem a figno integrali liberam. Hinc igitur fatis patet, determinationem aequilibrii pro filis elafticis, quae a viribus quibuscunque follicitantur, ad calculos non parum moleftos perducere, ita vt in genere vix quicquam vlterius praeftare liceat quam hic eft factum. Quamobrem pro quouis cafu oblato ac determinato difpiciendum erit, quomodo ope formularum hic traditarum commodiffime ad folutionem perueniri queat. Ceterum iam obferuauimus motum huiusmodi filorum ne fufcipi quidem poffe, antequam infignia incrementa calculi fuerint detecta.

DE SVPERFICIEI TERRESTRIS PROIECTIONE STEREOGRAPHICA.

Auctore

NICOLAO FUSS.

§. 1.

Tab. V. Fig. 1. Repraesentet circulus $Azb O\beta$ globum terraqueum. Constituatur oculus in puncto O, loco quopiam praecipuo A, qui vulgo in centro superficiei proiiciendae collocari solet, opposito, et proiiciatur superficies terrestris in planum P Q R S terram tangens in ipso puncto A, ita vt quilibet circulus maximus per A transiens proiiciatur in rectam tangentem in A, quemadmodum in figura semicirculus β A B proiicitur in rectam B A B, siue A b in AB et A γ in A Γ.

§. 2. Sit radius $CA = 1$, et sumto in circulo verticali A b O arcu quocunque $Az = \omega$, si proiiciatur z in Z, per rectam OzZ, posita distantia $AZ = z$, ob angulum $AOZ = \frac{1}{2}\omega$ erit

$$AZ = z = \frac{OA \cdot qz}{Oq} = \frac{2 \sin.\omega}{1 + \cos.\omega} = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2}\omega.$$

Sumto igitur puncto b in horizonte puncti A, ita vt $Ab = 90°$, pro puncto proiecto B erit $\omega = 90°$, ideoque $AB = 2$ tang. $45° = 2$. Ceterum pro quacunque oculi a plano

plano proiectionis distantia intervallum A Z facile assignari potest. Cum enim omnes proiectiones in plana plano tangenti P Q R S parallela factae sint similes inter se, erit in genere pro huiusmodi plano a puncto nadir O distante interuallo α, radius proiectionis $z = \alpha$ tang. ω.

§. 3. Deinde euidens est prope ipsum punctum A gradus proiectionis gradibus in ipsa superficie sphaerica fore aequales, inde vero continuo crescere, & prope horizontem b gradibus sphaerae duplo fieri maiores. Porro notandum est, omnes reliqui circuli verticales, veluti AyO per rectas in plano proiectionis ex A eductas A Y repraesentari, quarum inclinationes Y A z inclinationi mutuae circulorum verticalium yAz, siue yqz erunt aequales. Horizon autem $b\beta$ in proiectione per circulum repraesentabitur, cuius centrum in A, radius vero A B $= 2$; omnesque circuli horizonti paralleli, veluti $z\zeta$, pariter per circulos centro A descriptos repraesentabuntur, quorum radii se habent ad radium paralleli, vt distantiae planorum, in quibus describuntur, a puncto O.

§ 4. Si secundum rectam quamcunque per punctum O transeuntem O F sectio fiat ad planum tabulae normalis, ea in sphaera abscindet circulum minorem Omfd, cuius proiectio erit recta F K ad A B in F normalis, quae pro quouis puncto m circuli minoris ita determinatur. Ponatur arcus A$f = \zeta$, erit angulus A O F $= \frac{1}{2}\zeta$, interuallum A F $= 2$ tang. $\frac{1}{2}\zeta$, hinc O F $= 2$ sec. $\frac{1}{2}\zeta$ et diameter circuli minoris O$f = 2$ cos. $\frac{1}{2}\zeta$. Iam pro puncto huius sectionis quocunque m ponatur angulus $fcm = \mu$, erit fO$m = \frac{1}{2}\mu$, ideoque erecto ex f perpendiculo $f\mu$ erit Tab. V. Fig. 2.

 $f\mu$

$$f\mu = Of \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu = 2 \,\text{cof.}\, \tfrac{1}{2}\zeta \,\text{tang.}\, \tfrac{1}{2}\mu,$$

et ob triangula $Of\mu$ et OFM fimilia

$$Of : f\mu = OF : FM, \text{ vnde fit}$$

$$FM = \frac{f\mu \,.\, OF}{Of} = \frac{2 \,\text{tang.}\, \frac{1}{2}\mu}{\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta}.$$

Hinc fumto angulo $\mu = 90°$, punctum k ab O quadrante diftans ita in K erit proiectum, vt fit $FK = \frac{2}{\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta}$, ideoque tota recta proiectionem circuli minoris exhibens erit $\frac{4}{\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta}$.

Ceterum hic notaffe iuuabit, fi ducatur ad punctum m arcus circuli verticalis Am, isque dicatur ω, fore $\text{cof.}\, \frac{1}{2}\omega = \text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta \,\text{cof.}\, \frac{1}{2}\mu$, arcus vero $mf = \mu \,\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta$. Viciffim autem, cognitis AF et FM, quas ponamus $AF = a$ et $FM = b$, ex proiectione ipfe circulus minor definiri poterit. Cum enim fit $\text{tang.}\, \frac{1}{2}\zeta = \frac{1}{2}a$ erit

$$\text{cof.}\, \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)}},$$

ideoque radius circuli minoris

$$cO = cf = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)}} \text{ et arcus}$$

$$mf = \frac{2}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)}} \,A\,\text{tang.}\, \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{(1 + \frac{1}{4}a^2)}},$$

ob $\text{tang.}\, \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2}b \,\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta$ hincque $\mu = 2\,A\,\text{tang.}\, (\frac{1}{2}b \,\text{cof.}\, \frac{1}{2}\zeta)$.

Tab V. Fig. 3. §. 5. Confiderentur nunc tria puncta proxima f, m, n, in fuperficie fphaerae, arcubus circulorum maximorum fm, nm, quos vt lineas rectas fpectemus, iuncta, fintque

que haec puncta proiecta rectis ex loco spectatoris O eductis O F, O M, O N. Ducta iam chorda $A f$ ob triangula F A O et $A f O$ similia erit $FO : AO = AO : fO$, vnde fit $FO . fO = AO^2$. Simili modo est $MO . mO = AO^2$. ideoque $FO . fO = MO . mO$, siue $FO : MO = mO : fO$, consequenter triangula O M F et $O f m$ sunt similia, ac proinde $MF : mf = OF : Om$. Eodem modo quoque erit $MN : mn = ON : Om$, vnde combinando concluditur fore

$$MF : MN = mf : mn = OF : ON.$$

Latera igitur aeque ac areae triangulorum F M N et $f m n$ sunt in ratione distantiarum a puncto O, et omnes figurae minimae in sphaera hac proiectione per similes figuras repraesentantur.

§. 6. Deinde omnes circuli minores in superficie sphaerae descripti etiam in plano proiectionis per circulos repraesentantur: Sit enim $e f g h$ circulus quicunque in sphaera, et concipiatur conus verticem suum in loco oculi O habens, qui hunc circulum complectatur, eiusque basis in plano proiectionis E F G H itidem erit circulus. Cum enim $FO . fO = AO^2$ et $GO . gO = AO^2$, erit $FO : GO = gO : fO$. Coni igitur F O G et $g O f$ sunt similes, quia sectiones $e f g h$ et E F G H antiparallelae vel subcontrariae, ideoque si vna circulus, etiam altera circulus sit necesse est. Ceterum ex analogia modo inuenta deducitur diameter proiectionis $FG = \frac{OF . fg}{Og}$. Tab. V. Fig. 4

§. 7. Dummodo igitur cognitae fuerint positio et radius circuli minoris in sphaera, diameter circuli proiecti in se facillime determinatur. Ductis enim ex centro C radiis Cf et Cg, si dicantur anguli $ACf = \zeta$ et $ACg = \eta$, ita vt angulus $fCg = \eta - \zeta$, erit diameter circuli minoris, hoc est chorda $fg = 2 \sin. \frac{\eta - \zeta}{2}$, vnde ob $OF = \frac{2}{\cos. \frac{1}{2}\zeta}$ et $Og = 2 \cos. \frac{1}{2}\eta$ erit

$$FG = \frac{2 \sin. \frac{\eta - \zeta}{2}}{\cos. \frac{1}{2}\zeta \cos. \frac{1}{2}\eta} = 2 (\tang. \tfrac{1}{2}\eta - \tang. \tfrac{1}{2}\zeta),$$

vti requiritur. Est enim

$$AF = 2 \tang. \tfrac{1}{2}\zeta \text{ et } AG = 2 \tang. \tfrac{1}{2}\eta,$$

ergo $FG = AG - AF$.

§. 8. Quaerantur areae superficiei circularis in sphaera et in proiectione, eritque posterior area

$$= \pi (\tang. \tfrac{1}{2}\eta - \tang. \tfrac{1}{2}\zeta)^2,$$

pro altera vero, ob $AO = 2$ et $hk = 1 - \cos. \frac{\eta - \zeta}{2}$, erit haec area $= 2\pi (1 - \cos. \frac{\eta - \zeta}{2})$. Quod si igitur statuatur $\zeta = -\eta$, erit pro cono recto, cuius axis est recta AO, area superficiei sphaericae ab hoc cono resectae

$$2\pi (1 - \cos. \eta) = 4\pi \sin. \tfrac{1}{2}\eta^2$$

et area baseos, seu circuli in proiectione $= 4\pi \tang. \frac{1}{2}\eta^2$; ergo sunt areae superficiei proiectae et proiectionis in ratione $1 : \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}\eta^2} = \cos. \frac{1}{2}\eta^2 : 1$. Hinc si $\eta = 90°$, haec ratio erit $\frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$.

Tab V. Fig. 5. §. 9. Sit iam p polus terrae eiusque distantia a zenith A, seu arcus $Ap = h$ et radius circuli paralleli curui-

curuilineus, siue arcus $pf = pe = g$, erunt arcus $Ae = h - g$ et $Af = h + g$. Quod si iam hic parallelus proiiciatur in planum, pro punctorum p, e, f proiectione P, E, F habebimus

$$\mathrm{A\,P} = 2 \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} h,$$

$$\mathrm{A\,T} = 2 \operatorname{tang.} \tfrac{h+g}{2},$$

$$\mathrm{A\,E} = 2 \operatorname{tang.} \tfrac{h-g}{2},$$

vnde colligitur diameter circuli parallelum in mappa referentis, scilicet

$$\mathrm{E\,F} = \mathrm{A\,F} - \mathrm{A\,E} = 2\left(\operatorname{tang.} \tfrac{h+g}{2} - \operatorname{tang.} \tfrac{h-g}{2}\right),$$

et distantia centri a centro proiectionis

$$\mathrm{I\,A} = \tfrac{\mathrm{AF}+\mathrm{AE}}{2} = \operatorname{tang.} \tfrac{h+g}{2} + \operatorname{tang.} \tfrac{h-g}{2}.$$

Hoc igitur modo parallelus quicunque facile describi poterit.

§. 10. Sint p et p' ambo poli in sphaera, et vt Tab. VI.
ante $Ap = h$, ita vt $Ap' = 180° - h$. Proiiciantur hi Fig. 1.
poli in planum in P et P', eritque recta PP' proiectio meridiani pAp' per zenith A transeuntis, eiusque longitudo, ob $\mathrm{A\,P} = 2 \operatorname{tang.} \frac{1}{2} h$ et $\mathrm{A\,P'} = 2 \operatorname{cot.} \frac{1}{2} h$, erit

$$\mathrm{P\,P'} = \mathrm{A\,P} + \mathrm{A\,P'} = 2(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} h + \operatorname{cot.} \tfrac{1}{2} h) = 4 \operatorname{cosec.} h,$$

quae recta simul erit chorda omnium meridianorum communis. Sit nunc $p'rp$ alius meridianus quicunque a meridiano $p'Ap$ declinans angulo $Apr = \theta$: si huic meridiano in mappa respondeat arcus P'RP, existente R proiectione puncti r, necesse est vt etiam angulus $\mathrm{APR} = \theta$. Bisecetur nunc recta P'P in K, eritque interuallum KP $= \mathrm{KP'} = 2 \operatorname{cosec.} h$. Ex K demittatur perpendiculum $\mathrm{K}\Gamma$, puncto Γ ita sumto vt angulus $\mathrm{K}\Gamma\mathrm{P}$ sit angulo

APR

A P R aequalis, eritque R P Γ = 90°, ideoque Γ centrum meridiani quaesiti in mappa P′ R P. Erit igitur

$$K\Gamma = KP \text{ tang. } KP\Gamma = 2 \text{ cosec. } b \text{ cot. } \theta,$$

hincque radius

$$P\Gamma = P'\Gamma = 2 \text{ cosec. } b \text{ cosec. } \theta.$$

Harum formularum ope facile erit pro quacunque declinatione θ meridianum in proiectione describere, hocque modo omnia absoluimus, quae vulgo in tractatione proiectionis stereographicae occurrere solent. Operae igitur pretium videtur, haec omnia ad proiectionem polarem et aequatoream applicare, tabulasque adiungere, quarum ope constructio mapparum his proiectionibus superstructarum subleuetur.

Proiectio polaris.

Tab. V. Fig. 1.

§. 11. Quod si iam statuatur polus in ipso zenith A, ita vt $A p = b = 0$, et quaeratur proiectio parallelorum et meridianorum, figura prima huic casui est accommodata. Posita enim pro loco quocunque z eleuatione poli $A z = g$, erit recta A Z proiectio meridiani loci z et simul radius paralleli $z y \zeta$ in proiectione, cuius valor est $AZ = 2 \text{ tang. } \frac{1}{2} g$, ob $b = 0$. Tum vero erit radius meridiani $2 \text{ cosec. } b \text{ cosec. } \theta = \infty$. Haec igitur proiectio cui construendae prima tabula inseruiet, refert hemisphaerium polare, vbi omnes rectae ex A eductae sunt meridiani, paralleli vero circuli concentrici ex A radio = $2 \text{ tang. } \frac{1}{2} g$ descripti, existente radio paralleli in sphaera = $\text{sin. } g$.

tang.

Elev. Aequat.	Radius Paralleli in Sphaer.	in proi.	Quant. gradus.	Elev. Aequat.	Radius Paralleli in Sphaer.	in proi.	Quant. gradus.
1°	0,0175	0,0175	0,0174	46°	0,7193	0,8489	0,0207
2	0,0349	0,0349	0,0174	47	0,7313	0,8696	0,0208
3	0,0523	0,0523	0,0175	48	0,7431	0,8904	0,0210
4	0,0698	0,0698	0,0175	49	0,7547	0,9114	0,0212
5	0,0872	0,0873	0,0175	50	0,7660	0,9326	0,0213
6	0,1045	0,1048	0,0175	51	0,7771	0,9539	0,0216
7	0,1219	0,1223	0,0175	52	0,7880	0,9755	0,0217
8	0,1392	0,1398	0,0176	53	0,7986	0,9972	0,0218
9	0,1564	0,1574	0,0176	54	0,8090	1,0190	0,0221
10	0,1736	0,1750	0,0176	55	0,8191	1,0411	0,0223
11	0,1908	0,1926	0,0176	56	0,8290	1,0634	0,0225
12	0,2079	0,2102	0,0177	57	0,8386	1,0859	0,0227
13	0,2249	0,2279	0,0177	58	0,8480	1,1086	0,0229
14	0,2419	0,2456	0,0177	59	0,8572	1,1315	0,0232
15	0,2588	0,2633	0,0178	60	0,8660	1,1547	0,0234
16	0,2756	0,2811	0,0178	61	0,8746	1,1781	0,0236
17	0,2924	0,2989	0,0179	62	0,8829	1,2017	0,0239
18	0,3090	0,3168	0,0179	63	0,8910	1,2256	0,0241
19	0,3256	0,3347	0,0180	64	0,8988	1,2497	0,0244
20	0,3420	0,3527	0,0180	65	0,9063	1,2741	0,0247
21	0,3584	0,3707	0,0180	66	0,9135	1,2988	0,0250
22	0,3746	0,3887	0,0182	67	0,9205	1,3238	0,0252
23	0,3907	0,4069	0,0182	68	0,9271	1,3490	0,0256
24	0,4067	0,4251	0,0183	69	0,9336	1,3746	0,0258
25	0,4226	0,4434	0,0183	70	0,9397	1,4004	0,0262
26	0,4384	0,4617	0,0184	71	0,9455	1,4266	0,0265
27	0,4540	0,4801	0,0185	72	0,9511	1,4531	0,0268
28	0,4695	0,4986	0,0186	73	0,9563	1,4799	0,0272
29	0,4848	0,5172	0,0187	74	0,9613	1,5071	0,0275
30	0,5000	0,5359	0,0187	75	0,9659	1,5346	0,0279
31	0,5150	0,5546	0,0189	76	0,9703	1,5625	0,0284
32	0,5299	0,5735	0,0189	77	0,9744	1,5909	0,0286
33	0,5446	0,5924	0,0191	78	0,9781	1,6195	0,0292
34	0,5591	0,6115	0,0191	79	0,9816	1,6487	0,0295
35	0,5735	0,6306	0,0192	80	0,9848	1,6782	0,0300
36	0,5878	0,6498	0,0194	81	0,9877	1,7082	0,0304
37	0,6018	0,6692	0,0194	82	0,9902	1,7386	0,0308
38	0,6157	0,6886	0,0196	83	0,9925	1,7694	0,0314
39	0,6293	0,7082	0,0197	84	0,9945	1,8008	0,0319
40	0,6428	0,7279	0,0199	85	0,9962	1,8327	0,0323
41	0,6561	0,7478	0,0199	86	0,9976	1,8650	0,0329
42	0,6691	0,7677	0,0201	87	0,9986	1,8979	0,0335
43	0,6820	0,7878	0,0202	88	0,9993	1,9314	0,0340
44	0,6947	0,8080	0,0204	89	0,9998	1,9654	0,0346
45	0,7071	0,8284	0,0205	90	1,0000	2,0000	

Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Distant. Centri.	Radius Merid.	Elev. Aequat.	Radius Paralleli.	Distant. Centri.	Radius Merid.
1°	0,0349	2,0003	114,5974	46°	2,0711	2,8791	2,7803
2	0,0698	2,0012	57,3074	47	2,1447	2,9325	2,7346
3	0,1048	2,0027	38,2146	48	2,2212	2,9889	2,6913
4	0,1398	2,0049	28,6710	49	2,3007	3,0485	2,6500
5	0,1750	2,0076	22,9474	50	2,3835	3,1114	2,6108
6	0,2102	2,0110	19,1335	51	2,4698	3,1780	2,5735
7	0,2456	2,0150	16,4110	52	2,5599	3,2485	2,5380
8	0,2811	2,0196	14,3706	53	2,6541	3,3233	2,5043
9	0,3168	2,0249	12,7849	54	2,7528	3,4026	2,4721
10	0,3527	2,0308	11,5175	55	2,8563	3,4869	2,4415
11	0,3887	2,0374	10,4817	56	2,9651	3,5766	2,4124
12	0,4251	2,0447	9,6195	57	3,0797	3,6721	2,3847
13	0,4617	2,0526	8,8908	58	3,2005	3,7741	2,3583
14	0,4986	2,0612	8,2671	59	3,3285	3,8832	2,3333
15	0,5359	2,0705	7,7274	60	3,4641	4,0000	2,3094
16	0,5735	2,0806	7,2559	61	3,6081	4,1253	2,2867
17	0,6115	2,0914	6,8406	62	3,7614	4,2601	2,2651
18	0,6498	2,1029	6,4721	63	3,9252	4,4054	2,2446
19	0,6886	2,1152	6,1431	64	4,1006	4,5623	2,2252
20	0,7279	2,1283	5,8476	65	4,2890	4,7324	2,2067
11	0,7677	2,1423	5,5808	66	4,4921	4,9172	2,1893
22	0,8080	2,1571	5,3389	67	4,7117	5,1186	2,1727
23	0,8489	2,1727	5,1186	68	4,9502	5,3389	2,1571
24	0,8904	2,1893	4,9172	69	5,2102	5,5808	2,1423
25	0,9326	2,2067	4,7324	70	5,4949	5,8467	2,1283
26	0,9755	2,2252	4,5623	71	5,8084	6,1431	2,1152
27	1,0190	2,2446	4,4054	72	6,1554	6,4721	2,1029
28	1,0634	2,2651	4,2601	73	6,5417	6,8406	2,0914
29	1,1086	2,2867	4,1253	74	6,9748	7,2559	2,0806
30	1,1547	2,3094	4,0000	75	7,4641	7,7274	2,0705
31	1,2017	2,3333	3,8832	76	8,0216	8,2671	2,0612
32	1,2497	2,3583	3,7741	77	8,6629	8,8908	2,0526
33	1,2988	2,3847	3,6721	78	9,4093	9,6192	2,0447
34	1,3490	2,4124	3,5766	79	10,2891	10,4817	2,0374
35	1,4004	2,4415	3,4869	80	11,3426	11,5175	2,0308
36	1,4531	2,4721	3,4026	81	12,6275	12,7849	2,0249
37	1,5071	2,5043	3,3233	82	14,2307	14,3706	2,0196
38	1,5625	2,5380	3,2485	83	16,2887	16,4110	2,0150
39	1,6195	2,5735	3,1780	84	19,0287	19,1335	2,0110
40	1,6782	2,6108	3,1114	85	22,8600	22,9474	2,0076
41	1,7386	2,6500	3,0485	86	28,6013	28,6710	2,0049
42	1,8008	2,6913	2,9889	87	38,1023	38,2146	2,0027
43	1,8650	2,7346	2,9325	88	57,2725	57,3074	2,0012
44	1,9314	2,7803	2,8791	89	114,5799	114,5974	2,0003
45	2,0000	2,8284	2,8234	90	∞	∞	2,0000

Proiectio aequatorea.

§. 12. Ponatur arcus $A p = h = 90°$, eruntque poli p, p' in horizonte, eorumque proiectio P, P' in mappa aequaliter a puncto A distabit; erit enim $AP = AP' = 2$, ideoque recta PP', quae proiectionem refert meridiani $p'Ap$, erit $PP' = 4$, quae simul est chorda omnium meridianorum communis, quorum radius $P\Gamma$ ita determinatur: $P\Gamma = 2 \operatorname{cosec.} \theta$, existente inclinatione a meridiano per A transeunte $= \theta$. Omnes hi meridiani $P'SP$ a parallelis MEN, $M'E'N'$, parallelorum egf, $e'g'f'$ proiectis, ad angulos rectos intersecantur, pro quibus est Tab. VI. fig. 2.

$$A E = 2 \operatorname{tang.} (45° - \tfrac{1}{2} g);$$
$$A F = 2 \operatorname{tang.} (45° + \tfrac{1}{2} g),$$

hinc $EF = 4 \operatorname{tang.} g$ et radius paralleli $EI = 2 \operatorname{tang.} g$ existente $g = pe = pf$. Distantia denique centri a zenith est $AI = 2 \operatorname{sec.} g$. His formulis superstructa est secunda tabula ad conficienda Hemisphaeria superius et inferius dicta, quibusque vulgo mappae generales globi terraquei repraesentari solent.

Pro quarta columna huius tabulae, radium meridiani exhibens, notandum est eius argumentum non esse eleuationem aequatoris, sed inclinationem meridiani cuiuslibet a meridiano per zenith transeunte, ad quam igitur numeri graduum in prima columna occurrentes sunt pro quarta columna referendi, cui argumentum particulare adiicere superfluum visum est.

§. 13. Consideretur punctum paralleli quodcunque v, quod proiectum cadat in V, voceturque angulus $epv = s$ Tab. V. fig. 5.

et

et in proiectione $EIV = S$, et inuestigetur relatio inter S et s, siue ex cognito angulo s angulus ipsi in proiectione respondens S determinetur. Hunc in finem ponatur arcus verticalis $A v = v$, atque ex triangulo sphaerico $A p v$, in quo dantur arcus $A p = h$, $p v = g$ et angulus $A p v = s$ deducitur

$$\text{cos. } v = \text{cos. } g \,.\, \text{cos. } h + \text{sin. } g \text{ sin. } h \text{ cos. } s,$$

quo inuento habebitur recta $O v$, cum sit $A O v = \frac{1}{2} v$ et $O v = 2 \text{ cos. } \frac{1}{2} v$; vnde porro, ob $O v \,.\, O V = O A^2$ deducitur $O V = \frac{2}{\text{cos. } \frac{1}{2} v}$. Iam cum sit $e f = 2 g$, erit chorda huius arcus $2 \text{ sin. } g$, ideoque radius plani circulum minorem $e v f$ abscindentis $= \text{sin. } g$, vnde concludimus fore arcum $e v = s \text{ sin. } g$; in proiectione vero est arcus $E V = S \,.\, I E$, quorum iam arcuum $e v$ et $E V$ elementa debent esse in ratione distantiarum a puncto O.

§. 14. Supra §. 11. inuenimus esse

$$E F = 2 \left(\text{tang. } \tfrac{h+g}{2} - \text{tang. } \tfrac{h-g}{2}\right).$$

Est vero

$$\text{tang. } a - \text{tang. } b = \frac{\text{sin. } a}{\text{cos. } a} - \frac{\text{sin. } b}{\text{cos. } b} = \frac{\text{sin. } (a-b)}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}, \text{ siue}$$

$$\text{tang. } a - \text{tang. } b = \frac{2 \text{ sin. } (a-b)}{\text{cos. } (a-b) + \text{cos. } (a+b)};$$

expressio igitur pro diametro paralleli proiecti transformatur in hanc:

$$E F = 2 I E = \frac{4 \text{ sin. } g}{\text{cos. } g + \text{cos. } h},$$

qua in vsum vocata ad sequentem perducimur analogiam

$$d s \text{ sin. } g : \frac{2 d S \text{ sin. } g}{\text{cos. } g + \text{cos. } h} = O v : O V = 1 : \frac{1}{\text{cos. } \frac{1}{2} v^2},$$

ex

ex qua conficitur haec aequatio:

$$dS = \frac{ds\,(\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b)}{2\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}v^2} = \frac{ds\,(\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b)}{1 + \text{cof.}\, v},$$

fiue

$$dS = \frac{ds\,(\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b)}{1 + \text{cof.}\, g\,\text{cof.}\, b + \text{fin.}\, g\,\text{fin.}\, b\,\text{cof.}\, s},$$

atque ex hac aequatione ope integrationis valorem ipfius arcus S erui oportet, quod negotium fequenti modo commodiffime perficitur.

§. 15. Ponatur breuitatis gratia

$$1 + \text{cof.}\, g\,\text{cof.}\, b = p \quad \text{et} \quad \text{fin.}\, g\,\text{fin.}\, b = q,$$

eritque

$$dS = \frac{(\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b)\,ds}{p + q\,\text{cof.}\, s}, \text{ vnde fit}$$

$$S = (\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b)\int \frac{ds}{p + q\,\text{cof.}\, s}.$$

Statuatur porro $\text{cof.}\, s = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, eritque $\text{fin.}\, s = \frac{2z}{1 + zz}$ et $ds\,\text{cof.}\, s = \frac{2(1 - zz)\,dz}{(1 + zz)^2}$, ideoque $ds = \frac{2\,dz}{1 + zz}$. His valoribus fubftitutis formula integranda erit

$$\int \frac{ds}{p + q\,\text{cof.}\, s} = 2\int \frac{dz}{p(1 + zz) + q(1 - zz)},$$

quae ita repraefentetur concinnius:

$$\int \frac{ds}{p + q\,\text{cof.}\, s} = \int \frac{dz}{p + q + (p - q)\,zz}.$$

Cum igitur nouerimus effe

$$\int \frac{dx}{bb + aaxx} = \frac{1}{ab}\,\text{A tang.}\,\frac{ax}{b}, \text{ erit}$$

$$\int \frac{ds}{p + q\,\text{cof.}\, s} = \frac{2}{\sqrt{(pp - qq)}}\,\text{A tang}\; z\sqrt{\frac{p - q}{p + q}},$$

ideoque

$$S = \frac{\text{cof.}\, g + \text{cof.}\, b}{\sqrt{(pp - qq)}}\,.\,2\,\text{Arc. tang.}\; z\sqrt{\frac{p + q}{p - q}}.$$

 §. 16.

§. 16. Iam vero notetur esse

$$p p = 1 + 2 \operatorname{cos.} g \operatorname{cos.} h + \operatorname{cos.} g^2 \operatorname{cos.} h^2 \text{ et}$$

$$q q = (1 - \operatorname{cos.} g^2)(1 - \operatorname{cos.} h^2),$$

consequenter

$$p p - q q = \operatorname{cos.} g^2 + \operatorname{cos.} h^2 + 2 \operatorname{cos.} g \operatorname{cos.} h, \text{ et}$$

$$\sqrt{(p p - q q)} = \operatorname{cos.} g + \operatorname{cos.} h.$$

Tum vero est

$$p - q = 1 + \operatorname{cos.} (g + h) = 2 (\operatorname{cos.} \tfrac{g + h}{2})^2 \text{ et}$$

$$p + q = 1 + \operatorname{cos.} (g - h) = 2 (\operatorname{cos.} \tfrac{g - h}{2})^2, \text{ ideoque}$$

$$\sqrt{\frac{p - q}{p + q}} = \frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g - h)}. \text{ Denique est}$$

$$z = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos.} s}{1 + \operatorname{cos.} s}} = \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s.$$

His omnibus substitutis obtinebitur haec relatio inter S et s:

$$S = 2 \text{ Arc. tang. } \frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g - h)} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s, \text{ siue}$$

$$\operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} S = \frac{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g + h)}{\operatorname{cos.} \frac{1}{2}(g - h)} \operatorname{tang.} \tfrac{1}{2} s,$$

cuius ope pro quouis puncto v paralleli cuiuscunque punctum ipsi respondens V in proiectione definiri poterit.

Tab. V. Fig. 1. §. 17. Sit $h = 0$, erit polus in puncto A, quo casu, vt supra vidimus, paralleli proiecti sunt circuli concentrici. Hoc ergo casu erit $\operatorname{tang.} \frac{1}{2} S = \operatorname{tang.} \frac{1}{2} s$, siue $S = s$, hoc est $YAZ = yqz$, vti requiritur.

Tab. VI. fig. 3. §. 18. Sit $pe = pf = g = 90°$, erit ef aequator, pro cuius proiectione est

AP

$A P = 2 \text{ tang. } \tfrac{1}{2} h,$

$A E = 2 \text{ tang. } (\tfrac{1}{2} h - 45^\circ) = - 2 \text{ tang. } (45^\circ - \tfrac{1}{2} h),$

$A F = 2 \text{ tang. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} h),$

$A I = 2 \text{ tang. } h,$

$I E = I F = \frac{2}{\text{cos. } h}.$

Relatio autem inter angulos $e p v = s$ et $E I V = S$ hac aequatione exprimitur:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\text{cof. } (45^\circ + \tfrac{1}{2} h)}{\text{cof. } (45^\circ - \tfrac{1}{2} h)} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} s,$$

quae, introducendo anguli h complementum, quod ſit m, ita reducitur: $\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \text{tang. } \tfrac{1}{2} m \times \text{tang. } \tfrac{1}{2} s.$

§. 19. Si fuerit $A p = h = 90^\circ$, ideoque recta $A O$ aequator, conſideretur in parallelo $e' g' f'$ punctum quodcunque v', pro quo ſit eleuatio aequatoris $p' v' = p' e' = p' f' = g$ et diſtantia a primo meridiano $A p' O$, ſeu arcus $e' v' = s$, et proiecto puncto v' in V' relatio inter angulos $E' I' V'$ et $e' p' v'$ hac aequatione exprimetur: Tab. VI. fig. 2.

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \frac{\text{cof. } (\tfrac{1}{2} g + 45^\circ)}{\text{cof. } (\tfrac{1}{2} g - 45^\circ)} \text{ tang. } \tfrac{1}{2} s,$$

ſiue introducendo loco eleuationis aequatoris $p' e' = g$, eleuationem poli, ſeu latitudinem loci v', ſcil. $A e' = k$, erit $g = 90^\circ - k$, ergo $\text{tang. } \tfrac{1}{2} S = \text{tang. } \tfrac{1}{2} k \times \text{tang. } \tfrac{1}{2} s.$ *Inter arcus parallelorum in ſphaera et in proiectione haec ergo inſignis ſubſiſtit relatio, vt ſemi-arcuum tangentes ſint in ratione tangentis ſemi-eleuationis poli.* Huic igitur formulae maxime notatu dignae ſuperſtructa eſt tabula tertia ampliſſima momentis proiectionis aequatoreae addenda, cuius argumenta ſunt longitudo et latitudo loci propoſiti v'.

 §. 20.

§. 20. Haec quidem tabula, angulos E I V exhibens, ad vſus practicos nec admodum neceſſaria videtur, nec ſatis accommodata. Cum enim vſus circini Practicis merito potior ſit minus certa angulorum menſura, conſultius forſan fuiſſet chordam E V in tabula expoſuiſſe. Verum haec chorda ſubſidio binarum poſtremarum tabularum facillime determinatur. Eſt enim chorda haec $EV = IV$ ſin. $\frac{1}{2}$ EIV; vnde res tantum eo redit, vt ſinus ſemiſſis angulorum praecedentis tabulae in radios parallelorum, quos tabula antecedens ſiſtit, ducantur, qui calculus, ſi vſus poscat, facile perficere poterit.

§. 21. Non inutile videtur hic coronidis loco ſequens Problema addidiſſe:

Tab. VI. Fig. 4. *Data diſtantia duorum locorum* x *et* y *a puncto O, nec non diſtantia punctorum proiectorum* XY *in mappa, invenire diſtantiam locorum in ſphaera.*

Huius problematis ſolutio hac aequatione continetur:

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^3},$$

cuius veritatem ita oſtendo. Cum ſit $Ox.OX = Oy.OY$, triangula Oxy et OYX erunt ſimilia, conſequenter $xy : Oy = XY : OX$, vnde deducitur $xy = \frac{XY \,.\, Oy}{OX}$. Eſt vero $OX = \frac{OA^2}{Ox}$, ideoque $xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^2}$; vnde cum ſit chorda $xy = OA$ ſin. $\frac{1}{2}\,xCy = OA$ ſin. $\frac{1}{2}\,xy$, erit

$$\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}\,xy = \frac{XY \,.\, Ox \,.\, Oy}{OA^3}.$$

PHY-

PHYSICA.

REFLEXIONS SUR L'ANCIENNETÉ RELATIVE DES ROCHES ET DES COUCHES TERREUSES QUI COMPOSENT LA CROUTE DU GLOBE TERRESTRE.

par
J. J. FERBER.

Premiere Section.

§. 1.

Si l'hiſtoire des hommes & de leurs établiſſemens politiques ſe perd dans l'obſcurité des ſiecles, & ne fournit guère que des fables & des traditions douteuſes ſur l'origine, les migrations & les premiers exploits des peuples; il n'eſt pas étonnant que l'hiſtoire ancienne de la terre ſoit encore plus imparfaite, & nous laiſſe dans l'ignorance ſur l'état primitif de notre globe. Ayant ſans doute été produit avant qu'aucun être humain n'eût exiſté, perſonne n'a pû aſſiſter aux grands événemens phyſiques qui en occaſionnoient & accompagnoient la formation, aprés que l'Architecte de l'Univers, par un effet de ſa puiſſance, avoit tiré du néant les premiers élemens de matiere qui en devoient compoſer la pâte. Il eſt donc impoſſible d'en avoir quelque relation autentique. Celle de Moïſe n'étant ſûrement pas inſérée au livre de la Geneſe pour nous inſtruire de la Géographie phyſique, il me paroit hors de propos d'y vouloir puiſer des lumieres que l'auteur lui même ne ſe propoſoit pas d'y répandre. Indiquant les effets & les productions ſucceſſives de la création, il n'entre pas dans l'expoſé des cauſes & des moyens phyſiques qui leur donnoient naiſſance & agiſſoient ſuivant le plan & l'ordre préſcrit par le Créateur. Tous ceux qui tâchent de fonder leurs théories géonétiques ſur le récit de Moïſe, ſe trouvent par conſéquent dans la néceſſité de ſupléer par leurs commentaires à ce qu'y manque & d'expliquer le ſens du texte à leur gré là où il eſt emblematique. Il arrive de là que leurs tentatives n'aboutiſſent à rien, ſi non à donner leurs propres idées pour celles de Moïſe & à les faire valoir ſous l'autorité de l'Ecriture ſainte. L'objet de la révélation étant plus ſublime & d'un autre genre que celui du reſte des connoisſences humaines, il ne faut pas y chercher des éclairciſſemens étrangers à ſon but, ſur la formation de la terre non plus que ſur l'Aſtronomie, la Chronologie ou la prétendue transmutation des métaux, dont pluſieurs alchymiſtes ont crû trouver la clef dans certains paſſages de l'Ecritùre.

§. 2. Le défaut de mémoires dont nous venons de parler, touchant la formation de la terre & ſon état primitif, ſe manifeſte également, quand il eſt queſtion des changemens ſucceſſifs que notre globe a eſſuyés. Les révolutions qu'il a éprouvées dans ſon enfance, ou bientot aprés ſa formation, nous ſont abſolument inconnues, & même parmi celles qui ſont arrivées dans les ſiecles moins recu-

reculés, il n'y en a que quelques unes, dont l'hiſtoire ou la tradition nous ait transmis quelque monument, mais toujours trop défectueux pour nous donner la moindre ſatisfaction. On peut même ſoutenir, qu'il n'y a aucune relation des tems antérieurs au ſiecle préſent (pour ne pas raccourcir davantage ce terme) qui rempliſſe ſon but & nous inſtruiſe ſuffiſamment de l'événement dont elle traite, ſoit pour en connoitre l'effet, plus ou moins étendû à la ſurface de la terre, ſoit pour juger des cauſes qui l'ont produit & pour en éclaircir la théorie phyſique. On n'en eſt point ſurpris, quand on reflechit qu'il n'y-a que peu de tems qu'on a cultivé avec ſuccés la Minéralogie, la Chymie & la Géographie phyſique. L'Ethna, le Véſuve, & d'autres Volcans ont jetté du feu & lancé des laves & des cendres depuis bien des ſiecles. On ignore pourtant abſolument l'époque du commencement de leurs éruptions; & ſi quelques auteurs ont marqué le jour, la durée & la force de quelques unes arrivées dans les derniers ſiecles, il s'en faut de beaucoup, que leurs relations nous mettent au fait des ravages que les pays, où ces Volcans ſont ſitués, ont ſoufferts d'un tems à l'autre, & quel en étoit à chaque repriſe l'effet ſur les environs. Quant à la théorie des Volcans, on ſait que ce n'eſt que depuis peu qu'on a pû en établir une aprés l'examen de ces montagnes & des diverſes productions qu'elles rejettent ou vomiſſent. Combien de Volcans éteints ont vomi de leur ſein des torrents de lave & de feu; combien de tremblemens de terre ont ſecoué le globe dans les ſiecles les plus reculés, dont l'hiſtoire & les chroniques les plus anciennes gardent le plus profond ſilence! on a de tout tems exploité des mines en différents pays; mais ce n'eſt que de nos

 jours

jours qu'on s'applique à l'étude des montagnes, qu'on examine la compoſition & l'arrangement de leurs maſſes & les changemens, bouleverſemens & écroulemens qui leur arrivent. Chaque débordement d'un fleuve excite à préſent l'attention des Naturaliſtes qui s'empreſſent de remarquer les effets qui en réſultent & de les transmettre à la poſtérité. Les deſcriptions géographiques, topographiques & politiques qu'on publie actuellement presque de toutes les provinces, ſerviront auſſi un jour à informer la poſterité de l'état dans lequel ſe trouvoit la ſurface de la terre au 18^{ieme} ſiecle, au lieu que la Géographie ancienne nous inſtruit fort peu & fort mal du phyſique des pays dans les tems qui en font l'objet. Si depuis le commencement du monde il y avoit eu des obſervateurs habiles & attentifs à toutes les cataſtrophes plus ou moins univerſelles que notre globe a eſſuyées; s'ils les avoient conſignées dans les faſtes de l'hiſtoire avec le même zéle, avec lequel on nous a conſervé la mémoire des meurtres, des cruautés & des égaremens du genre humain; ſi enfin ces monumens avoient échappé aux ravages du tems & à la barbarie des conquerans: nous aurions à préſent ce qui nous manque abſolument, l'Hiſtoire complette de la terre, la Chronologie phyſique de ſes révolutions.

§. 3. Dépourvûs comme nous le ſommes de toute relation exacte en ce genre, nous n'avons qu'un ſeul moyen de juger de la conſtitution primordiale de notre globe & des chocs qui l'ont agité; c'eſt d'examiner attentivement l'état actuel de ſa croûte & de voir, ſi on n'y trouve pas quelques traces de l'ancienne diſpoſition des matieres, de leur altération ou translocation occaſionnée par

par les cataſtrophes ignorées, avec des indices des cauſes capables d'avoir produit de pareils effets. Remontant ainſi la riviere, nous arriverons à ſes ſources, ſans doute avec beaucoup de peine; mais l'objet eſt trop intereſſant & trop digne de la curioſité de l'homme qui raiſonne, pour l'abandonner à cauſe des difficultés qui ſe préſentent, ſurtout quand il y a apparence de les ſurmonter. Nous parviendrons par ces recherches à des vérités qui doivent intereſſer tout habitant de la terre, qui ſe ſoucie de connoître le domicile où il ſe trouve fixé pour quelque tems, dans des vûes plus nobles aſſurement que pour y vegéter dans l'inaction ou l'indifference. Ces recherches avanceront encore nos connoiſſances en Minéralogie & dans l'art d'exploiter les mines, à meſure, qu'au lieu de travailler au hazard, nous dévélopperons les rapports & remarquerons la diſpoſition des différentes roches qui cachent ou environnent les métaux, les ſels & d'autres foſſiles utiles.

Je n'ignore pas qu'il y a des ſavans qui, effrayés de la peine de fouiller les archives de la nature, trouvent plus commode de forger quelque hypotheſe géonétique, à l'aide de laquelle ils peuvent tout expliquer, même jusqu'aux moindres circonſtances de la formation du globe & les moindres changemens qu'il a ſubi depuis. L'eau, le feu & tous les élemens, ainſi que toutes les forces actives de la nature, ſe prêtent facilement a leurs idées. Ils ſçavent remplir adroitement les lacunes de l'hiſtoire par leurs propres conjectures & accommoder à leur ſyſteme les obſervations réelles, faites par d'autres phyſiciens, non obſtant qu'elles ſe trouvent ſouvent en contradiction ouverte avec leurs aſſertions.

Donnant une forme agréable à leurs ouvrages & y jettant un certain interét par la beauté du ſtile & quelques saillies, hazardées à propos, ils ſont ſurs de trouver des partiſans, qui ſe laiſſent éblouir par leur éloquence quand ils ont l'imagination bien échauffée. Il eſt certain, que ces auteurs nous apprennent plus dans un quart d'heure que tous les obſervateurs réunis ne nous diront peut-être dans pluſieurs ſiecles à venir. Mais ſauf tout égard dû à leurs talents & à leur génie, il eſt bon de remarquer, que ce n'eſt pas un roman phyſique & amuſant, ou la deſcription d'un monde qui n'exiſte pas, que nous deſirons. Il s'agit au contraire de connoître le monde réel, tel qu'il eſt en effet & tel qu'il étoit anciennement. Il ne faut donc pas imaginer, mais découvrir & étudier ſon état préſent & tâcher d'en tirer des conſéquences juſtes ſur le paſſé. L'inverſion de cet ordre nous feroit anticiper les concluſions & nous mettrions les réſultats, ou ce qui devroit reſulter, à la place des prémiſſes ou principes, ce qui eſt le moyen le plus ſûr de tomber dans l'erreur & de ne ſavoir rien avec certitude. Tenons nous donc aux obſervations & voyons ce qu'on en peut déduire par une ſuite naturelle de raiſonnemens.

§. 4 Il ſuffit de jetter un coup d'oeil ſur la ſurface de notre globe pour ſe convaincre qu'elle conſiſte actuellement ou de couches de terre peu cohérente, mêlée de cailloux de différentes eſpeces, ou de roches, dont la hauteur & la compoſition varie infiniment; & qu'une grande partie de cette ſurface eſt couverte de l'eau des mers, des rivieres &c. L'examinant plus attentivement, on trouve, que les rochers plus ou moins élevés ſe joignent

nent à leurs pieds & forment des chaines qui parcourent plusieurs pays, sans aucune interruption, qu'il y a d'autres pays plats entre ces chaines, où il est rare de trouver quelque montagne isolée, mais dont le sol est ordinairement composé de plusieurs couches terreuses, plus ou moins horizontales, portant en certains endroits de petites élévations, connues sous le nom de collines; & enfin, que le fond de la mer ou d'autres bassins d'eau ressemble parfaitement à la surface du continent (Voyez les digressions relatives à ce mémoire N°. I. vers la fin). Il y a des bancs de sable, de craie, de marne, d'argile & de cailloux sur l'un & l'autre; les chaines de montagnes passent sous l'eau d'une côte d'un bord à l'autre, & ne laissent que leurs pics & plateformes à decouvert, lesquels forment nos iles (*). Partout où on a fouillé la terre à quelque profondeur considérable, même dans les pays à couches, on a enfin rencontré quelque roche solide, d'ou il faut conclure que le globe est couvert d'une croute pierreuse qui l'environne de toute part comme une cuirasse. Il seroit même difficile de concevoir, comment il pourroit garder sa forme & la solidité nécessaire, s'il y avoit de grands trous entre les chaines de montagnes, souvent fort éloignées l'une de l'autre, percés jusqu'au centre, ou à travers du globe, qui ne fussent remplis que d'eau, de sable mouvant, ou d'autres terres déliées, surtout quand on réflechit

(*) Tous les navigateurs en fournissent les preuves dans les nombreux journaux de leurs voyages. Je ne citerai ici que le dernier voyage du Capitaine *Cook* Vol. I. p. 73, 74 &c. edit. originale. On peut aussi consulter ce que dit M. le *C. de Buffon* sur les Iles maldives (Hist. nat. T. I. p. 252 & 253.) & Mr. l'Abbé *Palassecu* sur l'étendue des bancs de montagnes (Essai sur la Mineral. d s monts pyrénées, Introd. p. XVI. & XVII.).

flechit ſur les accidents qui ſecoueroient à chaque inſtant les parties d'un tel édifice & les mettroient hors d'équilibre une fois établi.

§. 5. Pourvû qu'on faſſe la moindre attention aux phénomenes naturels qui arrivent pendant le court éſpace de la vie humaine, on aura occaſion de ſe convaincre par l'experience, que la ſurface de notre globe ſouffre des changemens continuels, plus ou moins conſidérables ſuivant la cauſe qui les produit & l'énergie avec laquelle elle agit. Ces changemens dépendent ordinairement ou de la qualité des matieres qui compoſent cette ſurface, ou de l'action de l'air & de l'eau, ou enfin du feu & d'autres matieres élaſtiques renfermées dans l'intérieur de la terre. Les dernieres ſont les plus violentes & n'échappent guere à la connoiſſance des contemporains les moins curieux, leurs effets & les ſymptomes qui les accompagnent, étant trop allarmants. Les cauſes dont les autres changemens dépendent, opérent bien plus lentement & plus doucement que le feu & les vapeurs reſerrées, mais ne diſcontinuant jamais de ronger & d'altérer la croute du globe, les viciſſitudes qu'elle en éprouve, ne ſont pas moins réelles & moins grandes, quoiqu'elles demandent plus de tems & deviennent par là inſenſibles à l'obſervateur dont la carriére finit trop tôt. Ainſi les plus hautes montagnes s'abaiſſent continuellement. La pluie, la neige, les vapeurs humides les pénetrent; les ruiſſeaux, les torrens les ſillonnent; l'air, la chaleur, la gelée les amolliſſent, les rongent & les fendent. Tout contribue peu à peu à leur defaite. Les parties les plus dures reſiſtent plus longtems que les tendres, à ces forces deſtructives. Voilà l'origine

rigine des inégalités, des ravins, des précipices & des roches éſcarpées dans les montagnes Les déblais des hauteurs tombent dans les vallées, les rivières charient & roulent une quantité immenſe de ſable, de limon & de cailloux, qu'elles dépoſent ſucceſſivement ſur les païs plats & en emportent le reſte jusqu'à la mer dont elles comblent le fond. Partout il en nait des couches nouvelles, des atterriſſemens, des landes, des amas de pierres & de terres, des collines & des monticules. L'eau filtrant à travers les pores & les petites fentes des roches & des collines en détache quelques parties qu'elle entraine, transporte & depoſe ailleurs. C'eſt ainſi qu'elle creuſe des grottes qui occaſionnent enfin l'affaiſſement du terrein ſupérieur, d'une étendue ſouvent trés-conſidérable. Ces grottes ſouterraines, mais encore plus les Volcans & les tremblement de terre, creuſent, fendent & font écrouler des montagnes; les derniers ſur tout renverſent quelquefois des villes, des provinces entieres, que la mer engloutit, ou qui rentrent dans le ſein de la terre, ou bien elles reſtent couvertes de ruines, de cendres & de laves à plaſieurs repriſes. D'autres montagnes s'élevent ſubitement par l'expanſion du feu & des vapeurs élaſtiques ſouterraines. Quantité d'isles ont été produites par ces convulſions. On ſait auſſi que chaque éruption d'un Volcan change la face du païs circonvoiſin. Les inondations presque annuelles des rivieres ne changent pas moins la ſurface de la terre par tout où elles arrivent, elles devaſtent les campagnes les mieux cultivées & après l'écoulement ou l'exſiccation des eaux elles laiſſent en arriere leur limon qui y forme de nouvelles couches & durcit avec le tems. En un mot: la ſurface de la terre ſubit des changemens continuels; chaque événement donne naiſſance à une nouvelle couche, colline ou montagne, par la deſtruction d'autres couches & d'autres roches dont il emporte les débris, ſouvent à une grande diſtance de leur lieu natal.

§. 6. Si tout cela ſe paſſe ſous nos yeux, on peut bien juger que les mêmes changemens ont dû avoir lieu dans des tems anterieurs, & que leur nombre pendant pluſieurs milliers d'années, écoulés depuis la création du monde jusqu'à nos jours, doit être trés conſiderable. Il eſt encore facile de s'imaginer que les révolutions de la Nature naiſſante ont dû être plus fréquentes, plus violentes, & produire de plus grands effets qu'elles ne font aujourd'hui, tandis que le globe n'avoit pas encore pris la conſiſtance, qui rend préſentement la diſſolution, la réaction & la translocation des matieres dont il eſt composé, plus difficile qu'elle n'étoit alors. Quelques unes de ces anciennes révolutions dont l'hiſtoire ou les traditions de presque toutes les nations ont conſervé quelque mémoire, ſont décrites de maniere qu'on ne ſauroit douter de leur énergie & de leur effet presque univerſel. Ce ſont ces ſortes de cataſtrophes primitives qui ont le plus contribué à donner peu à peu à la ſurface du globe cette forme, cet arrangement des matieres, cette diſpoſition exterieure qu'il devoit avoir pour devenir, pour la nature végétale & animale, un domicile approprié aux beſoins, à la ſureté & à la nourriture des êtres qui devoient l'orner & l'animer. Les traces qui en reſtent dans les montagnes ſont trop marquées pour qu'on puiſſe les méconnoitre & nous mettent ſouvent en état de deviner la cauſe qui les occaſionnoit. Ainſi on y trouve des preuves les plus décifives qu'il qu'il doit avoir été un tems, où la mer couvroit les cimes des plus hautes montagnes & par conſéquent qu'elle a abandonné ſon ancien niveau. A peine peut on faire un pas ſur le globe, dit l'auteur de l'hiſtoire des hommes (Tome 13me) ſans y voir des veſtiges de ſes conquétes ſur l'océan. Si la mer fait quelque invaſion par ci par là et gagne du terrein ſur les côtes actuelles de quelques païs bas, c'eſt un rien vis à vis des hauteurs qu'elle baignoit autrefois, & le nombre de pareils exemples n'entre point en comparaiſon avec celui des endroits anciennement maritimes & propres à l'abordage des vaiſſeaux, endroits qui à préſent ſont à Sec & trés éloignés de la mer. Il eſt même probable que la retraite des eaux étoit fort lente. Les corps marins pétrifiés qu'on trouve par couches en pluſieurs montagnes, depuis la cime jusqu'à la racine; différentes couches ſécondaires ſur les pentes & plate formes des hautes montagnes; & les traces du paſſage des eaux, les ſillons à peu prés horizontaux ſur les flancs éſcarpés des rochers (*), en ſont autant de preuves. Au reſte, le ſentiment contraire: que les eaux ſe ſont écoulées tout d'un coup & qu'il falloit attribuer les pétrifications au déluge univerſel, ne change rien ici dans les réſultats; car il faut toujours avouër que la mer a baiſſé, laiſſant des reſtes & des traces de ſon ancien niveau ſur les hauteurs. C'eſt ſans doute une trés grande révolution arrivée à la ſurface du globe qui n'a pas manqué d'altérer conſidérablement les parties ſolides dont il eſt compoſé, & de déranger leur diſpoſition primitive, ſoit que la retrai-

*) Mr. de *Sauſſure*: Voyag. aux alpes T. I. p. 156, 157, 162, 163, 164, 173 &c.

traite des eaux ait été lente ou rapide. Dans le dernier cas, le déplacement des matieres qui en résultoit, auroit naturellement dû être plus grand à cause de l'impétuosité du découlement. L'idée du déluge suppose en outre un double dérangement pareil, pendant l'inondation aussi bien que pendant le décroissement de l'eau. Mais un seul déluge n'auroit pas suffi pour ranger les corps marins pétrifiés par couches, l'une sur l'autre, de la base jusqu'au sommet de plusieurs alpes calcaires, comme on les trouve en effet; car la chûte précipitée des eaux en auroit fait tout au plus un seul dépot au fond; elle n'auroit pas laissé plusieurs sillons paralleles sur les flancs, ou différentes couches secondaires sur les pentes des alpes à différentes hauteurs. En un mot: il faudroit admettre plusieurs déluges ou inondations successives, si on vouloit dériver tous ces effets de ces sortes d'événemens. Or, plus ces inondations auroient été nombreuses, plus la surface de la terre en auroit dû souffrir, se défigurer & se changer. Mais il nous suffit d'avoir remarqué que la retraite la plus lente des eaux n'auroit pas manqué non plus d'altérer l'organisation primitive de l'écorce du globe, à force de la ronger en certains endroits, d'emporter & déposer en d'autres les débris & le limon, pour en former de nouvelles couches.

§. 7. Le découlement de l'eau de la mer & les courans soumarins de l'ancien océan, ont nécessairement dû creuser des vallées, quand la masse des montagnes n'avoit pas encore pris partout la consistance pierreuse, qu'elle a aujourd'hui. Il faut au moins convenir qu'elle n'étoit pas alors partout également ferme ou dure, ne l'étant pas encore à présent. Plusieurs vallées ont été aussi

creu-

creuſées par les rivieres. Le Rhône ronge encore continuellement ſon lit (*). D'autres fleuves changent quelquefois leur cours en s'ouvrant un chemin à travers des couches moins dures. Quel effet n'ont ils pas dû produire, lorsqu'ils étoient plus larges & plus rapides! La plupart des rivieres hauſſent pourtant leurs lits & deviennent de jour en jour moins profondes, à cauſe du limon & des pierrailles qu'elles charient des montagnes, où elles prennent naiſſance, & des couches terreuſes qu'elles traverſent. Le fond de la mer reçoit d'elles les mêmes matieres & ſe couvre de nouvelles couches qui cauſent des atterriſſemens vers les côtes & s'augmentent des dépouilles de coraux, de coquilles & d'autres animaux & plantes marines. L'effet qui en réſulte, combiné avec celui de la dégradation des montagnes dont nous avons déja parlé (§. 5.) eſt, que la plupart des profondeurs creuſées anciennement ſe comblent de débris de montagnes. de végétaux & d'animaux, & tendent peut être à arriver au niveau des éminences qui ſurplombent au deſſus d'elles, à meſure que les hauteurs diminuent, s'abaiſſent & ſe prêtent à de nouvelles excavations. Il peut arriver un jour, & peut être eſt il arrivé deja pluſieurs fois, que, comme dit un certain auteur, ce qui eſt à préſent bas-fonds ou vallée, ou plaine inférieure, devienne avec le tems ſommet de montagne, plateau ou pic ſaillant, & cela par quelque nouvelle excavation ou quelque autre deſtruction du ſol voiſin. En un mot: la ſurface de la terre n'eſt plus la même qu'elle étoit au commencement. Elle change continuellement par la translocation des matieres dont

 elle

(*) Voy. Mr. de *Sauſſure* T. I. p. 332, 333.

elle est composée, & elle a changé en tout tems depuis la création du monde jusqu'à présent. Il y a vraisemblablement trés-peu d'endroits sur le globe qui ayent échappé aux suites de la vicissitude générale; mais les révolutions anciennes étoient plus fortes, plus considérables & plus grandes qu'elles ne sont ordinairement aujourd'hui. Chaque révolution a produit & produit encore une ou plusieurs nouvelles couches à la surface du globe par le délitement des matieres apportées d'autre part & détachées de l'intérieur ou de l'extérieur de la terre. Ces couches, plus ou moins terreuses ou pierreuses, sont plus ou moins épaisses, larges & étendues suivant l'espece, la force & la durée de la révolution qui les occasionnoit. Conclûons de là, que *les montagnes ou roches & couches terreuses de différents genres, dont la croute du globe est actuellement composée, différent beaucoup en date de naissance & en rang d'ancienneté.*

§. 8. Il-y-a longtems qu'on a reconnû en partie cette vérité & qu'on a distingué les montagnes en deux ou trois classes par rapport à leur ancienneté; mais je crois pouvoir prouver qu'il faut déja augmenter le nombre de ces classes, & qu'on a mêlé & confondû dans la même classe, des montagnes ou roches dont les époques de naissance sont trés-éloignées l'une de l'autre. Je ne doute pas non plus que ces classes ne se multiplient avec le tems à mesure que nous augmenterons nos connoissances orologiques & qu'on parvient à observer l'arrangement & l'adossement général de plusieurs variétés de roches & de couches, aux quelles on ne sauroit pas encore assigner avec certitude la place convenable dans la Chronologie phy-

physique du globe. Il est clair, qu'*une roche inférieure, ou qui sert de base & d'appui à quelque autre, adossée sur elle, est plus ancienne que la supérieure* (*); mais c'est la difficulté d'observer cette superposition en certains endroits qui embarrasse quelques fois. Alors il ne faut pas se contenter d'une seule observation; au contraire il faut multiplier ces expériences partout où l'on peut, & choisir de tels endroits où la Nature s'est expliquée avec plus de clarté & où rien n'empeche de découvrir la vérité. Les résultats de plusieurs observations exactes, faites en plusieurs lieux convenables, nous tireront de l'incertitude. Nous en dirons d'avantage plus bas & tâcherons en même tems d'indiquer quelques précautions nécessaires, à fin qu'on ne précipite pas ses conclusions à cause de pareilles difficultés ou à cause de certaines observations locales, qui au premier coup d'oeil paroissent contraires à des verités reconnûes, mais qui ne le sont pas en effet. Examinons à présent la classification reçûe des montagnes, les sentimens des auteurs sur leur ancienneté relative, & voyons ensuite ce que les observations multipliées des Naturalistes les plus habiles nous obligent d'y changer.

§. 9.

(*) "Toute couche superposée à une autre hétérogene est plus récente „ que l'inférieure. Il ne manque que des observations & il ne faut „ que quelques méditations locales sur la superposition réciproque „ des granits &c. &c. pour écrire l'histoire ancienne du monde „ minéral, & pour que cette partie de l'histoire naturelle, qu'on „ considere encore comme absolument systématique sans la connoitre, soit susceptible d'une sorte de demonstration, fondée sur „ le principe des superpositions." Description du Volcan de Boutaresse en Auvergne par Mr. l'Abbé de Soulavie, dans le Journal de Physique 1783. Avril. p. 292.

§. 9. On appelle *primitives* toutes les roches des hautes montagnes qui ne contiennent point des corps marins pétrifiés, soient graniteuses, gneisseuses, argileuses ou calcaires. Elles different sensiblement des couches pierreuses ou terreuses qu'on trouve dans les plaines, collines & monticules, aux pieds & aux flancs des hautes montagnes dont ces couches forment les promontoires, par la situation, la qualité de la pierre, la stratification & le défaut de corps pétrifiés. Quelques auteurs mettent aussi dans ce nombre les Volcans les plus anciens. Il n'est pas improbable qu'il-y-a eu des Volcans soumarins immédiatement ou peu aprés la formation de la terre, peut être aussi pendant cette grande opération même; mais il n'est pas décidé que le mont Ethna y appartient, comme le Comte de Buffon le prétend (Supplément à l'histor. nat. Tome 5^{e} en 4to p. 399.); car la hauteur & le volume d'un Volcan peut bien prouver qu'il n'est pas d'une formation récente, mais les éruptions du Volcan sicilien dont l'histoire fait mention sont pourtant trop éloignées du commencement du monde pour le croire primitif. En outre Mr. *de Dolomieu* a observé que le granit &c. s'enfonce sous le mont Ethna (V. ses voyages aux isles de Lipari p. 132, 135.). La dénomination de montagnes primitives donnée trop généralement aux roches de toutes les hautes montagnes a déplù à d'autres physiciens, parcequ'il n'est pas prouvé qu'il y avoit des montagnes au commencement du globe, dont la surface étoit alors peut-être sans inegalités. Ils y ont substitué d'autres noms. Voyant que les métaux se trouvent communément & en plus grande abondance dans les roches anciennes de granit, de gneiss & de schiste, que dans les roches des plaines & des

des promontoires, ils les ont nommées *montagnes à filons*. Mais outre que les plus hautes montagnes ſont ordinairement ſtériles, on découvre des filons & des mines dans les montagnes d'une naiſſance plus récente. D'autres, voyant que les roches des promontoires ſont généralement à couches, ſouvent de différentes éſpeces de pierre ou de terre, qui repoſent l'une ſur l'autre dans la même colline (Flöze, Flözgebürge), ont appellé des montagnes *ſimples* ou *uniformes* (einfache Gebürge) celles qu'on croit être les plus anciennes, parce qu'on a crû que ſurtout le granit ne ſe trouve jamais ſtratifié, mais toûjours en maſſes ſolides & par blocs. Le ſchiſte argileux d'ancienne date eſt ſans doute ſtratifié, au point que ſon tiſſu eſt ſouvent composé de feuillettes minces & ſes maſſes diſpoſées par couches épaiſſes. Quant au gneiſs Mr. *Charpentier* prétend, qu' examiné au moyen de la loupe, il ne montre point de feuillets paralleles, mais des parties qui s'alternent & s'interceptent ſans allignement. Quoique cela ſe trouve ſouvant ainſi, j'ai pourtant examiné bien des morceaux & blocs de gneiſs, où la ſtratification étoit trés décidée & trés manifeſte. Je peux aſſurer la même choſe par rapport au granit de pluſieurs endroits. J'en ai vû prés de Schwarzenberg (*), à Zinnwald, à Scharfenberg & en bien d'autres endroits en Saxe & en Bohéme. Le Greifenſtein prés d'Ehrenfriedersdorf en Saxe eſt composé de bancs horizontaux de granit, les uns ſur les autres. Quelques montagnes graniteuſes prés de Königshayn en Luſace ont

(*) Ferbers neüe Beiträge zur Mineralgeſchichte verſchied. Länder P. I. pag. 39.

ont la même construction, suivant l'observation de Mr. *de Schachmann.* (*a*) Mr. *de Saussure*, (*b*) Mr. *Charpentier*, (*c*) & Mr. l'Abbé *Palasseau*, (*) ont vérifié ce fait quant aux montagnes de la Suisse, de la Savoie, de la Saxe & des Pyrénées. Il y a plusieurs années que j'ai eû occasion d'observer la disposition du granit gris par lits ou par bancs horizontaux, pendant le tems qu'on creusoit le nouveau bassin pour la réparation & conservation des vaisseaux de guerre au milieu des roches granitiques à Carlscrone en Suede. Tous les environs & la plupart de montagnes granitiques à coté du chemin en allant de Carlscrone par Ekſjö à Stokholm en offrent des preuves convaincantes, & quelquefois meme des couches ou des feuillets trés minces. En d'autres roches les lits sont très épais, souvent perpendiculaires (**) & difficiles à reconnoître. J'avoue qu'il y a des montagnes granitiques, dont la pâte est trés unie, trés serrée & ressemble parfaitement à une masse solide. Il suffit d'y admettre une concretion rapide des parties qui ne leur laissoit pas le tems de s'arranger par bancs plus ou moins épais, qu'on remarque en d'autres granits, ou la concretion étoit successive & plus lente: & on aura la clef de cette difference. Il se peut encore que la situation primordiale de ces masses ait été altérée en quelques endroits & que la stratification

---

(*a*) Voy. aux Alp. I. p. 99. — 100.

(*b*) Hist. min. de la saxe 30. 239, 737, &c.

(*c*) Beob. über die Gebürge bei Königsheim, S. 8, 9, 11.

(*) Mineralogie des pyrénées p. 155.

(**) Voyage aux alpes par Mr. de Saussure T. I. p. 180, 182, 184, 185, 230, 400, 401, 502, 503, 532, 537.

cation en eſt devenue moins réguliére & moins diſtincte; ou que la criſtalliſation confuſe, qui vraiſemblablement a formé les granits & pluſieurs autres roches, ait quelquefois donné aux feuillets ou bancs pyramidaux & paralleles, dont on les trouve ſouvent compoſées, une ſituation verticale, concentrique, courbée en arcs, ou de quelque autre forme irreguliere, contractée dès le commencement; mais les voyant ſouvent diviſées en bancs, plus ou moins épais & réguliers, il faut avoüer, qu'un dépôt de parties a alors accompagné leur criſtalliſation. Le premier fond étant une fois oblique par telle raiſon que ce ſoit, les dépoſitions ſucceſſives ont dû ſuivre la même inclination, parceque les fluides obeiſſent toujours à l'obliquité du ſol. Or, ſi ces criſtalliſations & dépoſitions ſe ſuccédoient de prés, il eſt aiſé à concevoir, que les interſtices n'ont pas pû reſter également diſtinguibles par tout, mais qu'au contraire les grains ſe devoient ſerrer les uns contre les autres au point d'effacer toute marque de dépoſition ſucceſſive. L'évaporation de l'humidité, le poids & la compreſſion occaſionnée par les maſſes ſuperpoſées, l'homogénéité, l'attraction & la cohéſion des parties qui ſe touchent, ont naturellement dû conſolider & reunir les interſtices de bancs en pluſieurs endroits, lorsque le granit ſe durcit.

Il ſuffit qu'il y ait réellement des granits anciens diſtribués par lits trés-diſtincts en d'autres endroits. Je ne rapporterai pas comme une preuve de cette ſtratification la facilité de fendre le granit le plus dur en blocs tres grands & trés réguliers par le moyen de coins appliqués horizontalement, qu'on y enfonce à coups de marteau (*); car on ſait à préſent fendre le granit *en tout ſens*, même transverſalement, on le taille auſſi bien que la molaſſe. Les gros blocs quarrés ou parrallelepipedes de granit qu'on nous apporte de Finlande & qu'on travaille ici à St. Pétersbourg avec tant de facilité qu'à Breſte & à Carlscrone, en ſont garans. Les pierres à four dont on ſe ſert pour la fonte du fer (Saxum fornacum) ſont tirées tantôt des carrieres de gneiſs, tantôt de celles de granit dans les lieux où celui ci ſe trouve parfaitement ſtratifié à feillettes pour ainſi dire. Mr. *Pini* connù par pluſieurs mémoires intereſſants nie abſolument la ſtratification des granits, ne l'ayant pas trouvée dans les montagnes appartenantes au St. Gottard, à une étendue de 60 lieües (Memoria mineral. ſulla montagna di St. Gottardo p. 104). Je ne lui oppoſerai que les obſervations de Mr. *de Sauſſure*, & un fait, dont tout obſervateur qui a occaſion de viſiter la Suiſſe peut ſe convaincre. Il y a en pluſieurs villes p. ex. à Berne des marchands de gros blocs des criſtaux de roche, tirés du St. Gottard & d'autres montagnes de ce païs. Ils les vendent aux étrangers, amateurs de curioſités naturelles. L'hôte au faucon, auberge de cette ville, en avoit, quand j'y paſſois (1769) un magazin aſſés garni. Examinés attentivement ces criſtaux d'un volume ſouvent prodigieux, quand on a eu ſoin d'y laiſſer attaché quelque bloc du granit, ſur lequel ils ſe ſont formés, & dites moi, ſi ces granits ſont ſtratifiés ou non? pour ne point parler ici des lits & des bancs, par lesquels ils ſont diſpoſés dans ces carrieres, & qui ſont trop

(*) Voy. la Critique anonyme de la Géogenie de Mr. Silberſchlag T. I pag. 184.

trop épais & trop lourds pour en transporter un ſeul en entier. Au reſte il n'eſt pas étonnant que Mr. *Pini* ne ſoit pas de cet avis, quand on lit. (p. 99 et 100.) tout ce qu'il prétend pour affirmer la ſtratification des granits, prenant les couches calcaires pour modéle, comme il s'explique encore dans un autre mémoire ſur la maniere d'obſerver la diſpoſition des couches (dei ſtrati) dans les montagnes. Si chacun eſt le maître de donner telle étendûe qu'il voudra aux termes dont il ſe ſert, & de déterminer à ſon gré les cas, où il veut les employer ou non, il faut convenir qu'il n'y a pas beaucoup de granit ſtratifié parfaitement dans le ſens & ſelon la definition de Mr. *Pini*. Mais la Nature ſe ſouçiant fort peu de nos termes & de nos définitions, n'a pas trouvé à propos de ſtratifier le granit par tout de la même maniere & avec la même préciſion, épaiſſeur & diſtinction, que l'on obſerve dans la diſpoſition des roches calcaires. Cela n'empeche pas que l'une & l'autre pierres ne puiſſent réellement être ſtratifiées, quoique plus ou moins, plus ou moins clairement, ce qui ne change rien dans l'aſſertion, excepté la facilité plus grande ou plus petite de l'obſerver. Tel pourroit dire, qu'il ne regarderoit aucune pierre comme ſtratifiée, à moins qu'elle ne fut compoſée de feuilles minces ſemblables à celles de l'ardoiſe ou du verre de moscovie; mais la ſignification & l'uſage de cette épithete n'oblige pas de lui donner un ſens ſi borné. Convenons donc que le granit ſe trouve diſpoſé par lits ou ſtratifié, comme je l'ai prouvé par pluſieurs obſervations. Cela étant, on voit bien que la diviſion des montagnes en ſimples ou uniformes & montagnes à couches, n'eſt rien moins que naturelle, & qu'elle n'empeche pas d'admettre une origine aqueuse ou océanique pour le granit aussi bien que pour bien d'autres roches. Mr. *Pini* dans son mémoire cité ci dessus (*) & plusieurs autres auteurs ont proposé une autre dénomination & division des montagnes qui réellement est préferable à la précédente. Il appelle montagnes *originaires* Urgebürge les plus anciennes, dont la destruction a fourni les matieres qui composent actuellement les montagnes *dérivatives*, formées de leurs débris. Mais il est certain que les montagnes originaires ne sont pas toutes de la même ancienneté. Il n'y a que les granitiques qui meritent ce nom, comme nous verrons plûs bas, nous bornant à celles, que nous pouvons connoitre; car il faut bien que le granit ait son noyeau, autour duquel il se formoit, s'il ne continue pas jusqu'au centre de *la terre*, *chose que nous ignorons* absolument.

§. 10. Les montagnes dérivatives de Mr. *Pini*, ou si on trouve ce nom trop général à cause des roches calcaires, les montagnes *secondaires* & *tertiaires*, toujours à couches, *forment la seconde & troisieme classe des auteurs.* Ignorant combien de révolutions notre globe a essuyées, mais assuré de ce que j'ai déja dit, que leur nombre a été trés considérable & que chaque revolution a donné naissance à une nouvelle couche de la terre, plus ou moins universelle ou particuliere, je juge nécessaire d'augmenter le nombre de ces classes. Toute pierre sablonneuse ou calcaire p. ex. n'est surement pas de la même ancienneté. A mesure que les observations se multiplieront & que le nombre de celles qui sont dignes de foi nous metront en état

(*) Della maniera d'osservare nei monti la disposizione degli strati.

état de généraliser quelques idées, on connoitra mieux les différents rapports entre les variétés de ces montagnes, & on sera probablement obligé d'en établir une quatrieme, sixieme classe &c.

§. 11. Quand on examine les hautes montagnes, on remarque d'abord que les matieres qui composent leurs rochers, sont d'une nature trés-différente; que ces roches, loin d'y être jettées au hazard, se trouvent adossées l'une sur l'autre dans un certain ordre vniforme dans toutes les grandes chaines du monde connû ou visité par quelque Physicien minéralogiste. Quittant le païs plat dont le terreau est composé d'argile, de limon, de sable, de cailloux, de marne & de craie, plus ou moins endurcies, on commence à monter sur des roches calcaires remplies ordinairement de pétrifications. Continuant la route toujours en montant, on trouve encore des roches calcaires, ou tout à fait destituées de pétrifications, à ce qu'on prétend, ou qui n'en contiennent que fort peu. On arrive ensuite à des montagnes d'une hauteur moyenne, composées de schiste, de roche, qu'on appelle mal à propos roche cornée (*), de gneiss & d'autres pierres micacées, qui toutes contiennent beaucoup de terre argileuse. Ces roches

(*) Mr. le C. de Buffon fait la même remarque (Hist. nat. des minéraux en petit 8. T. I. p. III. &c. dans la note). Mais jusqu'à présent il n'y a pas d'autre nom pour cette espece de roche. Celuici est adopté par tout en Suede & en Allemagne, non seulement des mineurs, mais aussi des minéralogistes. Mr. le Comte auroit donc pû savoir que je n'en suis pas l'inventeur. La pierre de corne des allemands (Silex pyromachus) est sans doute un silex d'une composition differente de celle que Mr. le C. de Buffon lui attribue.

roches argileufes regnent au moins dans cette région, comme le granit dans celle qui fuit, qui eft la plus haute & forme le dos de la chaine; car dans l'une & l'autre region il y a des roches fecondaires qui repofent par ci par là fur les argileufes & graniteufes, fi j'en excepte les plus hautes, ordinairement à nud & fans couverture. Veut-on defcendre de l'autre coté de la chaine pour la traverfer, on trouve les mêmes bandes, la même fuite & difpofition des maffes pierreufes, fur lesquelles on paffe pour fe rendre à la plaine du côté oppofé, avec cette feule différence, que c'eft dans un ordre inverfe de celui qu'on obfervoit en montant.

A ce fait il faut ajouter une obfervation pas moins générale, quoique plus difficile à faire. Partout où on a pû pénétrer dans l'intérieur des montagnes calcaires & argileufes, gneiffeufes ou fchifteufes à une profondeur fuffifante, foit dans les mines, foit dans les ravins & vallées, où ces montagnes avoifinent les roches graniteufes, on a découvert, que le granit fert de bafe à toutes ces montagnes, & que le fchifte, le gneifs &c. repofe fur lui, fervant à fon tour de bafe aux roches calcaires, même de cette éfpece qui appartient aux alpes & ne contient que rarement des corps pétrifiés. Il arrive quelquefois que la roche calcaire repofe immediatement fur le granit, ou il n'eft pas couvert de Gneifs ou de Schifte. Mais toûjours le granit forme la roche la plus profonde que nous connoiffions jusqu'à préfent, & en même tems il forme auffi les plus hautes régions des montagnes.

Cet

Cet ordre conſtant prouve aſſés, qu'il faut admettre pluſieurs époques de naiſſance pour les hautes montagnes auſſi bien que pour les differentes couches des montagnes ſecondaires ou tertiaires. On a beau dire que les trois bancs des hautes montagnes pourroient avoir été formés en meme tems. Pourvù qu'on réflechiſſe un peu comment la nature procéde encore de nos jours, quand elle forme ces couches nouvelles qui naiſſent à chaque inſtant devant nos yeux, à l'aide de ſes deux agents univerſels, l'eau & le feu; on verra bientot qu'il auroit été tout à fait impoſſible, que les bancs quartſeux ou graniteux, argileux & calcaires euſſent pû ſe ranger partout dans le même ordre de ſuperpoſition, ou nous les trouvons actuellement, ſi les terres ſimples qui entrent dans leur compoſition, avoient été toutes à la fois mêlées enſemble dans la quantité néceſſaire pour former ces bandes, & tenues en ſolution ou mêlange fluide, ſoit par l'eau pure ou melée de quelque acide, ou par le feu, ou par tous les deux à la fois. Car ces terres fondues enſemble par le feu, ou combinées dans l'eau de telle façon qu'on voudra, ſe criſtalliſant & tombant au fond, auroient néceſſairement dû ou ſe mêler confuſement ou auſſi ſe précipiter ſéparement (ſi elles en avoient eû le tems & le repos néceſſaire) ſur le même fond ſuivant leur gravité ſpécifique; mais ni l'un ni l'autre n'eſt arrivé. Nous les trouvons au contraire toutes combinées dans le granit d'une maniere uniforme par tout. Ses parties intégrantes, le quarts, le feltſpat & le mica gardent chacune toûjours la même proportion de terres qui entrent dans leur compoſition. Dans le ſchiſte la terre argileuſe domine, mais elle n'eſt pas depourvue de tout mêlange de terre ſiliceuſe &c., non plus que la roche calcaire, qui contient ſouvent de la terre argileuſe, magnéſienne &c. en certains endroits. Il faut donc convenir, que les différentes bandes des hautes montagnes ne ſont pas d'une formation ſimultanée (*), mais ſucceſſive, ſuivant l'ordre de leur adoſſement, & qu'il y en a par conſéquent de plus récentes & de plus anciennes. Au reſte il eſt impoſſible de fixer la durée de chaque période ou intervalle entre la formation de l'une & l'autre bande. Auſſi ne s'agit-il pas dans ce mémoire de l'ancienneté abſolue, mais uniquement de l'ancienneté relative des roches & couches du globe. Il y a pourtant toute apparence que les révolutions de la nature, capables de produire des bandes d'une ſi grande épaiſſeur & étendüe qu'en ont le granit, le ſchiſte & la pierre à chaux des hautes montagnes, ne doivent pas s'être ſuccedées de prés, mais qu'il doit y avoir eû entre elles des intervalles bien conſidérables.

§. 12. Que la conſtruction des hautes montagnes & la diſtribution de leurs roches eſt réellement telle que je l'ai expoſée dans le § précedent, c'eſt un fait auéré aujourd'hui de tous les voyageurs dignes de foi, qui ont viſité quelque chaine de montagnes, en quels pays que ce ſoit. Il ſeroit trop long & ne ſerviroit à rien de copier ici les paſſages des auteurs, qui prouvent cette harmonie de leurs obſervations. Leurs ouvrages étant imprimés & ſous les yeux du public, quiconque veut ſe familiariſer un peu avec la littérature moderne de la géographie phyſique, eſt à portée de s'en convaincre. En matiere

(*) On peut conſulter ce qu'en dit Mr. l'Abbé *Palaſſeau* dans ſa Minéralogie des Pyrenées p. 154, 155.

matiere d'experience la pluralité des voix données par des témoins oculaires, dont l'intelligence, l'exactitude & l'intégrité n'est pas équivoque, doit sans doute décider des faits qu'on cherche à connoitre. Il n'y a pas d'autre moyen d'en avoir quelque sureté. Chacun qui examine lui-même les montagnes, trouvera ses propres observations ou conformes ou contraires à ce que la pluralité prononce. Dans le premier cas sa voix se joint au nombre des voix affirmatives; dans le second cas il est plus raisonnable de croire qu'un seul homme a pû se tromper que d'en accuser plusieurs, dont le discernement est connù. Appliquant ces regles équitables à l'objet dont il s'agit ici, on conviendra que l'arrangement des montagnes exposé ci dessus ne souffre plus de doute, étant avoué de la plus grande partie de nos meilleurs observateurs. On a donc tort de confondre ces observations avec des systemes chimériques & de qualifier d'hypotheses les conséquences qui ont avec elles une liaison nécessaire, qualification qui ne convient jamais aux faits, à l'expérience & aux résultats qui en dérivent par un raisonnement juste, mais bien aux théories imaginées dans le cabinet, & souvent sans consulter la Nature.

§. 13. Pour ne passer sous silence rien qui pourroit affoiblir ce qui est dit de l'accord des observations touchant l'arrangement général des montagnes, il est bon de prévenir une objection qu'on ne manqueroit pas de faire, si je n'y répondois pas d'avance. Parmi ceux, dira-t-on qui avouent que le granit occupe les cimes; le gneiss ou le schiste la région moyenne; la pierre à chaux la zone inférieure des grandes chaines de montagnes; & que le granit s'y plonge ordinairement ſous les autres roches, comme le gneiſs ou ſchiſte ſert de baſe à la roche calcaire, il y a pourtant beaucoup des ſchismes ſur l'ancienneté relative du granit, du gneiſs, du ſchiſte & de la pierre à chaux. On prétend avoir trouvé du gneiſs ſous le granit ou dans ſon interieur, & du ſchiſte ſous des roches calcaires: en un mot, d'avoir remarqué quantité d'exceptions de l'ordre général que j'ai indiqué, les quelles ſemblent démontrer que le granit, le gneiſs, le ſchiſte & la roche calcaire ne différent pas en date d'ancienneté & ſont diſpoſés l'un ſur l'autre ſans aucune régularité conſtante. Je ſuis bien éloigné de vouloir diſputer des faits ou mépriſer les obſervations d'autres phyſiciens même dans le cas, quand je n'euſſe rien vû de ſemblable pendant le tems que j'ai employé à viſiter les principales montagnes & mines de l'Europe, mais je nie abſolument les conſéquences qu'on en a voulû tirer, & je compte de prouver dans la ſuite de ce memoire que de pareilles anomalies locales & toutes les difficultés propoſées jusqu'a préſent n'otent rien à la vérité de l'ordre général des montagnes, expoſé ci deſſus & avoué de la plûpart des obſervateurs ſans préjugés. Il eſt vrai que pluſieurs obſervations qu'on vient d'offrir au public de certains endroits, où l'étude des montagnes & des ſciences y appartenantes eſt encore dans le berceau, ne méritent pas la même attention. Chacun a ſa maniere particuliere de voir, & ne ſaiſit pas toûjours le juſte point de vûe qu'il faut choiſir pour pénétrer les ſecrets de la nature. Mais ſans m'y arrêter, je trouve avec feu Mr. Bergman que la plûpart des diſputes phyſiques roulent plutôt ſur l'explication des phénomenes que ſur les phénomenes mêmes. Il ſuffit d'avoir remarqué

quelque

quelque chose, qu'on ne sait pas concilier avec les vérités déja connues & peut être cent fois prouvées, on ne balance guere de les rejetter toutes & de former de nouvelles théories, contraires aux premieres. Voilà ce qui retarde les progrés des sciences physiques, & nous jette souvent dans l'incertitude & l'inconséquence la plus singuliere. Tâchons donc de voir, si les anomalies observées en quelques endroits nous obligent de changer nos idées sur la construction générale de la croute du globe & d'abondonner les résultats qu'une infinité de recherches exactes ont portés jusqu'à l'évidence; ou s'il y a moyen de rassurer les sceptiques trop facilement ébranlés, en leur montrant que les anomalies qui les embarrassent, & les contradictions qu'ils croient inévitables, ne sont telles qu'en apparence.

DE
ORDINE FIBRARVM CORDIS.
Diſſertatio IV.
DE
FIBRIS EXTERNIS VENTRICVLI SINISTRI.

Auctore
C. F. WOLFF.

Diſpoſitio fibrarum.

Vti ſic fibrae ventriculi dextri externae diſpoſitae erant, vt faſcias coniunctae latas et tenues faſciolasque efficerent minores, externam ventriculi ſuperficiem obducentes; longos, quaſi teretes, funes, ſiue faſciculos, in quos fibrae collectae eſſent, in ſiniſtro inueniri ventriculo (*a*), monitum eſt, craſſiores ad baſin (*b*), et ramificatos (*c*), ſuper faciem ventriculi gibboſam diſperſos, verſus apicem tenuiores, ſibique mutuo contiguos, (*d*) aut fibras tandem teretes, ſimplices, aequali inter ſe ductu progredientes (*e*). Hi funes et fibrae in diverſis ventriculi regioni-

(*a*) Tab. I. 72.
(*b*) Tab. I. 64. 67. 70. 81.
(*c*) Tab. I. 70. 71. 72. 73.
(*d*) Tab. I. B. 78. 86.
(*e*) Tab. I. 92. 93. 94. 95.

gionibus insigniter differunt, aliamque in aliis prae se faciem ferunt. Imprimis in superiori superficie posterior pars gibbosa ad basin, (*a*) dexterior ad crenam, (*b*) sinisterior ad marginem obtusum (*c*), et quae apicem circumdat regio, (*d*) singulari fibrarum dispositione se insigniunt; et propriam quoque inferior ventriculi superficies fibrarum speciem habet.

Funes crassi ramificati in parte gibbosa ad basin.
(*Tab. I.* 59. 81. 86.)

Funibus praecipue gibbosa pars ventriculi crassis longisque et teretibus instructa est, ortis a filo cartilagineo anteriori sinistro, (*e*) arcuatim inde super omnem gibbosam hanc partem et radiatim quodammodo dispersis. Accumbunt sibi mutuo proxime ad filum (*f*), progrediendo magis magisque a se invicem discedunt, simulque in minores paulatim dividuntur funiculos, tanquam trunci in ramos. (*g*) Interstitia, quibus funes maiores, minoresque funiculi, distincti sunt, adipe primum et cellulosa, deinde profundius fibrillis (*h*), repleta sunt, quibus funes funiculique inter se connectuntur. Sic totam hi funes gibbosam partem ventriculi in superiori superficie occupant, a basi oblique

(*a*) Tab. I. 81. 59. 86.
(*b*) Tab. I. 87. 88. 89. 90. 94. 95.
(*c*) Tab. I. B. 85. 91.
(*d*) Tab. I. 91. 94. 95. 97. 98. 99. 100. E.
(*e*) Tab. I. w.
(*f*) Tab. I. 59. 60. 61. 62. 64. 67. 70. 81.
(*g*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*h*) Tab. I. 65. 68.

oblique finiſtrorſum ad mediam partem marginis vsque ſiniſtri deſcendendo (*a*).

Planae fibrae et confluentes anterius dexteriusque ad crenam. (*Tab. I.* 87. 88. 89. 90. 94. 95. 97. 99.)

Alia facies anterius dexteriusque iuxta crenam, et inde porro ad dimidiam anteriorem partem marginis ſiniſtri vsque, in ſuperiori ventriculi ſuperficie apparet. Non funes craſſi teretes, ſed fibrae planae, (*b*) non diſcedentes aliae ab aliis et ramificatae, ſed ſibi mutuo contiguae potius (*c*), inordinataque coalitione inter ſe confluentes, (*d*) hanc ſuperficiei ſuperioris partem iuxta crenam occupant. Laminas fere vel faſcias dixeris, ſimiles quodammodo faſciis ventriculi dextri, niſi magis confuſae inter ſe minusque in faſciolas diſtinctae, vnam potius continuam, a crena ſubortam, laminam efficerent, ad aliquam a margine diſtantiam vsque continuatam. Sola illa faſciola, (*e*) quam fibrae ventriculi dextri ad partem crenae poſteriorem, in ſiniſtrum tranſeundo ventriculum, efficiunt, quae pontis inſtar arteriam coronariam tegit, diſtincta eſt. Quae inde antrorſum porro a crena oriuntur fibrae reliquae omnes, inter ſe confluendo, ſimilique progrediendo ductu, continuam potius in hac iuxta crenam parte faciem efficiunt.

Siniſte-

(*a*) Tab. I. 59. 81. 86.
(*b*) Tab. I. 84. 87. 89. 90.
(*c*) Tab. I. 94. 95.
(*d*) Tab. I. 94. 95.
(*e*) Tab. I. 87. 88.

Sinisterius ad marginem funiculi teretes.
(*Tab. I.* 59. 79. 91. E.)

His fibris planis confluentibus anterior ergo dexteriorque, apici et crenae propior, pars superficiei superioris ventriculi occupatur. Prope marginem vero crassiores fibrae, aliaeque prae aliis eminentes, teretes, interstitiis profundioribus distinctae, (*a*) ex planis illis prodeunt, superque marginem descendunt. Hae quidem, quo sunt basi propiores, eo crassiores existunt, versus apicem magis magisque tenues redduntur; vt, si marginem respicias totum sinistrum, funes primo crassi ad basin (*b*) deinde funiculi sensim minores, (*c*) postremo versus apicem fibrae tandem sequantur teretes atque distinctae (*d*).

Radiata fibrarum dispositio ad apicem.
(*Tab. I.* 85. 97. 98. 99. 100. 103. 104.)

Denique ad apicem quoque et in regione. quae eum circumdat, peculiaris, in hac superiori (*e*) non minus quam inferiori (*f*) ventriculi superficie, et diversa a caeteris hactenus descriptis regionibus, dispositio fibrarum inuenitur. Fibrae ipsae similes sunt fibris marginalibus, teretes scilicet, distinctae, aliaeque prae aliis eminentes; decursu insigniter

(*a*) Tab. I. 85. 86.
(*b*) Tab. I. 59. 69.
(*c*) Tab. I. 69. 79.
(*d*) Tab. I. 79. 91. E.
(*e*) Tab. I. 95. 99. 98. 104.
(*f*) Tab. III. 30. 35. 41. 31. 36. 42. 47.

ter differunt. A *Lowero* haec iam dispositio fibrarum, haud satis accurate tamen, notata et picta exstat. A *Senaco* eadem descripta traditur. Stellam hic Vir Illustris vocat, in ipso ventriculi apice, in interna eius non minus quam externa superficie apparentem, radiis insignem curvatis. Huiusque descriptionis similem figuram *Lowerus* reddiderat. Singularis omnino et notabilis figura est, quam fibrae sua dispositione et decursu in hac sede efficiunt. Non integram tamen vnam et perfectam stellam describunt, ex cuius scilicet centro vnico circumquaque radii curuati in omnes plagas exirent. Sunt duae potius partes duarum diuersarum stellarum, quarum altera in superiori (*a*), altera in inferiori, (*b*) superficie radiis suis apparet, quaelibet proprio suo ad marginem collocato centro, seu foco, gaudet, neutra ex hoc centro suo radios ad alteram superficiem mittit. Superior in puncto marginis sinistri, pollicem fere a fine crenae remoto, focum, (*c*) radios in solam inde superiorem superficiem versus crenam, eiusque diuersas partes, a media circiter crena ad extremum eius finem vsque, dispersos (*d*) habet. Inferior foco (*e*) instructa ad finem striae posito, interstitiumque occupante, quod inter hunc finem et focum superiorem intercedit, radios in inferiori superficie versus marginem oblique et basin emittit. (*f*) Non ergo in partem, oppositam directioni superiorum radiorum, inferior pars stellae suos radios distribuit,

(*a*) Tab. I. 95. 99. 101. 102. 104.
(*b*) Tab. III. 30. 35. 41. 47.
(*c*) Tab. I. E.
(*d*) Tab. I. 89. 89. 94. 97. 99. 102. 104.
(*e*) Tab. III. C.
(*f*) Tab. III. 26. 27. 28. 39. 45. 48. 51. 52.

tribuit, vt fieri oporteret, si stellae eiusdem vtrique radii essent; sed eodem cum superioribus ductu potius et inferiores progrediuntur radii, ad marginem oblique ex foco suo in inferiori, deinde ad crenam oblique, ad partem eius postremam, in superiori superficie (*a*) adscendendo. *Radiatas* ergo potius *fibras* dixeris esse, quae in superiori superficie regionem circa apicem occupant, radiis arcuatim ductis; *radiatasque* pariter, quae in inferiori hanc regionem obducunt, vtrasque tamen diversas, proprio quasvis foco suo instructas.

Longae subteretes fasciatae fibrae in inferiori ventriculi superficie (Tab. III. 23. 24. 25. 28. 29. 30.)

Inferior superficies tota similibus fere fibris subteretibus, longis continuatisque, (*b*) a se mutuo frequenter discedentibus, (*c*) interstitiisque oblongis in fascias haud obscure distinctis, instructa est. Crassiores tamen teretioresque, magisque eminentes, ad basin apparent (*d*), qua parte a filo oriuntur cartilagineo posteriori sinistro; planae magis, minusque distinctae, ex margine emergentes (*e*) sinistro, in planam hanc superficiem prodeunt, partemque eius notabilem tegunt. Ad striam vbi accedunt, distinctiores denuo teretioresque, interstiis imprimis se insigniunt oblongis, quae pulcherrimis maxime repleta sunt fibrillis necten-

(*a*) Tab. I. 85. 86. 88. 84. 87.

(*b*) Tab. III. 23. 24. 25.

(*c*) Tab. III. 20. 20. 21.

(*d*) Tab III. 8. 10. 14.

(*e*) Tab. III. 27. 28. 39. 40.

nectentibus (*a*). Radiatae denique, quarum superius mentio facta, apicis regionem fibrae occupant (*b*). Hae, sicut in aliis maxime cordibus vidi, satis manifesto in fascias dispositae sunt, interstitiis longis distinctas, radiatim versus apicem concurrentes. Eaedemque, vti ad marginem vsque fasciae et ad basin vsque distinctae adscendunt, maximam sane partem superficiei inferioris occupant. Minus tamen diversa directione fibrarum hae fasciae, velut in ventriculo dextro, quam potius longis continuatisque interstitiis distinctae sunt, adipe exterius et cellulosa, interius fibrillis nectentibus, repletis. Hae foco, ad finem striae in vltima parte marginis (*c*) posito, gaudent (*d*); ex quo fibrae longae, parum curvatae, fasciatim prodeunt, magnamque superficiei inferioris partem, oblique ad marginem et ad basin vsque procurrendo, occupant.

Nexus fibrarum per extremitates.

Dum extremitatibus suis fasciculi fibrarum ventriculi sinistri inter se connectuntur, hoc duplici ratione efficitur. Rami alibi, in quos maximi funes frequenter dividuntur, ab aliis truncis suborti ad alios se applicant, truncosque connectunt, vel confluunt cum ramis aliorum truncorum, et retis aliquam speciem efficiunt, haud prorsus absimilem iis retiformibus fasciculorum productionibus, quibus intus ventriculorum parietes obducti sunt. Alibi fibrae, quae contiguae hactenus, ductuque simili, erant pro-

(*a*) Tab. III. 19. 20. 21.
(*b*) Tab. III. 30. 35. 41.
(*c*) Tab. III. 47. 47. C.
(*d*) Tab. III. 50. 48. 46.

progreſſae, a ſe inuicem ſecedunt, et vel cum aliis ſe coniungunt vicinis fibris, vel inter ſe ipſas denuo confluunt, interſtitia oblonga finibus acutis formando. Vtriusque nexus exempla copioſa exſtant. Prior modus in parte gibboſa maxime inter funes inuenitur ramificatos, quorum rami vel ad vicinos truncos ſe applicant, truncosque connectunt (*a*), vel cum ramis aliorum truncorum confluunt, (*b*), et ſpeciem aliquam retiformis nexus efficiunt. Poſterior in ſuperiori ſuperficie ventriculi iuxta crenam (*c*), copioſior tamen in vniuerſa inferiori ſuperficie occurrit, vbi variis modis fibrae aliae ab aliis ſecedunt, ad alias ſe applicant, egregiaque fibrillis ornata interſtitia formant. (*d*).

Qui ſimplicior in ſiniſtro quam in dextro ventriculo.

Qui caeteri nexus modi per extremitates faſciarum in dextro ventriculo obſeruati ſunt, vbi pennatim aliae faſciolae extremitatibus ſuis cum aliis, vel ſerratim, vel interrupta continuatione connectebantur, hi vix locum habere videntur in fibris externis ventriculi ſiniſtri, quae rarius ſcilicet in faſcias collectae, faſciculos potius aut fibras efficiendo teretes, latioribus huiusmodi, quae ad illos nexus requiruntur, extremitatibus minime ſunt donatae. Ad illum ergo faſciarum ventriculi dextri nexum ſolum hic faſciculorum ſiniſtri ventriculi nexus referendus eſt, quo faſciae aliae extremitatibus ſuis oblique in alias inſerebantur.

(*a*) Tab. I. 70. 72. 83.
(*b*) Tab. I. 71. 75. 76.
(*c*) Tab. I. 94. 92. 93. 84. in pluribusque ſedibus non notatis.
(*d*) Tab. III. 15. 18. 18. 20. 20. 21. &c.

Per latera fibrarum nexus. Coalitione inordinata.

Lateribus suis fibrae singulae fasciculorum ventriculi sinistri duplici ratione inter se connectuntur. Vel coalitione scilicet inordinata id efficitur vel ope fibrillarum nectentium. Illud maxime in superiori superficie ad crenam locum habet, vbi fibrae planae iuxta se mutuo incedentes, frequenter coalescunt, vnamque latiorem efficiunt fibram, mox porro secedendo in duas diuisae fibras iterumque in vnam confluentes (*a*). Deinde in inferiori etiam superficie eadem passim ratio nexus inter fibras inuenitur, quae haud raro, dum ductu simili progrediuntur, confluunt, vt difficilius fibra altera ab altera distinguatur (*b*).

Fibrillis nectentibus.

Longe frequentissimus tamen, quo fasciculi fibraeque ventriculi sinistri complicantur, nexus fibrillis efficitur, ab altera fibra in alteram, a fasciculo altero, aut fune, in alterum transeuntibus. Neque vsquam inter fibras aut fasciculos, qui distincti iuxta se inuicem incedunt, fibrillae deficere videntur; modo vt breuissimae in sedibus iis, vbi arctius fasciculi aut fibrae compressae progrediuntur, obseruatu sint difficiles. Huc maxime fibrae radiatae pertinent apicis in superiori superficie ventriculi, quarum aliae, eminentes interstitiis notabilibus, a se invicem distinctae sunt, aliae profundius serpentes, illarum interstitia replent, et quae vtraeque breuissimis vix visibilibus fibrillis arctissime inter se sunt connexae (*c*). Vti in nullis vero

(*a* Tab. I. 89. 90.
(*b* Tab. III. 28. 29. 30.
(*c*) Tab. I. 98. 100. 103.

vero aliis ſedibus craſſi aeque longique ac in gibboſa parte ventriculi, et qui tam largis a ſe inuicem diſtincti ſint interſtitiis, funes inueniuntur; nusquam tam longae quoque fortesque et manifeſtae, quam in hac parte, fibrillae apparent. Duabus lineis iſtae, dum funes dilatantur, longiores ſaepe inueniuntur (*a*). Alibi adeo craſſae ſunt, vt ſpeciem fibrarum prae ſe ferant (*b*). Superficiales, quae ex alterius faſciculi fibrillis in alterum manifeſto continuarent faſciculum, quales in ventriculo dextro inueniuntur, (*c*) nusquam in ſiniſtro ventriculo reperi. Profundiores vbique inter fibras latent, iisque dilatatis apparent, fundum quaſi longorum interſtiorum efficiendo, interſtitiis ipſis ad ſuperficiem vsque celluloſa et adipe repletis. Egregiae non minus fibrillae inter fibras inueniuntur teretes et longas in ſuperficie ventriculi inferiori. Imprimis ad ſtriam frequentius fibrae a ſe mutuo diſcedunt, interſtitiaque efficiunt oblonga, finibus acutis terminata. (*d*) Haec plena ſunt fibrillis, ſolito modo oblique ab altera fibra ad alteram tranſeuntibus. Denique ad apicem in hac inferiori ſuperficie inter fibras radiatas manifeſtae eiusmodi fibrillae et longae in conſpectum veniunt. Rariores in hac ſede fibrae ex ſuo foco diſperguntur, interſtitiisque diſtinguuntur largis longisque, quae tota fibrillis repleta ſunt, ſingulari ſpecie ſe diſtinguentibus (*e*). Minus profundae ſolitis eſſe videntur, ipſamque potius occupare ſuperficiem. Minime tamen

---

(*a*) Tab. I. 68. 74.
(*b*) Tab. I. 77.
(*c*) Tab. I. 14. 14.
(*d*) Tab. III. 20. 20. 21.
(*e*) Tab. III. 37.

tamen continuatae sunt ex fibrillis propriis fibrarum, quemadmodum fibrillae superficiales ventriculi dextri continuabantur; sed adhaerent finibus suis lateribus fibrarum, a quibus manifesto distinctae sunt.

Limites quibus in externa cordis superfice ventriculus sinister circumquaque terminatur. (*Tab. II. E. O. W. I. B. D. T. Tab. III. A. B. C.*)

Limites externi ventriculi sinistri multo limitibus dextri et simpliciores sunt, et faciliores descriptu. Tres isti pariter, vt dextri, natura et situ diuersas, dextris tamen analogas, partes habent, quarum et duae, superior inferiorque, prorsus eaedem sunt, quibus et dexter terminatur ventriculus; scilicet quibus vterque in superiori et inferiori cordis superficie a se mutuo distinguitur, et quae ergo vtrique ventriculo communes sunt; tertia posterior propria est soli sinistro, analoga tamen posteriori parti limitum dextri.

Terminus ventriculi, seu limitum pars, superior in crena. (*Tab. II. E. O. W. I. B.*)

Superior crena est, in qua dextri ventriculi fibrae externae finiuntur, nouaeque sinistri incipiunt (*a*). Haec per totam longitudinem in superiori superficie cordis sinistrum ventriculum terminat, a dextro distinguit; parvâ tamen posterius ad basin sinistri particulâ (*b*) exceptâ, qua longior dextro ventriculus sinister retrorsum prominet, pro-

---

(*a*) Tab. I. D. H. f. C. Tab. II. E. O. W. I.

(*b*) Tab. II. I. B. D.

proprioque dexterius, nisi ad septum potius hanc partem referre velis, pariete (*a*) terminatur. Fouea nimirum dexterius triangularis (*b*), quae retro conum arteriosum est, inter conum et basin aortae, sinisterius columna triangularis carnea (*c*), hanc sedem propius ad basin loco crenae occupant. Mentio iam vtriusque huius particulae in praecedenti dissertatione de fibris externis ventriculi dextri facta, vbi, cum neque ad dextrum ventriculum, neque ad solitas fibras externas sinistri, columna referri possit, tanquam septi pars continuata et fouea et columna considerata est. Haec sedes ergo, siue pars septi sit, siue potius, cum septi partem, vtrique ventriculo communem, non efficiat, singularis portio parietis ventriculi sinistri, qua dextrorsum oblique et retrorsum hic respicit, prope basin dexterius sinistrum ventriculum terminat (*d*) qui crena hactenus (*e*) dextrorsum terminatus erat.

Terminus inferior in stria (Tab. III. A. B. C.)

Inferior pars limitum stria est, in praecedenti pariter Dissertatione descripta. Haec ventriculum sinistrum in inferiori superficie per cordis longitudinem a basi ad apicem vsque terminat et a dextro distinguit ventriculo.

Termi-

(*a*) Tab. II. I. B. D.
(*b*) Tab. II. 8.
(*c*) Tab. II. 7.
(*d*) Tab. II. I. B.
(*e*) Tab. I. C. Tab. II I.

Terminus posterior ad basin. Tab. II. B. D. Y. Tab. III. A. B.

Tertia denique, posterior, eorundem limitum pars ad basin ventriculi, vbi cum aorta haec basis (*a*) et sinu sinistro (*b*) coniungitur, posita est. Dimidiam quasi sinistram partem latitudinis cordis ad basin in superiori, (*c*) dimidiamque eandem in inferiori superficie (*d*), haec linea emetitur, a crenae regione ad marginem vsque sinistrum (*e*) superius, inferius a margine ad striam vsque (*f*), producta, dexterius quidem ipsa basis aortae portiuncula (*g*) in superiori superficie, sinisterius autem filo cartilagineo anteriori sinistro, (*h*) in facie inferiori solo posteriori sinistro cartilagineo filo (*i*) expressa. His filis ergo maxime ventriculus ad basin terminatur, et a sinu sinistro, quocum coniunctus est, in vtraque superficie distinguitur. Parua portio parietis ventriculi est, quae ad partem anteriorem sinisterioremque basis aortae se applicat, eaque terminatur. Sic vtriusque, sinistri pariter ac dextri, ventriculi circumferentia externa tribus efficitur lineis coniunctis, quarum, duae rectae, eaedemque ventriculo vtrique communes, quibus ambabus ventriculus cum ventriculo coniungitur

(*a*) Tab. II. B. D.
(*b*) Tab. II. D. Y. Tab. III. A. B.
(*c*) Tab. II. B. Y.
(*d*) Tab. III. A. B.
(*e*) Tab. II. B. Y.
(*f*) Tab. III. A. B.
(*g*) Tab. II. B. D. 3.
(*h*) Tab. II. 3. Y.
(*i*) Tab. III. A. y. B.

iungitur, ſuperior altera in crena, (*a*) altera inferior ad ſtriam latam vtrinque (*b*), tertia poſterior curva, ſiue excisa, cuiuis ventriculo propria, ad baſin poſita eſt, qua cum aorta ſinuque ſiniſtro ſiniſter ventriculus (*c*), dexter cum dextro ſinu, aorta, arteriaque pulmonali coniungitur (*d*). Sola differentia ea eſt, vt vna ſimplicior, parum vndulata, linea ſiniſtrum, compoſita potius ex tribus diuerſis, extremitatibus coniunctis, lineis dextrum poſterius ad baſin terminet ventriculum.

Ortus fibrarum (Tab. III. A. B. Tab. II. Y. D. B. I. O. E.)

Hac circumferentia externa ventriculi ſiniſtri perſpecta, haud difficilius erit, huius quam dextri definire fibras externas quoad ortum earum, quoad progreſſum et finem. Oriuntur pariter vt fibrae ventriculi dextri a partibus circumferentiae ſuae duabus, inſeruntur in vnam ſolam, quae ſupereſt, tertiam. Vt dextri vero fibrae a poſteriori et inferiori oriuntur ſuae circumferentiae partibus (*e*), inſeruntur in ſuperiorem (*f*); a poſteriori contra (*g*) et ſuperiori parte (*h*) ſiniſtri ventriculi fibrae ortum, in inferiori (*i*) finem, habent. Incipit ergo linea ortus in

(*a*) Tab. II. E. I. B.
(*b*) Tab. III. B. C. D. F.
(*c*) Tab. II. B. D. Y. Tab. III. A. B.
(*d*) Tab. II. I. F. I. B. L. z. Y. Tab. III. E. D. F.
(*e*) Tab. II. I. F. I. 9. B. L. z. Y. Tab. III. E. D. F.
(*f*) Tab. II. I. O. E. Tab. I. C. D.
(*g*) Tab. III. B. A. Tab. II. Y. D. B.
(*h*) Tab. II. I. O. E. Tab. I. C. D.
(*i*) Tab. III. B. C.

in ſuperficie cordis inferiori a principio fili cartilaginei poſterioris ſiniſtri. (*a*) Sequitur inde ductum huius fili ſiniſtrorſum ad marginem vsque (*b*); continuat in ſuperiori ſuperficie per filum cartilagineum ſiniſtrum anterius (*c*) ad nodulum vsque ſiniſtrum (*d*), totam ſic baſin ventriculi ambeundo. Hinc porro ad baſin aortae linea ortus fibrarum tranſit (*e*), eiusque dimidiam partem ſiniſtram (*f*) in ſuperficie anteriori occupat. Solae quidem ſuperius dictae columnae (*g*) et, quae foueam efficiunt, fibrae (*h*) a baſi aortae oriuntur in hoc corde, quae ipſae, in crenam inſertae, ad contractionem ventriculi vix quidquam conferre poſſunt, neque in ſuperficiem ſuperiorem tranſeunt. In alio tamen corde, vbi dexterius columna a baſi aortae oriebatur, notabilem faſciculum fibrarum a parte ſiniſtra baſis aortae oriri, in ſuperficiem ſuperiorem ventriculi deſcendere, fibrasque ſuas producere, vidi. Haud ſolae ergo columnae fibrae, aut quae foveam efficiunt, ſed ſolitae quoque externae ventriculi ſiniſtri, ſaepius a baſi aortae oriuntur. In media hac parte baſis aortae linea ortus quaſi interrupta eſſe videtur; cum a crenae principio nunc, (*i*) remoto a baſi aortae (*k*), fibrae oriri incipiant, interſtitio

(*a*)

(*a*) Tab. III. B.
(*b*) Tab. III. A.
(*c*) Tab. II. Y.
(*d*) Tab. II. 3.
(*e*) Tab. II. D.
(*f*) Tab. II. D. B.
(*g*) Tab. II. 7.
(*h*) Tab. II. 8.
(*i*) Tab. II. I. Tab. I. D.
(*k*) Tab. II. B. D.

(*a*) ipſa columna, a baſi aortae orta, inſerta in crenae principium, occupato. Hinc noua ergo ortus fibrarum linea per totam crenam (*b*), ad apicem cordis et crenae finem vsque, continuat, ex quo vltimae tandem fibrae externae ventriculi ſiniſtri oriuntur. Incipiunt ergo oriri ſiniſtri ventriculi fibrae in ſuperficie cordis inferiori, ex angulo inter baſin et ſtriam (*c*). Circumdat hinc linea ortus earum ventriculi ſiniſtri baſin (*d*), deſcendit inde per crenam (*e*), deſinitque in ſuperficie cordis ſuperiori ad finem crenae. (*f*) Dextri ventriculi fibrae in ſuperiori cordis ſuperficie oriri incipiebant ex angulo inter baſin et crenam (*g*). Circumdabat hinc linea ortus baſin ventriculi dextri (*h*), deſcendebat inde per ſtriam, (*i*) et deſinebat in inferiori ſuperficie ad finem ſtriae (*k*).

Inſertio (Tab. III. B. C. Tab. I. E. D.)

Pariter ergo vt dextri ventriculi, ſiniſtri quoque fibrae ex maiori longe circumferentiae externae ventriculi parte oriuntur, inſeruntur in longe minorem. Duas fere tertias partes in ventriculo vtrouis ortus, haud plus quam vnam inſertionis, linea continet. Hinc pariter vti in dex-

 tro

(*a*) Tab. II. B. I. D. I.
(*b*) Tab. II. I. W. O. E.
(*c*) Tab. III. B.
(*d*) Tab. III. B. A. Tab. II. Y. D .B
(*e*) Tab. II. I. O. E.
(*f*) Tab. II. E. Tab. I. D.
(*g*) Tab. I. C.
(*h*) Tab. I. C. I. Tab. II. F. 9. B. L. z. Y. Tab. III. A. B.
(*i*) Tab. III. B. C.
(*k*) Tab. III. C.

tro ventriculo fasciculi ad fasciculos frequenter, fibrae ad fibras, se applicant vicinas, nec singulae ad insertionis sedem ipsae perueniunt, communibus tandem finibus plerisque, aliarumque, quibus adhaerent, fibrarum ope, in striam insertis. Quamuis autem haud parua pars fibrarum a maiori circumferentiae parte ortarum hac ratione, sicut in dextro ventriculo, consumitur; peculiaris tamen praeterea modus est, quo in sinistro pars maxima fibrarum concentratur. Occupata nimirum stria fibris prioribus, a filo imprimis cartilagineo sinistro posteriori, deinde et nonnullis ab anteriori, ortis; quae reliquae fere a crena oriuntur, radiatim concurrendo partim ad striae finem in eam marginis partem, quae fini huic et foco superiori intercedit, in inferiori cordis superficie (*a*), partim in superiori in focum hunc ipsum, a stria remotum (*b*), tanquam in punctum insertionis singulare, quod striae accedit, inseruntur.

Progressus.

Ita caeterum hae fibrae, a dictis circumferentiae partibus ortae, ad striam progrediuntur, vt dextrorsum oblique et antrorsum, striam et apicem versus, quae in inferiori cordis superficie versantur (*c*), sinistrorsum et antrorsum oblique, marginem cordis sinistrum versus et apicem, quae superiorem occupant superficiem (*d*), incedant; sicuti et dextri ventriculi fibras pari directione progredi

(*a*) Tab. III. C.
(*b*) Tab. I. E.
(*c*) Tab. III. B. A. C.
(*d*) Tab. I. 59. C. D. E.

gredi in praecedenti Dissertatione notatum est. Haec tamen notabilis differentia inter vtriusque ventriculi fibras intercedit, vt, sicuti dextri ventriculi fibrae transuersali ductui vbique proximae, in variis etiam sedibus omnino transuersales sunt, et passim potius versus basin adscendunt, fibrae ventriculi sinistri nusquam non multo sint propiores ductui longitudinali, variisque in sedibus, imprimis circa marginem (*a*), fere tanquam longitudinales ipsae considerari possint. Si longitudinem cordis ipsius eiusque axin respicis, plurima pars funium maiorum in superiori superficie ventriculi, vbi ad marginem perueniunt, (*b*) parum sane abest, quin parallelae sint axi cordis. Et quae propiores apici fibrae circa marginem flectuntur, simili ductu incedunt. (*c*) Si situm respicis cordis, recta fere longae superficiei inferioris fibrae (*d*) a posteriori ad anteriorem partem progredi videntur.

Ordines fibrarum externarum ventriculi sinistri.

In quatuor ordines quasi sinistri ventriculi fibrae externae diuidi possunt. Eorum primum fibrae efficiunt, a filo cartilagineo posteriori sinistro ortae (*e*), in posteriorem maiorem partem striae insertae (*f*). Secundus funium est magnorum, a filo ortorum cartilagineo anteriori sinistro, (*g*) gibbosam ventriculi partem ad basin in superiori

(*a*) Tab. I. 85. 86.
(*b*) Tab. I. 62. 69. 76. 79.
(*c*) Tab. I. 85. 86. 91. 98. E.
(*d*) Tab. III. 15. 18. 23. 28.
(*e*) Tab. III. B. A.
(*f*) Tab. III. 6. 19.
(*g*) Tab. II. 29. 21. 7. 8.

riori superficie occupantium, (*a*) insertorum in partem striae reliquam, et eam marginis partem, quae fini striae et foco superiori intercedit (*b*), Tertius paruus ex fibris constat paucioribus, a ponte productis, (*c*) laminam quasi efficientibus, confusam tamen vtrinque cum fibris vicinis (*d*), insertis in partem marginis eandem, proxime ad focum superiorem, et in focum hunc ipsum (*e*), figuram vna cum prioribus in hac facie inferiori perficiendo radiatam inferiorem. Quartus denique ordo est fibrarum, quae a parte crenae, inter pontem et apicem cordis contenta (*f*), oriuntur, quae marginem vix transeunt (*g*), neque in inferiorem prodeunt ventriculi superficiem. In focum hae fibrae, nisi omnes, maximam partem tamen radiatim inseruntur superiorem, figuramque in superiori superficie ad apicem efficiunt radiatam (*h*), cuius in superioribus mentio facta est.

Fibrae ordinis primi (Tab. III. 6. 8. 10. 14. 17. 18. 19.)

Fibrae ordinis primi a parte sinisteriori tenuiorique fili cartilaginei posterioris sinistri (*i*), et a dimidio interstitio (*k*) inter vtrumque, anterius et posterius, filum sini-

(*a*) Tab. I. 59. 86.
(*b*) Tab. III. 19. 25. 31. 32.
(*c*) Tab. I. 87. 88.
(*d* Tab. I. 83. 84. 89.
(*e*) Tab. III. 47. C.
(*f*) Tab. I. 89. D.
(*g*) Tab. I. 85. 91. E.
(*h*) Tab. I. E.
(*i*) Tab. III. B. y. x.
(*k*) Tab. III. A.

ſiniſtrum oriuntur. Prima craſſiorque pars fili, a ramo anaſtomotico (*a*) orta, fibras largitur breues et craſſas, quae continuo in ſtriam deſcendunt (*b*) eamque efficiunt, nec quidquam ad parietem contribuunt formandum ventriculi ſiniſtri. Sola pars reliqua cum dimidio interſtitio has fibras producit. Hae craſſae teretes ſatisque eminentes et diſtinctae a filo oriuntur (*c*), ſuperque marginem baſis tranſeunt; vbi vltro vero in ſuperficiem deſcendunt (*d*), planiores fiunt minusque diſtinctae. Oblique a filo dextrorſum et antrorſum, ſtriam et apicem verſus, in plana hac inferiori ſuperficie cordis progrediuntur; vt multo tamen longitudinalibus fibris quam transuerſalibus ſint ſimiliores. Quum a parte baſis media filum cartilagineum poſterius oriatur (*e*), et ſiniſtrorſum inde ad marginem ſe extendat (*f*) ſiniſtrum, fibraeque ab eo ortae dextrorſum oblique progrediantur; retrogrado hae fibrae ductu, et contra fili, ex quo oriuntur, directionem incedunt, ſolae quidem omnium fibrarum externarum cordis. Primae earum breuiſſimae ſunt, continuo, vbi ortae, in poſtremam partem ſtriae propinquam inſertae (*g*). Hinc quo ſiniſterius ex filo, aut interſtitio inter bina, poſterius anteriusque, fila

---

(*a*) Tab. III. 4.
(*b*) Tab. III. 7. 7.
(*c*) Tab. III. 6. 8. 10. 10. 14.
(*d*) Tab. III. 15.
(*e*) Tab. III. 4.
(*f*) Tab. III. y. x.
(*g*) Tab. III. 6. 8.

fila oriuntur (*a*), et longiores fiunt et remotius a basi in striam inseruntur (*b*). Curuatae paulisper, imprimis vbi propinquae sunt striae, ducuntur; passim vndulatae, nonnullis in sedibus crispae, incedunt, quod maxime circa insertionem in striam obseruatur. Frequentius etiam contiguae (*c*) secedunt a se inuicem fibrae (*d*), iterumque coniunguntur, interstitia oblonga acutis finibus formando, fibrillis plerumque repleta (*e*). Accedentes ad striam antrorsum flexae, fere parallelae striae (*f*) in marginem eius sinistrum inseruntur, duasque tertias partes saltim posteriores striae hac sua insertione occupant (*g*). Nexus fibrillis passim efficitur, anterius maxime et prope striam (*h*); posterius et in media parte (*i*) coalitione inordinata hae fibrae inter se cohaerere videntur.

Ordo secundus. Funes. (*Tab. II.* 7. 8. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. *Tab. I.* 81. 59. 86. *Tab. III.* 22. 23 25. 39. 40. 41. 42.)

Ordo fibrarum secundus maxime prae caeteris tum sinistri tum dextri ventriculi fibris elegantia et magnitudine fasciculorum funivmque, quos collectae fibrae efficiunt, et

---

(*a*) Tab. III. 10. 12. 14. 17.
(*b*) Tab. III. 11. 13. 16. 19.
(*c*) Tab. III. 15. 18. 18.
(*d*) Tab. III. 20. 20. 20.
(*e*) Tab. III. 20. 20. 20. 21.
(*f*) Tab. III. 11. 13. 19.
(*g*) Tab. III. 19.
(*h*) Tab. III. 20. 20. 20. 21.
(*i*) Tab. III. 15. 28.

et ramificatione et largis interſtitiis, quibus diſtincti faſciculi ſunt, eminet inſignemque ſe praebet. Craſſiſſimi equidem funium ſunt, qui a principio et parte craſſiori fili cartilaginei anterioris oriuntur (*a*). Qui ſiniſtrorſum inde ab extenuato filo et ab interſtitio inter bina fila ſiniſtra originem ducunt, tenuiores ſucceſſive evadunt (*b*); nec ipſi craſſiſſimi, a fili principio orti, ad inferiorem cordis ſuperficiem vsque perueniunt, quin ramificatione diuiſi in minores funiculos (*c*), tanquam ſolitae magnitudinis fibrae demum in inferiorem ſuperficiem prodeant (*d*) continuentque. Solam ergo dimidiam poſteriorem partem ſuperficiei ſuperioris ventriculi ſiniſtri hi funes ramificati occupant (*e*), in eaque ſola apparent.

Ortus.

Oriuntur ab interſtitio dimidio inter bina fila cartilaginea ſiniſtra (*f*), a toto filo ſiniſtro anteriori (*g*), a nodulo cartilagineo ſiniſtro (*h*), et a parte ſiniſtra anterius baſis aortae (*i*). Qui ab interſtitio oriuntur tenuiores, minima ſui parte in ſuperficie ſuperiori verſantur (*k*), quin continuo circa marginem flexi in longas ſuperficiei

 infe-

(*a*) Tab. II. 21. 22. 23. Tab. I. 82. 81. 70.
(*b*) Tab. II. 26. 27. 28. 29. Tab. I. 62. 61. 60. 59.
(*c*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*d*) Tab. III. 22. 39.
(*e*) Tab. I. 81. 59. 86.
(*f*) Tab. II. y.
(*g*) Tab. II. 4. 3.
(*h*) Tab. II. 3.
(*i*) Tab. II. D. B.
(*k*) Tab. II. 29. Tab. I. 59.

inferioris fibras (*a*) abeant. Vti dexterius inde a filo oriuntur; et funes continuo crassiores euadunt, magisque ramificati, et longioribus sui partibus per superiorem superficiem decurrunt, antequam marginem attingunt sinistrum (*b*), quo superato in inferiorem superficiem descendunt. Maximi funes sunt, qui a prima parte fili ipsius oriuntur; qui porro dexterius a nodulo cartilagineo et ab aorta originem habent, minores paulo, in hoc sane corde, euadunt.

Progressus funium in superiori superficie.

Orti a partibus illis funes, a filo nempe cartilagineo anteriori sinistro, a nodulo sinistro, et ab aorta, oblique sinistrorsum versus marginem et antrorsum apicem versus decurrunt, vt longitudinali ductui tamen, quo versus apicem tendunt, propiores sint quam transuersali, quo versus marginem progrediuntur; imprimis si ad axin cordis, basi verticalem, respicias. Progrediuntur hac directione arcuatim quodammodo, marginem versus magis primo tendentes (*c*), deinde itinere continuato magis apicem versus flexi (*d*), vt proximi longitudinali ductui in ipso margine sint, multoque quam prope filum propiores.

Enumeratio funium in hoc corde.

Tres primi funiculi (*e*), ab interstitio orti, cito et integri in hoc corde ad marginem perueniunt, superque eum

(*a*) Tab. III. 17.
(*b*) Tab. I. 64. 67. 70.
(*c*) Tab. I. 64. 67.
(*d*) Tab. I. 66. 69.
(*e*) Tab. I. 59. 60. 61.

eum descendunt. Quartus (*a*), in duos diuisus ramos, circa marginem se flectit. Quintus (*b*) latior in quatuor ramos seu fibras prope marginem diuiditur. Sextus (*c*) longior aliqua sui parte sub priorem se recipere in hoc corde videtur. Septimus (*d*), omnium maxime insignis in hoc corde longitudine, amplitudine et ramificatione, interstitiisque, fibrillis repletis, quibus et ipse funis a vicinis funibus, et rami eius a se inuicem, distincti sunt, in tres funes minores diuiditur (*e*), latius dispersos, interstitiisque distinctos, diuisos porro in fibras haud tenues, longas, super marginem descendentes. Notabile interstitium (*f*), quo hic funis (*g*) in hoc corde a praecedente (*h*) distinguitur, longitudine, largitate et fibrillarum elegantia. Porro et bina illa interstitia (*i*), quibus rami a se mutuo distinguuntur. Imprimis hoc (*k*), quo medius ramus a dexteriore separatur, fibrillis occupatum, crassitie solitis fibris minime cedentibus, singularemque concurrendo funiculum efficientibus (*l*), qui porro ipse in duas insignes fibras (*m*) diuiditur. Haec omnia tamen in hoc corde tantum, quae de singulorum scilicet funium peculiari forma et distribu-

 tione

(*a*) Tab. I. 62.
(*b*)
(*c*) Tab. I. 67.
(*d*) Tab. I. 70.
(*e*) Tab. I. 71. 72. 73.
(*f*) Tab. I. 68.
(*g*) Tab. I. 70.
(*h*) Tab. I. 67.
(*i*) Tab. I. 74. 77.
(*k*) Tab. I. 77.
(*l*) Tab. I. 78.
(*m*) Tab. I. 86.

tione eorumque interstitiis dicuntur, se ita habere opinor, variantibus procul dubio in aliorum corporum cordibus numero, magnitudine, et figura, his funibus descriptis. Octavus funis (*a*), praecedente minor in hoc corde, bifidus ad sequentem progreditur, videturque binis suis ramis sub illum se recipere. Nonus (*b*) vltimus est eorum, qui in parietem externum ventriculi transeunt, evmque efficiunt. Hic tectus posterius arteria coronaria sinistra (*c*), a nodulo oritur cartilagineo sinistro (*d*), et aliqua parte a basi aortae. Deinde bifidus ad pontem se applicat (*e*), receptoque dextro ramo septimi funis (*f*), pontem laminamque, ex illo productam, latitudine auget. Reperi in alio corde praeter hos, a filo et nodulo ortos, alios etiam funes, ab ipsa basi aortae natos, in superficiem externam ventriculi distributos. In hoc columna iam sequitur saepius memorata breuis (*g*), ab aortae basi orta, in postremam partem crenae inserta. Haec in illo corde dexterius a latere anteriori basis aortae oriebatur. Denique fibrae foueae triangularis (*h*) ab aortae basi ortae, pariter in partem profundiorem crenae se inserere, vnamque cum columna septi vel potius dextri parietis ventriculi sinistri partem efficere videntur.

Fu-

(*a*) Tab. I. 81.
(*b*) Tab. I. 82. Tab. II. 21.
(*c*) Tab. I. c.
(*d*) Tab. II. 3.
(*e*) Tab. I. 82. 84.
(*f*) Tab. I 72.
(*g*) Tab. II. 7.
(*h*) Tab. II. 8.

Funium in fibras resolutorum progressus in inferiori superficie et insertio.

Funibus ea ratione in fibras resolutis, super marginem illac descendunt oblique, dimidiamque circiter eius partem posteriorem transitu occupant (*a*). Perueniunt in superficiem ventriculi inferiorem, in qua flexae nunc dextrorsum oblique, a parte hac dimidia posteriori marginis (*b*) striam et apicem versus. progrediuntur. Vti proximae erant ductui longitudinali, cum super marginem transirent; eadem hac, fere longitudinali, directione in inferiori superficie continuant. Sic vltimae fibrae (*c*) ad extremum apicem cordis et partem extremam marginis transeunt (*d*) non modo, in quem inseruntur (*e*), sed tota pars quoque sinisterior anterior superficiei inferioris, vacua a fibris ordinis primi (*f*), his fibris ordinis secundi fere occupatur. Parua modo portio eius ad marginis partem anteriorem restat (*g*) pro fibris, a ponte productis. Longae caeterum fibrae sunt, parum curuatae, aequali fere inter se ductu progredientes. Vbi ad striam perueniunt, paululum apicem versus flexae, angulis versus basin acutis, in eam inseruntur, tertiamque fere anteriorem eius partem ad extremum apicem vsque sua insertione occupant. Dum apicem versus flexae priores harum fibrarum (*h*) partim in

(*a*) Tab. I. 59. 86.
(*b*) Tab. III. 17. 39.
(*c*) Tab. I. 86. Tab. III. 39.
(*d*) Tab. III. 40. 41.
(*e*) Tab. III. 42.
(*f*) Tab. III. 17. 18. 19. 39. 40. 41. 42. C.
(*g*) Tab. III. 45. 46. 47. 51.
(*h*) Tab. III. 17. 18. 19. 27. 28. 29. 30. 31. 32.

in apicem, siue extremitatem marginis sinistri striae, ipsum inseruntur (*a*), partim, etiamsi eo non perueniant, sed posterius paulo in marginem striae inserantur (*b*), in idem tamen punctum (*c*) sua directione tendere videntur, reliquae (*d*) in idem transeunt punctum; radios eo concursu referunt, in vnum focum collectos, partemque efficiunt radiatae figurae inferioris, cuius focus (*e*) in extremitate marginis sinistri striae (*f*) in extrema marginis ventriculi parte (*g*) situs est, radiorum caetera pars fibris constat, a ponte productis (*h*), quae omnes scilicet in dictam partem marginis (*i*) concurrendo se inserunt. Funes in superiori ventriculi superficie fibrillis saepius dictis longissimis inter se connectuntur. Fibrae longae superficiei inferioris, in quas illi resolvuntur, coalitione maxime inordinata cohaerere videntur.

Ordo tertius. (Tab. I. 82. 87. 88. 85. 86. Tab. III. 45. 46. 47. 51.) Figura radiata inferior (Tab III. 25. 30. 35. 41. 47. 50. C.)

Tertius ordo fibrarum, productarum ex ponte, minus spectabilis est. Transeunt dextri ventriculi fibrae interiectae, et aliqua pars fasciae infundibuli magnae (*k*), super

(*a*) Tab. III. 28. 29. 30. 31. 32.
(*b*) Tab. III. 23. 24. 25.
(*c*) Tab. III. C.
(*d*) Tab. III. 34. 35. 40. 41. 42.
(*e*) Tab. III. C. 47.
(*f*) Tab. III. C.
(*g*) Tab. III. 47. 47. 50.
(*h*) Tab. III. 45. 46. 47.
(*i*) Tab. III. 47. 47. 50.
(*k*) Tab. I. 3. 9. 10.

ſuper crenam ſuperque arteriam coronariam ſiniſtram, qua pontis inſtar hae fibrae eleuatae ſuſtinentur, in ſuperficiem ventriculi ſiniſtri (*a*). His nonus in hoc corde poſterius ſe addit funis (*b*), et ramus dexterior ſeptimi funis (*c*), quibus aucta faſciola oblique ſiniſtrorſum vna ad marginem, et apicem verſus antrorſum, deſcendit (*d*), ductu ſimili funium ductui, quo, vbi ad marginem appropinquant, apicem verſus flexae fibrae parum a longitudinalibus differunt (*e*). Hoc ductu circa marginem flectuntur, in ſuperficiemque prodeunt inferiorem (*f*), et porro continuant. Sic plane a margine, vbi emergunt (*g*), ad apicem progrediuntur (*h*), et parallelae fere ducuntur in inferiori hac ſuperficie reliquae marginis parti (*i*) ad apicem vsque, et omnem a funium fibris vacuam partem ſuperficiei hac ſua diſtributione occupant (*k*). Vt vltimae, apici propiores, fibrae, ex ponte productae, vbi ad marginem ex ſuperiori ſuperficie deſcendunt, per ipſum fere reliquum marginem ad focum ducantur, neque in inferiori ſuperficie vlla ſui parte emergant. Inſeruntur hae fibrae omnes ſimul ſumtae in eam partem marginis ventriculi ſiniſtri (*l*), quae fini

(*a*) Tab. I. 87.
(*b*) Tab. I. 82. 83. 84.
(*c*) Tab. I. 72.
(*d*) Tab. I. 88.
(*e*) Tab. I. 85. 86.
(*f*) Tab. III. 45. 48. 51.
(*g*) Tab. III. 45. 51.
(*h*) Tab. III. C.
(*i*) Tab. III. 45. C
(*k*) Tab. III. 45. 51. C.
(*l* Tab. III. C. 47. 47. 50.

fini ſtriae et ſedi ſuperioris foci, pollicem quaſi in hoc margine a ſtria diſtantis, intercedit; ſiniſterius iuxta fibras ordinis ſecundi et proxime ad focum ſuperiorem (*a*), quem quaſi, dum inferiorem focum perficiunt, cum eodem coniungunt. Haud ſingulae tamen ad focum perueniunt fibrae. Quaedam earum longiores (*b*) ad illum pertingunt. Aliae breuiores, comprehenſae inter longas, antequam ad focum perueniunt, in ipſas has longas inſeruntur (*c*), reliquo inter eas interſtitio ſingularibus fibrillis (*d*) repleto. Aliae ſub angulo inſertionis priorum ſe recipere (*e*), aliae ſuper alias tranſire, videntur. Singulae tamen eo ductu feruntur, vt ſimul ſumtae omnes radiatam illam figuram efficiant. Coalitione inordinata hae fibrae ordinis tertii in ſuperiori ventriculi ſuperficie maxime (*f*), vbi margini vero accedunt, diſtinctiores, aliaeque prae aliis eminentes (*g*), et dum per inferiorem continuant ſuperficiem, longae, ſibi mutuo parallelae, fibrillis breuiſſimis, aegre conſpicuis, inter ſe cohaerere videntur (*h*). Manifeſtis longisque et pulchris fibrillis, vbi foco accedunt connectuntur (*i*). Harum quaedam ſingulari genere fibrae quaſi, ſatis craſſae, breues, eſſe videntur obliquae (*k*), quibus ſolitae fibrae connectuntur.

Ordo

(*a*) Tab. III. 50.
(*b*) Tab. III. 29. 30. 31. 32. 45. 46. 47.
(*c*) Tab. III. 44. 50. 42.
(*d*) Tab. III. 38. 38.
(*e*) Tab. III. 51. 36. 37.
(*f*) Tab. I. 84. 88.
(*g*) Tab. I. 85. 86.
(*h*) Tab III. 46. 49. 51.
(*i*) Tab III. 37.
(*k*) Tab. III 43. 43.

Ordo quartus (Tab. I. 89. 85. E. D.) Figura radiata superior (Tab. I. E. 91. 98. 100. 103. 104. 57.)

Quartus fibrarum ordo totus in ſuperiori cordis ſuperficie verſatur, nec vlla in inferiorem fibra deſcendit. Inferuntur ſcilicet in ipſum marginem ſiniſtrum hae fibrae, eiusque anteriorem, apici propiorem, partem (*a*), figuram radiatam in hac ſuperiori ſuperficie efficiendo. Oriuntur a maxima parte crenae, ab ea eius ſede (*b*), vbi ramus ſecundus arteriae coronariae ſiniſtrae, quam pons hactenus tegit, ex carne emergit (*c*), indeque porro a tota reliqua parte ad apicem cordis vsque (*d*). Videntur hinc varia ratione oriri, quemadmodum in praecedenti Diſſertatione de crena dictum eſt. Serratim alibi principia fibrarum ventriculi ſiniſtri finibus fibrarum dextri interponuntur (*e*). Alibi et maximam partem interrupta continuatione fibrae ſiniſtri a dextri fibris oriri videntur (*f*). Oblique hinc ſiniſtrorſum et antrorſum, marginem et apicem verſus, progrediuntur (*g*). Magis tamen paululum praecedentium ordinum fibris a longitudinali ductu recedunt. Quae primae, baſi propiores (*h*), aecuali fere cum dextri ventriculi fibris, ex quibus oriuntur, obliquitate procedunt. Mediae primis principiis quidem apicem verſus deſcendunt paululum, mox vero flexae propiores ductui transuerſo

(*a*) Tab. I. 85. E.
(*b*) Tab. I. 89.
(*c*) Tab. I. h.
(*d*) Tab. I. 89. D.
(*e*) Tab. I. 89.
(*f*) Tab. I. 99. 102.
(*g*) Tab. I. 94. 95.
(*h*) Tab. I. 89. 90.

per ſuperficiem continuant (*a*). Proximae apici fibrae omnium maxime ad transuerſum ductum vergunt (*b*). Vbi vero ad marginem accedunt hae fibrae omnes, apicem verſus flexae, haud magis quam praecedentium ordinum fibrae a ductu longitudinali recedunt (*c*). Hac directione confuſae admodum fibrae per maximam partem ſuperficiei ſuperioris ventriculi continuant, inordinata coalitione vbique confluentes, aegrius a ſe mutuo diſtinguendae (*d*). Ad marginem vbi accedunt, diſtinctae prodeunt, aliis partim prae aliis eminentibus (*e*), partim diuerſis paulisper directionibus progrediendo (*f*). Pulcherrima omnium in ſiniſtro ventriculo radiata fibrarum diſpoſitio earumque cum inferioribus fibris radiatis communicatio eſſe videtur; niſi funium forte diſpoſitionem eorumque ſpecioſas fibrillas, quibus illi nectuntur, praetuleris. A primo ortu ex crena hac fibrae iam ita diſpoſitae ſunt, vt continuando paulatim ad ſe mutuo accedant; cum primae, priores baſi (g), ad longitudinem magis, vltimae, apici propiores (*h*), ad transuerſalem ductum vergant, quae ipſo ex crenae fine prodeunt (*i*), transuerſim progrediantur. Plurimum tamen id confert, quod fibrae appropinquando ad marginem eo magis verſus apicem flectantur, quo

(*a*) Tab. I. 97.
(*b*) Tab. I. 102. 104. D.
(*c*) Tab. I. 85. 91. 98.
(*d*) Tab. I. 94. 95.
(*e*) Tab. I. 91.
(*f*) Tab. I. 95. 85.
(*g*) Tab. I. 89. 90.
(*h*) Tab. I. 102. 104.
(*i*) Tab. I. D.

quo propiores basi sunt (*a*), eo directius ad marginem transeant, quo propius apici ex crena oriuntur (*b*). Vti vero haud integram perfectamque stellam fibrae efficiunt ad mentem *Loweri* et *Senaci*, quemadmodum in superioribus notatum est; ita nec adeo radiatam exacte referunt figuram, vt simplex vnum punctum siue areolam rotundam pro foco, sed striam potius, habeant, oblongam, siue linearem, ad marginis longitudinem in ipso margine (*c*) ductam. In hanc se fibrae ex singulis crenae punctis confertim conferunt. Quamuis aliam atque diuersam faciem prae se ferre videntur figura radiata inferior atque haec superior; analoga prorsus tamen fibrarum vtriusque dispositio est et insertio et modus concentrationis. Nimirum vti in inferiori, sic pariter in superiori, figura radiata haud omnes fibrae ad ipsum focum seu striolam, quae focum efficit, pertingunt. Sunt quaedam sparsim dispositae (*d*), quae solae longiores eo perueniunt; his aliae interponuntur, quae partim ad longas se applicant (*e*), in easque inseruntur, partim inter duas longiores vicinas et concurrentes interceptae sub angulum earum, quem concurrendo aut confluendo efficiunt, se recipere videntur. In ea re prorsus conueniunt cum fibris radiatis inferioribus, quae simili ratione dispositae, simili se ad se mutuo applicant, aliaeque sub alias recipiunt. Quo ergo funium, quo, quae a ponte ortum habent, fibrae ducuntur, quo

 fini-

(*a*) Tab. I. 85. 91.
(*b*) Tab. I. 99. 100. 102. 103. 104.
(*c*) Tab. I. E.
(*d*) Tab. I. 98. 91.
(*e*) Tab. I. 95.

finiuntur, postquam super marginem flexae in inferiorem transierunt ventriculi superficiem, eo penitus ipso modo et quarti ordinis fibrae, prioribus breuiores, in superiori iam superficie ducuntur, eodemque ad marginem modo finiuntur. Videntur ergo omnino vtraeque radiatae fibrae tanquam vna similium fibrarum series, superioresque vti inferiorum continuatio, considerari posse, modo vt focos, in quos se colligunt, diuersos habeant. Coalitione inordinata fibrae ordinis quarti prope crenam et per maximam partem superficiei superioris inter se cohaerent. Prope marginem distinctae fibrillis inconspicuis connectuntur.

De fine fibrarum ventriculi dextri nouarumque sinistri initio ad crenam. Annotatio.

Dictum est in Dissertatione de fibris externis ventriculi dextri, vbi de natura crenae agebatur, finiri dextri ventriculi fibras, nouasque oriri sinistri, in crena; finiri sinistri, oriri dextri, in stria; vti sententia fuit Illustr. *Senaci*; non continuari ex dextro ventriculo fibras in sinistrum ad crenam, ex sinistro in dextrum ad striam, vti visum erat *Lowero* et *Winslowo*. Vidimusque in citata disdissertatione, fascias, basi propiores, imprimis infundibuli fasciam magnam et angularem, quae a filis cartilagineis dextris, anteriori et posteriori, oriuntur, fibris constare latis, quaecunque a stria oriuntur, fibras tenues esse. Vt manifesto latae sint, quae a filis oriuntur, tenues, quae ortum a stria habent, quae quippe a communi binorum posteriorum, dextri et sinistri, filorum principio ortae per striam versus apicem prius ducuntur, deinde flexae in dextri ventriculi fibras abeunt. Iam mirum est, idem et in sinistro obseruari ventriculo; funes crassos esse, qui a filo oriuntur

car-

cartilagineo anteriori finiftro, fimplices fibras, quae originem a crena ducunt. An eam ob caufam id forte, quod, quae a filis oriuntur, vere hinc ortae, vera principia, ideoque craffiora, fint caeteris; quae dictae contra oriri a crena et ftria, ab illis prioribus continuentur potius, propterea que tenniores euadant? Nimirum non, ficut in folitis musculis, parallelas iuxta fe mutuo vbique et aequales fibras cordis, fed neruorum modo in fasciculos collectas, iterumque varie difperfos in ramos, nec raro per anaftomofin denuo coniunctas incedere, notatum eft in fuperioribus. Et manifeftum huius rei exemplum in funibus ventriculi finiftri apparet, qui in ramos primo minores diuifi in fimplices tandem fibras refoluti per inferiorem fuperficiem ventriculi continuant. An tenuitas ergo a crena ftriaque prodeuntium fibrarum, continuatas et ramos has fibras, craffities ortarum a filis, has truncos effe, demonftrat? Non prorfus improbabile hoc argumentum. At tamen multa alia priorem potius, fuperius explicatam, fententiam de ortu et fine fibrarum ad crenam et ftriam mihi fuadere videntur.

CAE-

CAENOPTERIS,

NOVVM E FILICIBVS GENVS,

DESCRIPTVM

a

P. J. BERGIO.

Triginta proxime elapſis annis ſcientia botanica plus augmenti nacta eſt, quam integro alias praeterlapſo ſeculo, quodque indefeſſo ſtudio operaeque clariſſimorum plurium virorum tribuendum, qui nec ſumtibus, nec labori, nec periculo parſerunt, vt nouas detegerent ſtirpes. Sic plurima a peregrinatoribus ruſſicis detecta; plurima a *Thunberg*, *Sparrmann*, *Maſſon*, *Auge*, qui Caput bonae ſpei percurrerunt; *Thunberg* hoc non contentus Indiam orientalem, immo Iaponiam adiit. Illuſt. *Banks* cum ſocio *Solander*, vterque *Forſter* terras auſtralis maris viſitarunt; *Sonnerat*, *Commerſon*, *Aublet*, partim Americam auſtralem, partim inſulas Mauritii et Burboniam, vt plantas carperent, petierunt. Emiſſarii hiſpanici multas herbas ex America Madritum mittunt, pariter ac Sveci *Swartz* et *Hornſtedt* ex vtraque India ad ſuos amicos. Cel. *Mutis*, in America calida degens, beatiſſimo ſolo, plantas obuias legit, deſcribit, pingit, publicas facturus opere ſplendidiſſimo, quod molitur. Sic ſcientia botanica quotidie creſcit.

Ex

Ex horum Cel. virorum collectaneis quaedam eligere mihi licuit, pluraque noua inueni. Spero Ill. Academiam Petropolitanam benigne excepturam, si hac vice nouum inter Filices genus describam.

Caenopteris.

Charact. Generis: Fructificationes frondosae. Punctum marginale solitarium, rima concaua, scobe parua capitulata serta.

1. CAENOPTERIS (furcata) fronde bipinnata: pinnulis imis furcatis, rachi compressa marginata Fig. 1. Tab. V.

Habitat in Insula Bourbon.

Descriptio.

Stipes palmaris, compressiusculus, glaber, nudus. *Frons* spithamaea, bipinnata, erecta, glabra. *Rhachis* frondis compressa, leuiter marginata, e basibus pinnarum decurrentibus. *Pinnae* alternae, pollicares, erecto patentes, distichae, pinnatifidae: laciniis suboppositis, plano-conuexiusculis, 2 vel 3 lineas longis, obtusis, subcarnosis; imis paulo maioribus, furcatis; superioribus sensim minoribus. *Fructificationes* in margine interiori singulae. Laciniae prope apicem solitariae, *rima* subrotunda, concaua, scobe nigra serta.

2. CAENOPTERIS (rutaefolia) frondibus pinnatifidis: laciniis linearibus planis obtusis. Fig. 2. Tab. VI.

Habitat in Cap. bonae spei.

Descriptio.

Stipes teres, glaber. *Frons* pedalis, duplicato-pinnatifida, glabra, flaccida. *Pinnae* inferiores breuiores, suboppoſitae, remotae, petiolatae: pinnulis imis alternis, ſubpetiolatis, cuneiformibus, inciſis; ſuperiores pinnae oppoſitae ſ. alternae, proximiores: pinnulis imis pinnatifidis, reliquis ſimplicibus: foliolis ſ. laciniis linearibus, compreſſo-planis, obtuſis, ſubcarnoſis, ſimplicibus, bifidis vel pinnatifidis, vix ſemiunguicularibus, diſtiche patentibus, glabris, ſubaequalibus. *Fructificationes* ſparſae, rima marginali oblonga, concaua, in margine interiori folioli ſita, ſcobem paruam fouente.

Tab. VII. 3. CAENOPTERIS (viuipara) frondibus tripinnatis laciniis ſubulatis, erectis. Fig. 3.

Acroſticum (viuiparum) frondibus viuiparis bipinnatis: pinnis binatis unilateralibus: pinnulis pinnatifidis furcatis ſubulatis, margine interiore fructificantibus. *Linn. ſuppl.* 444. *

Habitat in inſulis Mauritii et Bourbon.

Deſcriptio.

Stipes palmaris vel ſupra, ſulcatus, glaber, nudus. *Frons* ouato-oblonga, erecta, ſpithamaea, glabra, pinnata: pinnis bipinnatis: laciniis ſ. foliolis ſubulatis, acutis. Inferiores pinnae binatae, vnilaterales, ſurſum ſecundae; ſuperiores ſuboppoſitae, pàtentes. *Fructificationes* ſparſae, in ſingula lacinia frondis ſingulae ſolitariae, conſtantes e rima marginali, in medio laciniae antrorſum ſita, oblonga, concaua, ore integerrimo, e quo emergit ſcobs parua. *Propagines* in ſummitate frondis ſolitariae ſ. binatae, ſparſae, cuneiformes, obtuſae, retuſae, vtrinque planae, ſemiunguiculares, patentes.

MAL-

MALVACEI ORDINIS
PLANTAE NOVAE HYBRIDAE.

Auctore
J. T. KOELREVTER.

Speciosa, quae in hoc ordine saepe occurrit, plantarum facies, florumque peramoenus color atque excellens magnitudo, structuraque ipsorum, ad experimenta in eis capienda maxime idonea, qua mediante castratione laboriosa non raro supersedere plane possumus, me ita inuitarunt, vt plures eiusmodi hybridas tentauerim copulas, quam euentus earum saepissime frustraneus alias mihi suasisset. Maximus sane harum est numerus, illarum vero, quae optatum habuerunt successum, exempla sat pauca. Vtrasque cum beneuolo lectore in sequenti Catalogo communicabo.

EXP. I.

Lavat. *triloba* ♀.
Lavat. *olbia* ♂.
An. 1765. d. 16 et 17. Iul. Flor. 3.
it. An. 1772. d. 17. Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuers. II.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1766, 1769 et 1773 inde procreatae plures, mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis ac formae, ſtaturae autem praeualentis valdeque luxurioſae. Folia tactu non ita ſericea, aſt crenis notabilioribus, lobisque minus profundis inſtructa, quam ♂; e contrario autem non adeo mollia et inſigniter crenata, quam ♀; lobus intermedius, more ♂, lateralibus multo longior, cum in ♀ inter ſe inuicem fere aequales ſint, foliumque circumſcriptione ſubrotundum efforment. Foecunditas, plantarum naturalium reſpectu, maxime quidem imminuta, ſed non penitus extincta; id quod Exp. III. ſatis probatum eſt.

EXP. II.

Lavat. *olbia* ♀.
Lavat. *triloba* ♂.
An. 1768. d. 16. Iul. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. I.

Deſcriptio.

Plantae, anno ſequenti inde productae plures, iis inuerſi experimenti omnino ſimiles erant.

EXP. III.

Lavat. { *triloba* ♀.
olbia ♂. }
Propr. pulu. conſp.
An. 1767. Flor. plur.

Deſcriptio

Plantae nonnullae, anno ſequenti inde procreatae, matri rurſus ſimiliores mihi viſae ſunt, quam patri.

EXP. IV.

EXP. IV.

Lauat. *triloba* ♀.
olbia. ♂.
Sem. ann. 1772 *ſponte nata.*

Deſcriptio.

Plantarum, anno ſequenti inde prognatarum, quaedam ad matris, aliae etiam ad patris imaginem conformatae magis, quam ſub ipſarum priori ſtatu hybrido.

EXP. V.

Lavat. *thuring.* ♀.
Lavat. *triloba* ♂.
An. 1772. d. 13 Aug. Flos. 1.
Vid. Exp. inuerſ. VI.

Deſcriptio.

Ex ſeminibus, anno ſequenti in fimetum ſatis, progerminauerant plantae quinque, quarum vna, ſub dio culta, iam ſub finem menſis Sept. eiusdem anni, reliquae autem in ollis, anno 1774, demum floruere: mediae inter vtrumque parentem ſimilitudinis, nec minoris foecunditatis, quam iſtae Exp. 1.

EXP. VI.

Lavat. *triloba* ♀.
Lavat. *thuring.* ♂.
An. 1772. d. 16 Aug. Flos. 1.
Vid. Exp. inuerſ. V.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1773, mihi prognatae plures, ſub finem menſis Sept. maxima ex parte iam florebant, iis Exp. inuerſi ſimillimae.

EXP. VII.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
triloba ♂. }

Lavat. *triloba.* ♂.

An. 1773. d. 16 Aug. Flor. 9.

Descriptio.

Capsulae matris ☿. partim vacuae penitus, partim duobus tribusue seminibus bonis dotatae. Plantae nonnullae, anno 1774 inde prognatae, patri, Lav. trilobae, iam multo similiores, quam antea.

EXP. VIII.

Lavat. *thuring.* ♀.
triloba ♂.

Sem. an. 1773. *Sponte nata.*

Descriptio.

Plantae, hinc an. 1774 enatae (quarum nonnullae iam Iulio mense floruere) tam ratione florum, quam foliorum respectu, cum Lav. triloba quam maxime conueniebant.

EXP. IX.

Lavat. *thuring.* ♀.

Lavat. *olbia.* ♂.

An. 1772. d. 14 Aug. Flor. 2.

Descriptio.

Plantae in universum mediae inter ♀ et ♂ similitudinis, earundemque qualitatum, vt caeterae huius generis plantae hybridae.

EXP.

EXP. X.

Malv. *ſylveſtris* ♀.
fl. alb.
Malv. *mauritan.* ♂.
fl. carmeſ.
An. 1765. d. 19 Aug. Flor. 2.
Vid. Exp. inverſ. XI.

Deſcriptio.

Plantae ann. 1766. inde procreatae flores dabant pallide carmeſinos, ac incorrupta foecunditate praeditos; hinc alteram iſtius meram eſſe varietatem, recte iudico.

EXP. XI.

Malv. *mauritan.* ♀.
fl. carmeſ.
Malv. *ſylveſtr.* ♂.
fl. alb.
An. 1773. d. 8 Iul. Flor. 4.
Vid. Exp. inuerſ. X.

Deſcriptio.

Varietas hybrida priori Exp. X. ſimillima.

EXP. XII.

Malv. *capenſ.* ♀.
ſcabroſ. γ.
Malv. *capenſ.* β. ♂.
An. 1766. d. 13. Aug. Flor. 2.

Deſcriptio.

Foecunditas plantarum inde enatarum haud imminuta differentiam vere ſpecificam non admittit, licet ipſae mediae inter ♀ et ♂ de caetero fuerint conformationis.

EXP.

EXP. XIII.

Alcea *ficifol.* ♀.

fl. carmeſ.

Alcea *rotundiſ.* ♂.

An. 1764. d. 2. Sept. Flor. 3. α. cum ♂ fl. profunde ſanguineo.

it. An. 1772. d. 27 Aug. Flos 1. β. cum ♂. fl. multipl. atro-purpureo.

it. An. 1772. d. 27 Aug. Floſ. 1. γ. cum ♂. fl. multipl. ſulphureo.

Vid. Exp. inuerſ. XIV.

Deſcriptio.

Floruit 1. ex α, anno 1765. d. 20 Sept. flore purpureo, ſimplici.

Floruit 1. ex β, anno 1773. Sub finem Sept. flore duplici, profunde purpureo.

Floruit 1. ex γ. anno 1773. ſub finem Septembr. flore ſimplici, pallide ſulphureo, it. 1. ex ead. d. 21 Iun. 1774. flore duplici, pallide ſulphureo: Folia inter vtramque mediam ſeruabant loborum proportionem, ac omnes, vti mihi quidem videbatur, aeque foecundae erant, ac ipſarum parentes; hinc ♂ a ♀ vix ſufficienter diſtinctam eſſe, iam olim Cel. Linnaeus in Spec. Pl. p. 967. recte ſtatuit.

EXP. XIV.

Alcea *rotundiſ.* ♀.

fl. alb.

Alcea *ficifol.* ♂.

fl. carmeſ.

An.

An. 1765. d. 18 Iul. Flor. 2.
Vid. Exp. inuerſ. XIII.

Deſcriptio.

Plantae, anno 1766. inde procreatae, eiusdem plane habitus cum iis Exp. inuerſi. Floruit anno 1767, menſe Iulio earum 1. flor. multipl. purpur. it. 1. fl. ſimpl. ex carneo-albicante, it. 1. flor. multipl. carnei coloris.

EXP. XV.

Althaea *officin.* β. ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1774. d. 29 Iul. et ſeq. Flor. 6.
Vid. Exp. inuerſ. XVI.

Deſcriptio.

Capſulae ♀, ex hac copula ortae, omnes bonae notae, ſeminibusque perfectis erant repletae; plantulae etiam anno 1775, inde propullulabant, ſed, cum caſu aliquo improuiſo nimis cito deperierint, de earum natura certi aliquid in medium proferre nequeo.

EXP. XVI.

Althaea *cannab.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 29 Iul. et ſeq. Flor. 10.
Vid. Exp. inuerſ. XV.

Deſcriptio.

Capſulae ♀ eiusdem cum prioribus foecunditatis ac perfectionis; ſed eadem fata experta ſunt ſemina, iam terrae commiſſa.

COPVLATIONES LAVATERARVM, ALIARVMQVE MALVACEARVM, FRVSTRA HVCVSQVE TENTATAE.

Congeneres.

EXP. XVII.

Lauat. *arbor.* ♀.
Lauat. *trimestr.* ♂.
An. 1765. d. 8. Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. XXIII.
Conceptio nulla.

EXP. XVIII.

Lauat. *olbia.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 20 Iun. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. XIX.

Lauat. *trilob.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 22 Iul. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP. XX.

Lauat. *thuring.* ♀.
Lauat. *cret.* ♂.
An. 1773. d. 10 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXI.

Lauat. *triloba* ♀.
Lauat. *trimestr.* ♂.
An. 1765. d. 17 Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuers. XXV.
Conceptio nulla.

EXP. XXII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Lauat. *trimestr.* ♂.
An. 1762. d. 6 Sept. Flor. 2.

EXP. XXIII.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1765. d. 5 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. XVII.
Conceptio nulla.

EXP. XXIV.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1768. d. 12 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXV.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Lauat. *triloba* ♂.
An. 1765. d. 8 Aug. Flor. 4.
Vid. Exp. inuers. XXI.
Conceptio nulla.

EXP. XVI.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *Althea.* ♂.

An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXVII.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *peruu.* ♂.

An. 1766. d. 8 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XXVIII.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *carolin.* ♂.

An. 1766. d. 17 Aug. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XXIX.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *ſylueſtr.* ♂.

An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. XXXI.

Conceptio nulla.

EXP. XXX.

Malua *capenſ.* ♀.

ſcabr. γ.

Malua *criſpa.* ♂.

An. 1766. d. 12 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXXI.

Malua *syluestr* ♀.
Malua *capens.* ♂.
scabr. γ.
An. 1765. d. 22 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. XXX.
Conceptio nulla.

EXP. XXXII.

Malua *syluestr.* ♀.
Malua *verticill.* ♂.
An. 1765. d. 21 Aug. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP. XXXIII.

Malua *syluestr.* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1766. 22 Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XXXIV.

Malua *Alcea.* ♀.
Malua *rotundif.* ♂.
An. 1768. d. 14 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXXV.

Malua *moschata* ♀.
Malua *aegypt.* ♂.
An. 1770. d. 7 Aug. Flor. 3.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXP. XXXVI.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *carolin.* ♂.
An. 1766. d. 12 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XXXVII.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *rotundif.* ♂.
An. 1766. d. 13 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XXXVIII.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1766. d. 9 Aug. Flos 1.
Conceptio inanis,
vel adhuc dubia.

EXP. XXXIX.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *capenſ.* ♂.
ſcabr. γ.
An. 1766. d. 10 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XL.

Malua *moſchata* ♀.
Malua *ſyluestr.* ♂.
An. 1765. d. 4 Aug. Flor. 4.
Conceptio nullo.

EXP.

EXP. XLI.

Alcea *procumb.* ♀. (*a*)
Alcea *rosea.* ♂.
An. 1773. d. 9. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XLII.

Alcea *procumb.* ♀.
Alcea *ficifol.* ♂.
An. 1773. d. 7. Aug. et sequent Floris.
Vid. Exp. inuers. XLIII.
Conceptio inanir, vel adhuc dubia.

EXP. XLIII.

Alcea *ficifol.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1773. d. 9. Aug. Flor. 6.
Vid. Exp. inuers. XLII.
Conceptio inaris, vel adhuc dubia.

EXP. XLIV.

Napaea *dioica* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1765. d. 11. Aug. Flor. plur.
Conceptio nulla.

EXF. XLV.

Hibisc. *palustr.* ♀.
Hibisc. *syriac.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flor. 5.
Conceptio nulla.

EXP.

(*a*) Act. palat. Tom. III. p. 235. Tab, XVII.

EXP. XLVI.

Hibisc. *syriac.* ♀.
Hibisc. *pentacarp.* ♂.
An. 1774. d. 3. Sept. Flor. 3.
Vid. Exp. inuers. LXII.
Conceptio nulla.

EXP. XLVII.

Hibisc. *syriac.* ♀.
Hibisc. *Trion.* *α.* ♂.
An. 1774. d. 3. Sept. Flor. 6.
Vid. Exp. inuers. LXV.
Conceptio nulla.

EXP. XLVIII.

Hibisc. *Ficuln.* ♀.
Hibisc. *Manihot.* ♂.
An. 1765. d. 10. Sept Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XLIX.

Hibisc. *Sabdar.* ♀.
Hibisc. *Manihot.* ♂.
An. 1760. d. 20. Jan. Flor. 1.
item An. 1762. d. 13. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. L.

Hibisc. *Sabdar.* ♀.
Hibisc. *Ficuln.* ♂.
An. 1760 d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LI.

Hibisc. *Sabdar.* ♀.
Hibisc. *Trionum.* *α.* ♂.
An. 1760. d. 20. Jun. Flos 1.
It. An. 1762. d. 21. Aug. Flor. 2.
Vid. Exp. inuers. LXVII.
Conceptio nulla.

EXP. LII.

Hibisc. *Manihot.* ♀.
Hibisc *esculent.* ♂.
An. 1764. d. 17. Sept. Flor. 2.
Vid. Exp. inuers. LX.
Conceptio nulla.

EXP. LIII.

Hibisc. *Manihot.* ♀.
Hibisc. *Maluauisc.* ♂.
An. 1764. d. 17. Sept. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LIV.

Hibisc. *Manihot.* ♀. variet. fl. min. (*b*)
Hibisc. *Sabdar.* ♂.
An. 1762. d. 25. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

(*b*) Variet. foliis quinquepartitis, flore minore. In Libellis meis: Zweyte Forts. der vorläuf. Nachr. S. 124. und dritte Fortsetz. S. 114. haec eadem planta intelligenda, vbi ex errore pro vero Hibisco *vitifolio* Linn. habebatur.

EXP. LV.

Hibisc. *Manihot.* ♀. variet. fl. min.
Hibisc. *palustr.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LVI.

Hibisc. *Manibot.* ♀. variet. fl. min.
Hibisc. *Trionum.* β. ♂.
An. 1762. d. 22. Jul. Flor. 2.
Vid. Exp. inuers. LXIX.
Conceptio nulla.

EXP. LVII.

Hibisc. *Abelmosch.* ♀.
Hibisc *Manihot.* ♂.
An. 1766. d. 1. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LVIII.

Hibisc. *Abelmosch.* ♀.
Hibisc. *palustr.* ♂.
An. 1766. d. 26. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP LIX.

Hibisc. *esculentus.* ♀.
Hibisc. *Maluauiscus* ♂.
An. 1764. d. 17. Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LX.

Hibisc. *esculent.* ♀.

Hibisc. *Manihot.* ♂.

An. 1762. d. 15 Aug. Flos 1.

it. An. 1764. d. 14 Sept. Flos 1.

Vid. Exp. inuers. LII.

Conceptio nulla.

EXP. LXI.

Hibisc. *esculent.* ♀.

Hibisc. *Trion.* β. ♂.

An. 1762. d. 22 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXII.

Hibisc. *pentacarp.* ♀.

Hibisc *syriac.* ♂.

An. 1774. d 4 Sept. Flor. 3.

Vid. Exp. inuers. LII.

Conceptio nulla.

EXP. LXIII.

Hibisc. *pentacarp.* ♀.

Hibisc. *Trionum* α. ♂.

An. 1774. d. 29 Aug. Flor. 2.

Vid. Exp. inuers. LXXI.

Conceptio nulla.

EXP. LXIV.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.

Hibisc. *Maluausc.* ♂.

An. 1761. d. 16 Sept. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXV.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.
Hibisc. *syriac.* ♂.
An. 1774. d. 3 Sept. Flor. 2.
Vid. Exp. inuers. XLVII.
Conceptio nulla.

EXP. LXVI.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.
Hibisc. *ficulneus* ♂.
An. 1760. d 24 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXVII.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.
Hibisc. *Sabdar.* ♂.
An. 1760. d. 20 Iun. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. LI.
Conceptio nulla.

EXP. LXVIII.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.
Hibisc. *Manihot.* ♂.
An. 1762. d. 13 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. LXIX.

Hibisc. *Trionum* β. ♀.
Hibisc. *Manihot.* ♂.
variet. fl. min.
An. 1762. d. 8 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. LI.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LXX.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.

Hibisc. *Abelmosch.* ♂.

An. 1760. d. 1 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXI.

Hibisc. *Trionum* α. ♀.

Hibisc. *pentacarp.* ♂.

An. 1774. d. 20 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. LXIII.

Bigeneres.

EXP. LXXII.

Lauat. *arborea* ♀.

Althaea *cannab.* ♂.

An. 1764. d. 3 Sept. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXIII.

Lauat. *arborea* ♀.

Alcea *roſea.* ♂.

An. 1764. d. 2 Sept. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXIV.

Lauat. *arborea* ♀.

Malua *ſylueſtr.* ♂.

An. 1765. d. 11 Aug. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXV.

Lauat. *arborea* ♀.

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 10 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXVI.

Lauat. *olbia.* ♀.

Alcea *rosea.* ♂.

An. 1765. d. 24 Iun. Flor. 2.

Conceptio nulla

EXP. LXXVII.

Lauat. *olbia.* ♀.

Malua *syluestr* ♂.

An. 1765. d. 21 Iun. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXVIII.

Lauat. *olbia.*

Malua *maurit.* ♂.

An. 1765. d. 25 Iul. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXIX.

Lauat. *triloba* ♀.

Althaea *officin.* ♂.

An. 1765. d. 28 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXX.

Lauat. *triloba* ♀.

Althaea *cannab.* ♂.

An. 1765. d. 3 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXI.

Lauat. *triloba* ♀.

Alcea *rosea*. ♂.

An. 1772. d. 27 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXII.

Lauat. *triloba* ♀

Alcea *ficifol*. ♂.

An 1765. d. 15 Iul. Flos 1.

Vid. Exp. inuerſ. CXVII.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXIII.

Lauat. *triloba* ♀.

Alcea *procumb*. ♂.

An. 1773. d. 9 Aug. Flor. 4.

Vid. Exp. inuerſ. CXXIX.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXIV.

Lauat. *triloba* ♀.

Malua *maurit*. ♂.

An. 1765. d. 22 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. LXXXV.

Lauat. *triloba* ♀.

Malua *Alcea*. ♂.

An. 1766. d. 22 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. LXXXVI.

Lauat. *triloba* ♀.
Malua *moschat.* ♂.
An. 1765. d. 23 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXVII.

Lauat. *triloob* ♀.
Malua *capens.* ♂.
ſcabr. γ.
An. 1766. d. 22 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXVIII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 31 Iul. Flor. 1.
Vid. Exp. inuerſ. CXXXII.
Conceptio nulla.

EXP. LXXXIX.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *hirſuta* ♂.
An. 1773. d 15 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. XC.

Lauat. *thuring.* ♀.
Alcea *roſea.* ♂.
An. 1772. d. 25 Aug. et ſeq. Flor. 11.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XCI.

Lauat. *thuring.* ♀.

Alcea *ficifol.* ♂.

An. 1772. d. 17 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XCII.

Lauat. *thuring.* ♀.

Alcea *procumb.* ♂.

An. 1773. d. 13 Iul. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XCIII.

Lauat. *thuring.* ♀.

Malua *syluestr.* ♂.

An. 1772. d. 1 Sept. Flor. 2.

Conceptio nulla.

EXP. XCIV.

Lauat. *thuring.* ♀.

Malua *Alcea.* ♂.

An. 1773. d. 22 Iul. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXP. XCV.

Lauat. *cret.* ♀.

Malua *rotundif.* ♂.

An. 1771. d. 10 Aug. Flor. 6.

Conceptio nulla.

EXP. XCVI.

Lauat. *trimestr.* ♀.

Althaea *officin.* ♂.

An. 1765. d. 10 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XCVII.

Lauat. *thuring.* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1765. d. 8 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XCVIII.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Alcea *rosea.* ♂.
An. 1765. d. 7 Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. XCIX.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1773. d. 15 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. CXXVI.
Conceptio nulla.

EXP. C.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Malua *syluestr.* ♂.
An. 1760. d. 29 Iul. Flor. 2.
it. An. 1762. d. 31 Iul. Flor. 4.
Vid. Exp. inuers. CXI.
Conceptio nulla.

EXP. CI.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Malua *maurit.* ♂.
An. 1765. d. 10 Aug. Flor. 4.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CII.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Malua *moschat.* ♂.
An. 1765. d. 6 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CIII.

Lauat. *trimestr.* ♀.
Malua *capens.* ♂.
An. 1768. d. 15 Iul. Flor. 1.
Conceptio nulla.

EXP. CIV.

Malua *capens.* ♀.
scabr. γ.
Sida *Abutil.* ♂.
An. 1766. d. 19 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CV.

Malua *capens.* ♀.
scabr. γ.
Malachre *capit.* ♂.
An. 1766. d. 7 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CVI.

Malua *syluestr.* ♀.
Lauat. *trimestr.* ♂.
An. 1765. d. 20 Aug. Flos. 1.
Vid. Exp. inuers. C.
Conceptio nulla.

EXP. CXII.

Malua *maurit.* ♀.
Althaea *hirsut.* ♂.
An. 1773. d. 4 Iul. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CVIII.

Malua *maurit.* ♀.
Alcea *procumb.* ♂.
An. 1768. d. 10 Iul. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CIX.

Malua *Alcea.* ♀.
Lauat. *trimestr.* ♂.
An. 1768. d. 10 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CX.

Malua *moschata* ♀.
Lauat. *arbor.* ♀.
An. 1765. d. 3 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXI.

Malua *moschata* ♀.
Alcea *ficifol.* ♂.
An. 1765. d. 2 Aug. Flor. 2.
Vid. Exp. inuers. CXXII.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXII.

Malua *mofchat.* ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1765. d. 2 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla

EXP. CXIII.

Alcea *rofea.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 4 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXIV.

Alcea *rófea.* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 3 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXV.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *arbor.* ♂.
An. 1764. d. 29 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXVI.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1764. d. 29 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXVII.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *triloba* ♂.
An. 1765. d. 26 Iul. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. LXXXII.
Conceptio nulla.

EXP. CXVIII.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *thuring.* ♂.
An. 1772. d. 17 Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuerſ. XCI.
Conceptio nulla.

EXP. CXIX.

Alcea *ficifol.* ♀.
Lauat. *trimeſtr.* ♀.
An. 1764. d. 4 Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXX.

Alcea *ficifol.* ♀.
Malua *ſylueſtr.* ♂.
An. 1764. d. 28 Iul. Flos 1.
— 1765. d. 5 Aug. —— 1.
— 1772. d. 1 Sept. —— 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXI.

Alcea *ficifol.* ♀.
Malua *maurit.* ♂.
An. 1765. d. 28 Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXXII.

Alcea *ficifol.* ♀.

Malua *moschata* ♂.

An. 1764. d. 7 Sept. Flos 1.

Vid. Exp. inuers. CXI.

Conceptio nulla.

EXP. CXXIII.

Alcea *ficifol.* ♀.

Vrena *lobat.* ♂.

An. 1764. d. 4 Sept. Flos 1.

Conceptio nullo.

EXP. XXIV.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *triloba* ♂.

An. 1773. d. 4 Aug. Flos 1.

Vid. Exp. inuers. LXXXIII.

Conceptio nulla.

EXP. CXXV.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *cret.* ♂.

An. 1773. d. 16 Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. CXXVI.

Alcea *procumb.* ♀.

Lauat. *trimestr.* ♂.

An. 1763. d. 9 Aug Flos 1.

Vid. Exp. inuers. XCIX.

Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XXVCII.

Alcea *procumb.* ♀.
Malua *carolin.* ♂.
An. 1773. d. 24. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXVIII.

Alcea *procumb.* ♀.
Malua *Alcea.* ♂.
An. 1763. d. 9. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXIX.

Alcea *procumb.* ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1763. d. 21. Aug. Flos 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXX.

Alcea *procumb.* ♀.
Althaea *hirsut.* ♂.
An. 1773. d. 9 Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXI.

Althaea *officin.* β. ♀.
Lauat. *olbia.* ♂.
An. 1774. d. 1 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXXXII.

Althaea *officin.* β. ♀.
Lavat. *thuring.* ♂.
An. 1760. d. 29. Iul. Flos 1.
—— 1774. d. 31. Iul. Flor. 3.
Vid. Exp. inuerf. LXXXVIII.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIII.

Althaea *officin.* β. ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 2. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIV.

Althaea *officin.* β. ♀.
Sida *ſpinoſa.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXV.

Althaea *cannab.* ♀.
Lavat. *olbia.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVI.

Althaea *cannab.* ♀.
Lavat. *thuring.* ♂.
An. 1774. d. 31. Iul. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVII.

Althaea *cannab.* ♀.
Alcea *rosea.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXVIII.

Althaea *cannab.* ♀.
Napaea *hermaphrod.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXXXIX.

Althaea *cannab.* ♀.
Sida *spinosa* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXL.

Hibisc. *ficuln.* ♀.
Gossyp. *herbac.* ♂.
An. 1760. d. 2. Aug. Flos 1.
Vid. Exp. inuers. CLVIII.
Conceptio nulla.

EXP. CXLI.

Hibisc. *sabdar.* ♀.
Malva *capens.* *a.* ♂.
An. 1760. d. 29. Jun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CXLII.

Hibifc. *Manihot.* ♀.
Lavat. *trilob.* ♂.
An. 1760. d. 28. Jun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIII.

Hibifc. *Manihot.* ♀.
Sida *Abutilon.* ♂.
An. 1760. d. 3. Jul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIV.

Hibifc. *Abelmofch.* ♀.
Goffyp. *herbac.* ♂.
An. 1760. d. 31. Jul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLV.

Hibifc. *Trion. α.* ♀.
Lavat. *arbor.* ♂.
An. 1760. d. 2. Apr. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVI.

Hibifc. *Trion. α.* ♀.
Malv. *capenf. α.* ♂.
An. 1760. d. 29. Jun. et feq. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVII.

Hibisc. *Trion.* α. ♀.
Malva *carolin.* ♂.
An. 1762. d. 29. Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CXLVIII.

Hibisc. *Trion.* α. ♀.
Malva *sylvestr.* ♂.
A. 1760. d. 27. Iun. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CXLIX.

Hibisc. *Trion.* α. ♀.
Malva *crispa* ♂.
An. 1760. d. 1. Iul. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CL.

Hibisc. *Trion.* α. ♀.
Althaea *officin.* β. ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLI.

Hibisc. *Trion.* α. ♀.
Althaea *cannab.* ♂.
An. 1774. d. 4. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. CLII.

Hibisc. *Trion.* *α.* ♀.
Sida *spinosa.* ♂.
An. 1774. d. 3. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CLIII.

Hibisc. *Trion.* *α.* ♀.
Sida *cristata.* ♂.
An. 1760. d. 30. Iun. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLIV.

Hibisc. *Trion* *α.* ♀.
Malachra *capit.* ♂.
An. 1772. d. 30 Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLV.

Hibisc. *Trion.* *α.* ♀.
Napaea *hermaphr.* ♂.
An. 1774. d. 2. Aug. Flor. 2.
Conceptio nulla.

EXP. CLVI.

Hibisc. *Trion.* *α.* ♀.
Gossyp. *herbac.* ♂.
An. 1759. d. 27. Aug. Flos 1.
—— 1760. d. 2. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLVII.

Hibifc. *Trion.* *α.* ♀.
Pentapetes *phoenicea* ♂.
An. 1759. d. 27. Aug. Flos 1.
—— 1760. d. 30. Aug. Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLVIII.

Goffyp. *herbac.* ♀.
Hibifc. *ficuln.* ♂.
An. 1765. d. 3. Sept Flos 1.
Vid. Exp. inuerf. CXL.
Conceptio nulla.

EXP. CLIX.

Goffyp. *herbac.* ♀.
Pentapet. *phoenic.* ♂.
An. 1765. d. 3 Sept Flor. 3.
Conceptio nulla.

EXP. CLX.

Vrena *lobat.* ♀.
Hibifc. *Trion.* *α.* ♂.
An. 1774. d. 4. Sept. Flos 1.
Conceptio nulla.

Com-

Compositae.

EXP. CLVI.

Lavat. *thuring.* ♀.

Lavat. *trilob.* ♀. } ♂.
olbia. ♂ }

An. 1771. d. 24. Sept. Flor. 5.
Conceptio inanis, vel adhuc dubia.

EXP. CLVII.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
trilob. ♂. }

Malv. *capens.* ♂.
Scabr. γ.

An. 1773. d. 20. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLVIII.

Lavat. *thuring.* ♀ } ♀.
triloba ♂. }

Alcea *procumb.* ♂.

An. 1773. d. 19. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP. CLXIX.

Lavat. *thuring.* ♀. } ♀.
triloba ♂. }

Althaea *officin.* β. ♂.

An. 1773. d. 18. Aug. Flos 1.
Conceptio nulla.

EXP.

EXP. XLXX.

Malv. *maurit.* ♀. / *ſylveſtr.* ♂. } ♀.

Napaea *hermaphr.* ♂.

An. 1774. d. 4. Aug. Flor. 3.

Conceptio nulla.

EXP. XLXXI.

Althaea *officin.* β. ♀.

Malv. *maurit.* ♀. / *ſylveſtr.* ♂. } ♂.

An. 1774. d. 3. Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

EXP. XLXXII.

Hibiſc. *Trion.* α. ♀.

Malv. *maurit.* ♀. / *ſylveſtr.* ♂. } ♂.

An. 1774. d. 4. Aug. Flos 1.

Conceptio nulla.

ASTRONOMICA.

DE
OCCVLTATIONIBVS QVIBVSDAM SINGVLARIBVS, SIVE STELLARVM FIXARVM A PLANETIS, SEV ETIAM PLANETARVM A SE INVICEM.

Auctore
A. J. LEXELL.

§. 1.

Inter phaenomena caeli vti rariora, ita attentione quoque praeprimis digna, referendae merito ſunt occultationes ſtellarum fixarum a Planetis, vel etiam intimiores iſti congreſſus binorum Planetarum inter ſe, quibus vnus eorum ab altero obtegitur. Quum igitur Annales ſiue veteris, ſeu recentioris Aſtronomiae, non niſi pauciſſima quaedam ſpecimina huiusmodi occultationum ſuppeditent, haud praeter rem eſſe exiſtimaui, vt potiores harum obſeruationum examini ſubiicerem. In aeſtimando autem pretio harum obſeruationum merito perpendendum eſt, ante inventa Horologia pendula et Teleſcopia, huius generis obſeruationes omnimoda exactitudine inſtitutas cenſeri non poſſe; quippe quum iudicium de huiusmodi occultationibus, quod in animaduerſione nudis oculis facta fundatur, nonnumquam multum a veritate abludere possit. In congressu enim Planetae cum stella intimiori, dum Planeta viuidiori apparet luce, fieri vtique potest, vt lumen stellae nudis oculis quasi dispareat, etiam si distantia inter Planetam & stellam plurium intercedat minutorum, haud secus ac stellae inferiorum ordinum, dum limbo Lunae lucido approximantur, nonnunquam ad distantiam vnius vel alterius minuti ab hoc Limbo penitus dispareant per optima quoque Telescopia conspectae. Tum vero haud raro obseruationes antiquiori aeuo institutae eo ex capite pro dubiis haberi merentur, quod tempus, quo institutae fuerunt, non prorsus indubitata ratione sit definitum. In hac igitur mea disquisitione in id praeprimis intentus fui, vt examinarem, vtrum secundum Theorias Planetarum stabilitas, verisimile videatur factam tunc temporis esse occultationem quandam stellae fixae a Planeta, vel etiam vnius Planetae ab altero, quando Annales Astronomici huiusmodi obseruationem factam esse perhibent.

§. 2. Inter antiquissimas huius generis obseruationes illa est, de qua *Ptolamaeus* in Libro Almagesti XI. Cap. 3. refert, quod anno post mortem Alexandri 83, die 18 Mensis, qui Aegyptiis Epiphi dicitur, Iouis stella matutina occultauerit Asellum Australem, hoc est illam in Constellatione Cancri stellam, quae a *Beyero* littera δ designatur. Tempus igitur huius obseruationis ad aeram Iulianam reductum incidet in Annum ante Christum natum 240, diem 3 Septemb. cum 14^{h}. Facile autem liquet nos heic de exacto numero horarum non magnopere esse sollicitos; sufficiet enim, si generatim demonstrare valeamus, die civili 4 Septembris anno ante Christum 240 horis matutinis

nis Planetam Iouis tam prope ad Afellum Auſtralem acceſſiſſe, vt illam ſtellam plane oblegere viſus ſit. Inuenimus autem pro tempore aſſignato ex Tabulis Solaribus Cel. de la *Caille* Longitudinem Solis $5^s. 7°. 14'$ et Logarithmum diſtantiae Solis a terra 9, 999264, diſtantia nimirum media Solis a terra ipſi vnitati aequata. Tumque ex Tabilis Cel. de la *Lande* pro motu Iouis, computauimus Longitudinem Iouis Heliocentricam $2^s. 28°. 8'$. Latitudinem Heliocentricam Borealem $30'. 58''$ et Logarithmum diſtantiae Iouis a Sole 0, 723170. Hinc computo ſubducto inuenitur Longitudo Geocentrica Iouis $3^s. 7°. 43'$. circiter et Latitudo Geocentrica Borealis $28'. 36''$. Iam quia Longitudo Afelli Auſtralis ad Annum 1750 ineuntem ſtatuitur $4^s. 5°. 13'. 46''$. et Latitudo Borealis $4'. 18''$; ſi quantitas praeſſionis aequinoctiorum Annis 2000 ſtatuatur $28'. 9''$, quippe quae quantitas praeceſſionis haud admodum ab obſeruationibus abludere videtur, erit pro annis 1990 elapſis praeceſſio $28°. 0'. 33''$, hincque fiet pro epocha obſeruationis die 3 Septembris Anno 240 ante Nativ. C. Longitudo Afelli Auſtralis $3^s. 7°. 14'$ circiter, Latitudo autem iſtius ſtellae erit circiter $16'$ Auſtralis.

§. 3. Ex his igitur nunc patet, primum quod Longitudinem binorum Aſtrorum attinet maiorem adeſſe differentiam, quam vt occultatio aſelli a Ioue reapſe locum habere potuerit, quippe quum iſta differentia Longitudinum $29'$ abſoluatur. Vtcunque autem magna haec habeatur differentia, eius tamen ratio aliquo modo explicari poteſt primum ex ipſa incertitudine circa Theoriam Iouis, idque eo magis quod in determinando loco Iouis Heliocentrico, perturbationum a Saturno oriundarum nullam ha-

 bueri

buerimus rationem, quae tamen perturbationes ipsum locum Heliocentricum Iouis nonnunquam 10 Minutis primis mutare valent. Tum vero non raticendum est dari quosdam Auctores, qui hanc obseruationem ad diem proxime praecedentem 2 scilicet Septemb. referunt, pro qua epocha inueni Longitudinem Iouis Geocentricam 3ˢ. 7°. 33′ circiter. Conf. *Lansbergii Thesaur. Obseruat. Astronomic. p.* 163. Hoc autem facto differentia in Longitudine iam non amplius erit nisi 19′, cuiusmodi differentiae ratio pro obseruatione adeo remota, vt iam monui, haud difficulter explicari potest. Verum cum differentia in Latitudine quae ex calculo inuenta est 45 circiter minutorum primorum longe alia est ratio. Licet enim de variatione pro Latitudine Stellae Aselli Australis ab anno 240 ante Nat. C. vsque ad annum 1750, minime certi esse queamus, id saltem vix in dubium vocari potest, quin Latitudo Stellae pro epocha obseruationis commemorata fuerit australis. At nullo modo fieri potuisse nobis persuademus, vt Latitudo Iouis eodem tempore fuerit Australis, quippe quum inde sequeretur Longitudinem Nodi pro orbita Iouis, tempore obseruato statui debere ad minimum 2ˢ. 28°, qua Longitudine Nodi comparata cum illa, quae nostro Seculo obtinet, concluderetur tempore 2000 Annorum non maior variatio in Longitudine Nodi Iouis quam 10°; quae igitur variatio, si aequabili procederet tenore, variatio annua non nisi 18″ statui deberet, quae determinatio ab illis enormiter abludit conclusionibus, quae siue ex obseruationibus seu Theoria praelucente fuerunt elicitae. Si nimirum Longitudo Stellae et Iouis Geocentrica supponatur fuisse 3ˢ. 7°. 14′, ob Longitudinem Solis 5ˢ. 7°. 14′ erit Elongatio Solis a Ioue e terra spectata 60° circiter; vnde colligitur differentia

rentia Longitudinum Iouis et Solis $69^\circ. 24'. 45''$, ideoque Longitudo Iouis Heliocentrica $2^s. 27^\circ. 49'$ ex quo omnino patet Longitudinem Nodi maiorem ſtatui debere, quam $2^s. 28^\circ$, vt ſcilicet Latitudo Iouis obtineatur Auſtralis.

§. 4. Quum igitur ſtella Cancri δ Eclipticae valde ſit vicina; obſeruatio allata magni ſane eſſet momenti, pro determinanda variatione in Longitudine Nodi Iouis, modo Latitudo Stellae δ pro tempore obſeruationis exacte haberetur cognita. Verum quia de variatione in Latitudine ſtellarum fixarum certum eſt eam inaequabili tenore augeri vel minui, tumque plane incognitum ſit, an non huic ſtellae motus quidam competat proprius, Latitudo Aſelli Auſtralis minime hic pro cognita aſſumi poteſt. Patet igitur argumenta, quae ex hac obſeruatione deducuntur, pro determinando motu Nodi Iouis vix ſibi rite conſtare poſſe. Sic dum Celeb. *Caſſini* in ſua Aſtronomia pag. 447 ex hac obſeruatione concluſit, motum annuum Longitudinis Nodi pro Ioue eſſe $25''$ circiter, eo ex fundamento eius ratiocinium procedit, quod Latitudo ſtellae fixae pro Epocha modo dicta ſit $3'. 30''$ Bor., quippe quum Celeb. *Maraldi* eam Anno 1706 obſeruaſſet $3'. 30''$, tumque a Celeb. *Flamſtead* eadem Latitudo inuenta ſit $3'. 46''$, cum tamen Catalogi antiquiores, vtpote ille a *Tychone* adornatus, Latitudinem huius ſtellae ſupponant $4'$ Auſtralem. Vide *Tychonis Brahei Aſtronom. Inſtaur. Progymnasmata pag.* 182. Propter iſtam igitur rationem illuſtris hic Aſtronomus *Caſſini* iam concludere debuiſſet Latitudines ſtellarum fixarum minime pro inuariabilibus eſſe habendis. Ex eadem hac obſeruatione referente Cel. *de la Lande*; celebris Aſtronomus Pariſinus *le Gentil* motum Nodi Iouis an-

annuum conclusit 10″, supposita sine dubio ipsi stellae Latudine quadam Australi, verum instituti nostri ratio non fert, vt disquiramus, quanta praecise supposita sit; quippe quum nobis quidem tota haec obseruatio veritalis speciem prae se ferre minime videatur. Caeterum etiamsi Latitudo ista Stellae δ in Cancro perfecte haberetur determinata, inde quidem motus Nodi Iouis pro singulis seculis non haberetur determinatus, quippe quia is motus interuallo 2000 annorum minime statui potest aequabilis; interim si iste motus pro seculo fluente siue ex Theoria seu etiam per obseruationis haberetur cognitus, si variatio integra pro 2000 annis elapsis per obseruationes innotesceret, inde quoque iudicium formari posset, quas variationes subeat motus iste, quo Nodus Iouis procedit.

§. 5. Ex antiquissimis circa Planetam Martem factis obseruationibus, praecipuo loco habetur illa, qua Anno Nabonassari 476 die 20 Mensis Athyr Stella Martis videbatur adposita boreali in fronte Scorpii, quae Stella apud *Bayerum* littera δ designatur. *Ptolemaeus* Libro Almagesti X Cap. 9. Quamuis autem heic de totali occultatione stellae a Planeta non quaestio sit, sed de intimiori solum eorum congressu, operae tamen pretium erit, vt disquiramus, quam prope haec obseruatio cum calculo conveniat. Ipsum igitur tempus obseruationis ad aeram Iulianam reductum incidit in Annum ante C. N. 271, diemque 17 Ianuarii cum 18^h, quo tempore ex Tabulis Solaribus de la *Caille* habetur Longitudo Solis 9^s. 24°. 39′ et Logar. distantiae Solis a terra 9,995486; ex Tabulis vero Solaribus *Mayeri*, Longitudo Solis 9^s. 24°. 30′ et Logarithmus distantiae 9,995500. Tum vero est ex Tabulis

Cel.

Cel. de la *Lande* pro Marte, Longitudo Martis Heliocentrica $5^s. 23^\circ. 48'. 33''$; Logar. diſtantiae Martis a Sole 0,199826, exiſtente Latitudine eius Heliocentrica $58'. 4''$ B. Ex Tabulis autem *Halleii* haec Elementa ita determinantur, vt ſit Longitudo Martis Heliocent. $5^s. 23^\circ. 39'. 11''$; Latitudo $1^\circ. 0'. 25''$ et Logar. diſtantiae 0,198834. Si igitur locus Martis ex Tabulis Cel. de la *Lande* conferatur cum loco Solis ex Tabulis de la *Caille*; computabitur Longitudo Martis Geocentrica $7^s. 2^\circ. 5'. 2''$ et Latitudo Geocentrica $1^\circ. 1'. 35''$ B. Sin autem locus Solis ex Tabulis *Mayeri* depromtus hic in vſum vocetur, Longitudo Geocentrica $50''$ diminuetur, quae diminutio hoc in negotio quidquam ad rem facere non cenſenda eſt. Denique ſi combinetur Longitudo Martis ex Tabulis *Halleii* computata, cum Longitudine Solis ex Tabulis *Mayeri* inventa, fit Longitudo Geocentrica Martis $7^s. 2^\circ. 1'. 24''$, adeoque ab illa ſupra inuenta parum diſcrepans. Quia nunc Longitudo β Scorpii ad Annum 1750, ſit $7^s. 29^\circ. 42'. 2''$ et Latitudo eius Borealis $1^\circ. 2'. 24''$, ſi praeceſſio aequinoctiorum ita aeſtimetur ac ſupra §. 2. fecimus, fiet Longitudo β Sorpii pro anno 271 ante C. N. $7^s. 1^\circ. 15'$ circiter, Latitudo vero huius Stellae erit $1^\circ. 31'$ Borealis.

§. 6. Quamuis nunc diſcrimen inter Longitudines Planetae et Stellae ex Tabulis concluſum ſatis ſit ſenſibile, 50 nimirum minutorum primorum, huius tamen diſcrepantiae ratio explicari poteſt, vel ex leuiuſculis quibusdam correctionibus pro ipſa Theoria Martis locum habentibus; quae vtcunque paruae ſint, interuallo tamen 2000 annorum ſatis ſenſibiles producere poſſent effectus, vel etiam ex correctione quadam pro loco Stellae, ſi nimirum iſti

 Stellae

Stellae motus quidam propius tribuendus esset, quod quidem probabile videri posset, siquidem Cel. *Cassini* in sua Astronomia pag. 466 perhibeat Ptolemaeum locum huius Stellae ad 2°. 15' in signo Scorpii referre. Verum tamen re rite perpensa huic aestimationi a Ptolemaeo adhibitae, nulla tribui potest fides; cum enim sua aetate inuenerat Longitudinem β Scopii 7ˢ. 6°. 20', praecessionem aequinoctiorum pro singulis annis centenis aestimando vnius gradus, inde conclusit tempore obseruationis fuisse Longitudinem β Scorpii 7ˢ. 2°. 15'. Verum nec ista aestimatio pro Longitudine β Scorpii pro aetate Ptolemaei admodum verisimilis videtur, et si rite sibi constaret, quia praecessio aequinoctiorum omnino quarta parte superat illam Ptolemaei aestimationem, Longitudo β Scorpii pro tempore obseruationis nequidem ad 7ˢ. 1°. exsurgeret. Caeterum neque heic reticendum est, Illustrem Astronomum *Keplerum* ita sibi persuasisse Ptolemaeum in referenda hac obseruatione in errorem fuisse inductum, atque per Borealem in fronte Scorpii non intelligendam esse Stellam β, sed Stellam ν, quae omnino ista Stella β est Borealior. Verum tamen loco Stellae ν pro Epocha nostra computato, neque ille locus cum inuenta Longitudine Martis omnino consentit, et pro Latitudine iam multo maior adest discrepantia ac pro Stella β. Scilicet quia Longitudo Stellae ν ad Annum 1750 aestimatur 8ˢ. 1°. 2'. 16", erit pro tempore obseruationis Longitudo ν Scorpii 7ˢ. 2°. 35'; Latitudo autem inuenietur 2°. 7'. Bor. ita vt iam inter ν Scorpii et Planetam Martis intercedat pro Latitudine differentia vnius circiter gradus. Si denique supponamus per diem 20 mensis Athyr heic intelligendum esse diem praecedentem illi, quem nos adhibuimus, ita vt tempus obseruationis

nis ſit An. 271 ante N. C. 16 Ianuar. 18^h, erit pro iſto tempore Longitudo Martis Geocentrica $7^s. 1^\circ. 31'$ circiter et Latitudo $1^\circ. 7'$, vnde nunc quidem melior conſenſus calculi cum obſeruatione prodit; verum teſtimonio Auctorum Aſtronomicorum nos deſtituente, hoc tantum coniecturae loco proponimus.

§. 7. Antiquiſſima obſeruatio pro Planeta Veneris inſtituta, illa eſt, qua Timochares Alexandriae obſeruauit Planetam Veneris Anno a Nabonaſſare 476, 17 die Menſis Meſori, horis a Meridie 17, obtexiſſe praecedentem ſtellarum quatuor in Auſtrina ala Virginis, hoc eſt illam Stellam, quam *Bayerus* littera η deſignat. Tempus igitur huius obſeruationis ad aeram Iulianam reductum incidet in Annum ante N. C. 271, diem 11 Octobr. 17^h; pro quo tempore habetur ex Tabulis de la *Caille* Longitudo Solis $6^s. 14^\circ. 51'$ et Logar. diſtantiae Solis a terra 9, 994933. Tum vero ex Tabulis Cel. de la *Lande* pro Venere, habetur Longitudo Heliocentrica huius Planetae. $2^s. 27^\circ. 54'$, Latitudo Bor. $1^\circ. 44'. 20''$ et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856904; ex Tabulis autem *Halleii* Longitudo Veneris Helioc. $2^s. 27^\circ. 24'$; Latitudo $1^\circ. 43'. 0''$. Bor et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856130. Hinc calculo ſubducto, ex priori pro Venere determinatione inueni Longitudinem Veneris Geocentricam $5^s. 3^\circ. 33'$ et Latitudinem $1^\circ. 12'. 10''$. B.; ex poſteriori autem concluſi Longitudinem Veneris Geocentricam $5^s. 3^\circ. 18'$ et Latitudinem $1^\circ. 11'. 40''$. Ex calculo autem Cel. *Caſſini* ſecundum eius Tabulas erit Longitudo Veneris Geocentrica $5^s. 3^\circ. 26'$. (Vide Aſtronomiam *Caſſini* pag. 576.). Iam autem quia ad ineuntem Annum 1750 eſt Longitudo η Virginis

 6^s.

$6^s. 1^\circ. 20'. 36''$ et Latitudo $1^\circ. 22'. 31''$ Bor.; habita ratione praecessionis aequinoctiorum et reliquarum variationum pro locis Stellarum, fiet pro Epocha obseruationis Longitudo stellae $5^s. 2^\circ. 55'$ circiter, et Latitudo $1^\circ. 29'$ Bor. Hinc igitur nunc patet respectu Longitudinis Stellae et Planetae, inter calculum et obseruationem maiorem non adesse dissensum, quam vt vel leui adhibita correctione pro Theoria Veneris, vel etiam ex errore, qui in determinando loco stellae pro tempore obseruationis commissus est, huius discrepantiae ratio reddi queat. Quumque Longitudo Veneris Geocentrica interuallo 24 horarum $1^\circ. 10'$ immutetur, si nonnullis tantum horis tempus obseruationis anteuertere supponatur illud, quod a nobis adhibitum est, inde quoque ipsa Longitudo Veneris sensibili ratione diminuetur. Sic si obseruatio facta supponatur hora 14 Parisina, erit Longitudo Veneris Geocentrica ex prima determinatione $5^s. 3^\circ. 14'$ et ex posteriori $5^s. 3^\circ. 9'$; immo quia in nostro calculo rationem differentiae meridianorum inter Lutetias Parisiorum et Alexandriam non habuimus, si ipsa obseruatio facta supponatur Alexandriae hora 4^{te} matutina, quae in horam 2^{dem} Parisiis incidit, tum binae hae vltimae conclusiones pro Longitudine Veneris adhiberi deberent. In nonnullis quidem editionibus Almagesti affirmatur hanc obseruationem in ipsam mediam noctem incidere; verum ex data declinatione Veneris pro eo tempore cum Elongatione eius a Sole facile probatur Venerem d. 11 Octobr. anni commemorati, ante horam 3^{tiam} vel 4^{tam} matutinam Alexandriae exoriri non potuisse. Caeterum quia tempore Ptolemaei Longitudo stellae η supponitur $5^s. 8^\circ. 15'$, si ista determinatio Ptolemaei rite sibi constaret, fieret Longitudo huius Stellae pro Epocha obseruaſeruationis $5^s. 2^\circ. 30'$, praeterlapſis enim 408 annis a primo anno Antonini ad tempus obſeruationis, habetur praeceſſio aequinoctiorum $5^\circ. 45'$ circiter.

§. 8. Differentia in Latitudine inter Stellam et Venerem iuſto quidem maior eſt, quam vt vlla occultatio ſtellae a Venere locum habere potuerit. Refert quidem Ptolemaeus Latitudinem huius Stellae fuiſſe ſua aetate $1^\circ. 10'$. vnde omnino egregius conſenſus Latitudinis Stellae cum illa Veneris prodiret. Verum ex regulis, quae praeſcribuntur pro determinanda variatione in Latitudine fixarum, colligitur hanc variationem pro η Virginis eſſe negatiuam, tumque praeterea in Catalogo *Tychonis* Latitudo huius ſtellae ad annum 1600 ponitur $1^\circ. 25'$ ideoque maior illa, quae pro Anno 1750 obtinet. Niſi igitur haec ſtella motu quodam proprio gaudeat admodum ſenſibili, quae integro ſeculo $45''$ abſoluatur, Latitudo Stellae cum illa Veneris nequaquam reddi poteſt conſentiens. Si vero ſupponatur Latitudinem Stellae reapſe fuiſſe $1^\circ. 29'$, non omnino veriſimile eſt, vt locus Nodi pro Venere tam inſignem admittat correctionem, vt Latitudo Veneris cum illa pro Stella omnimode conſentiens reddatur. Ex Latitudine enim Veneris Geocentrica $1^\circ. 29'$ pro tempore obſeruato, concluditur Latitudo Heliocentrica $2^\circ. 8'. 40''$, cui Latitudini, quum argumentum Latitudinis $1^s. 9^\circ. 16'$ reſpondeat, relinquitur Longitudo Nodi $1^\circ. 18'. 34''$ quae plusquam 8° ab illa ex Tabulis elicita differt. Et ſi iſta Longitudo Nodi conferatur cum illa, quae pro noſtro ſeculo valet, fieret motus annuus pro Longitudine Nodi $45''$, quae et Theoria et obſeruationibus renitentibus admitti nequit. Sin autem cum Cel. *Caſſini* ſupponamus fuiſſe

 Latitu-

Latitudinem η Virginis 1°. 22′, colligetur inde Latitudo Veneris Heliocentrica 1°. 58′. 30″, cui Latitudini cum argumentum Latitudinis 1ˢ. 5°. 40′ respondeat, inde colligetur Longitudo Nodi Veneris 1ˢ. 22°. 10′ et motus annus pro Longitudine Nodi 40″ circiter, qui certe adhuc nimis est magnus. Cum vero Celeb. *Cassini* hunc motum non nisi 36″ inuenisset (Astrom. *Cassini* p. 576.) ratio discrepantiae in eo est sita, quod per inaduertentiam Celeb. hic Astronomus ibi huiusmodi adhibuerit analogiam sin. S T V: sin. T V S = S V : T S, loco verae sin. S T V: sin. V S T = S V: T V, est enim Tang. Latit. Heliocentricae ad Tangentem Latitudinis Geocentricae in ratione T V: S V = sin. V S T: sin. S T V. Quia igitur prorsus in dubio relinquimur de vera Latitudine stellae η pro tempore obseruationis, patet omnino ex hac obseruatione nihil de motu Nodi pro Venere concludi posse, quamuis caeteroquin haec obseruatio pro hoc instituto satis esset accommodata, si nimirum ex Latitudine Stellae cognita, Latitudinem Veneris inferre liceret. Denique hoc loco praetermittere non possum, quin obseruem, Cel. de la *Lande*, dum hanc obseruationem pag. 167. 168. Tom. II. Astronomiae recenset, animaduertisse, quod isthaec obseruatio plusquam quatuor gradibus a calculo differat, qualis certe discrepantia a reliquis Astronomis, qui hanc obseruationem calculo subduxerunt, nequaquam fuit animaduersa. Tum vero nec rite sibi constat, quod dicit Celeb. Astronomus obseruatam fuisse Longitudinem Veneris 5ˢ. 3°. 36′, nam ista Longitudo minime consentit cum illa pro η Virginis, quae nimirum inuenta est 5ˢ. 2°. 55′, hic igitur Cel. de la *Lande* Longitudinem Veneris obseruatam, cum illa ex calculo deducta confundisse videtur.

§. 9.

§. 9. Inter antiquas Planetarum obſeruationes, ſingularem quoque meretur attentionem illa, cuius mentionem facit *Bullialdus* in Aſtronomia Philolaica ex antiquo Codice manuſcripto in Bibliotheca Regia Pariſienſi, vbi dicitur Anno Diocletiani 214, die 6 Pachon, hora noctis ſecunda Stellam Martis ita iunctam fuiſſe Stellae Iouis, vt nullo quaſi interuallo a ſe inuicem diſtarent. Tempus igitur huius obſeruationis erit Anno poſt Nat. C. 498, die 1 Maii hora 7. ad Meridianum Pariſinum, pro quo tempore Tabulae Solares de la *Caille* praebent Longitudinem Solis $1^s.\ 11^\circ.\ 54'$ et Logarithmum diſtantiae Solis a Terra 0, 006044. Tum vero ex Tabulis Cel. *de la Lande* deduxi Longitudinem Martis Heliocentricam $6^s.\ 7^\circ.\ 40'$; Latitudinem $47'.\ 4''$ Bor. et Logarithmum diſtantiae Martis a Sole 0, 200138; Longitudinem autem Iouis $5^s.\ 10^\circ.\ 36'$; Latitudinem eius $1^\circ.\ 18'.\ 37''$ Bor., et Logarithmum distantiae Iouis a Sole 0, 736343. Denique ex Tabulis *Halleii* haec Elementa ita determinantur, vt ſit Longitudo Martis Heliocentrica $6^s.\ 7^\circ.\ 31'$; Latitudo eius $50'.\ 34''$ Bor. et Logarithmus diſtantiae 0, 198914. Pro Ioue autem reperietur Longitudo Heliocentrica $5^s.\ 10^\circ.\ 22''$; Latitudo Bor. $1^s.\ 17'.\ 49''$ et Logarithmus diſtantiae 0, 736 330. Ex priori harum determinationum fit Longitudo Martis Geocentica $5^s.\ 0^\circ.\ 18'$, exiſtente Latitudine $1^\circ.\ 19'.\ 22''$ Bor.; Iouis autem Longitudo Geocentrica $5^s.\ 0^\circ.\ 26'$ et Latitudo $1^\circ.\ 25'.\ 0''$ Bor., ita vt ſecundum has concluſiones differentia in Longitudine non niſi $8'$ abſoluatur, differentia vero in Latitudine ne quidem $6'$ excedat, vnde hos Planetas nudis oculis intuenti, omnino ſibi proximi et quaſi iuncti non potuerint non videri. Ex poſteriori autem determinatione fit Longitudo Martis Geocentrica $4^s.\ 29^\circ.\ 57'$ eiusque Latitudo

1°.

1°. 25'. 30'' Bor.; Iouis autem erit Longitudo Geocentrica 5s. 0°. 12' et Lat. 1°. 24'. 4'' Bor. Secundum hanc posteriorem determinationem nunc differentia in Longitudine maior aliquanto euadit, quam in priori ista, tum vero vicissim differentia in Latitudine nunc fere euanescit. Ex Tabulis autem Celeb. *Cassini* maiores adhuc discrepantiae inter Longitudines et Latitudines horum Planetarum se produnt, vti ipsemet illustris hic Astronomus calculo instituto inuenit, (Conf. Astronom. *Cassini* p. 502. 504). Si cui parum credibile videatur, quod quum determinationes pro Longitudine Heliocentrica Martis non nisi 9 minutis differant, tamen differentia pro Longitudine Geocentrica oriatur plusquam duplo maior; perpendendum ipsi est obseruationem eo factam esse tempore, quo Elongatio Martis a Sole e terra visa, ad angulum 90° propius accederet; vnde ex paruula mutatione loci Heliocentrici, locus Geocentricus valde magnam subire censendus est.

§. 10. Missis igitur antiquis obseruationibus occultationum, ex quibus vix quidquam certi concludi potest pro perficienda Theoria Planetarum, nunc ad illas quidem procedamus obseruationes, quae sequiori aeuo, vtpote ad finem vergente seculo decimo sexto et binis insequentibus factae sunt. Harum in numero prima illa est, qua Anno aerae Iulianae 1574 die 16 Septembris hora 4ta matutina, *Maestlinus* Tubingae obseruauit Stellam Cor Leonis dictam a Planeta Veneris plane fuisse obtectam, vti refert *Keplerus* in Astronomia Optica pag. 305. Pro hoc tempore habetur locus Solis 6s. 2°. 32' et Logarithmus distantiae Solis a terra 0,000249; tumque, ex Tabulis Cel. de la *Lande* Longitudo Veneris Heliocentrica 2s. 24°. 4', Latitudo

tudo cuius Borealis $39'. 19''$ et Logar. distantiae Veneris a Sole 9, 856843. Ex Tabulis vero *Halleianis* habetur Longitudo Veneris Heliocentrica $2^s. 24^\circ. 4'$, Latitudo Borealis $39'. 25''$ et Logarithmus distantiae Veneris a Sole 9, 857017. Hinc igitur fit pro tempore obseruato Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 24^\circ. 3'$ circiter cum Latitudine $24'. 43''$ B. secundum Tabulis Cel. *de la Lande*, at ex Tabulis *Halleianis* habetur Longitudo Geocentrica Veneris $4^s. 24^\circ. 2'$, existente Latitudine $24'. 49''$ B., ita vt Tabulae pro hoc momento satis bene inter se consentiant. Ex supposita autem Longitudine Reguli pro Anno 1750 $4^s. 26^\circ. 21'. 12''$ et Latitudine $27'. 33''$, fiet pro tempore obseruationis Longitudo Reguli $4^s. 23^\circ. 54'$ et Latitudo $26'. 33''$, vnde quidem concludere licet hanc stellam tempore citato a Venere non fuisse coopertam, quum vix supponere fas sit Tabulas pro motu Veneris integris octo minutis a veritate abludere. Quoniam autem intimior hic erat congressus stellae cum Planeta, fieri facile potuit, vt exigua, quae inter haec Astra se obtulit distantia, nudis non percipi potuerit oculis.

§. 11. Deinde quia pro 16 Sept. Anno 1574 16^h, est Longitudo Solis $6^s. 3^\circ. 31'$, Logarithm distantiae Solis a terra 0, 000120, Longitudo Veneris Heliocentrica $2^s. 25^\circ. 41'$ et Logarithmus distantiae Veneris a Sole 9, 856784, fiet Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 25^\circ. 13'$ et Latitudo $28'. 8''$ B. Et quum motus Geocentricus pro Venere $1^\circ. 10'$ absoluatur, vera coniunctio Veneris cum Regulo incidet in 15 Septemb. hor. 13, quo tempore est Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 23^\circ. 54'$ circiter, Latitudo autem Geocentrica $24'. 19''$, quae nunc quidem talis eſt, vt non veriſimile videatur Regulum a Venere penitus fuiſſe obtectum. Pro tempore enim allato diſtantia Veneris a terra quum fuerit 1, 1457 eiusmodi partium, qualium vnitas aequatur diſtantiae mediae Solis a terra, ipſa Diameter Veneris pro hac Epocha maior quam 14'' ſtatui non poteſt. Praeterea, ſi ſupponamus pro Epocha conſtituta Latitudinem Veneris Geocentricam ita eſſe corrigendam, vt cum illa Reguli prorſus conſentiens reddatur, quia differentia inter has Latitudines, demta ſemidiametro Veneris, eſt 1'. 41'', ex hac correctione pro Latitudine Veneris Geocentrica orietur correctio Latitudinis Heliocentricae ſaltem 2'. 30'', cui correctioni reſpondet in Tabulis variatio argumenti Latitudinis, quae duo excedit Gradus, qualis correctio pro loco Nodi Veneris minime admitti poteſt. Immo vero in Longitudine Veneris Heliocentrica correctionem nimis magnam adhibere cogeremur, ſi obſeruatio a *Maeſtlino* facta rite ſibi conſtare ſupponatur. Inuenimus enim ex variatione decem minutorum primorum pro Longitudine Heliocentrica Veneris, Longitudinem Geocentricam 8 minutis immutari, quo facto ſi iſta correctio ſtatuatur ſubtractiua, Longitudines Veneris et Reguli pro tempore obſeruato ſatis redduntur conſentientes. Praeterea obſeruandum eſt calculum me inſtituiſſe pro 15 Sept. 15^h. tempore Pariſino, at quum obſeruatio Tubingae ſit facta, quae vrbs 25'. in tempore verſus Orientem eſt ſita, huius circumſtantiae habita quoque ratione differentia inter Longitudines Veneris et Reguli aliquantulum diminuetur.

§. 12. Anno aerae Iulianae 1590 die 3 Octobris hora 5 matutina, *Maeſtlinus* Tubingae totum fere Martem

tem a Venere coopertum obſeruauit, referente *Kepplero* in Aſtronomia Optica pag. 305. Pro tempore hoc obſeruato habetur Longitudo Solis $6^s. 19^\circ. 28'$ et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 9, 998148. Ex Tabulis vero a Celeb. *de la Lande* confectis inuenitur Longitudo Martis Heliocentrica $4^s. 26^\circ. 0'. 24''$, Latitudo eius Borealis $1^\circ. 49'. 16''$ et Logarithmus diſtantiae Martis a Sole 0, 221330; tum vero Longitudo Veneris Heliocentrica $3^s. 24^\circ. 44'. 9''$; Latitudo eius Borealis $2^\circ. 15'. 45''$ et Logarith diſtantiae Veneris a Sole 9, 855950. Ex Tabulis autem *Halleianis* fit Longitudo Martis Heliocentrica $4^s. 25^\circ. 58'. 46''$; Latitudo Bor. $1^\circ. 49'. 22''$ et Logar. diſtantiae Martis a Sole 0, 221254; pro Venere autem Longitudo Heliocentrica $5^s. 24^\circ. 42'. 59''$, Latitudo Borealis $2^\circ. 15'. 21''$ et Logar. diſtantiae Veneris a Sole 9, 856004. Hinc colligitur ſecundum Tabulas Cel. *de la Lande*, Longitudo Martis Geocentrica $5^s. 15^\circ. 31'. 16''$; Latitudo eius Borealis $1^\circ. 15'. 56''$; Longitudo autem Veneris Geocentrica erit $5^s. 15^\circ. 31'. 28''$ et Latitudo Borealis $1^\circ. 16'. 0''$. Tum vero ſecundum Tabulas *Halleii* fit Longitudo Geocentrica Martis $5^s. 15^\circ. 30'. 26''$ et Latitudo $1^\circ. 16'. 1''$ B; Veneris autem Longitudo Geocentrica $5^s. 15^\circ. 30'. 51''$ et Latitudo $1^\circ. 15'. 57''$ B. Quaecunque igitur harum Tabularum in vſum vocentur, obſeruatio per illas omnino confirmatur, ideoque Stellam Martis a Venere reapſe fuiſſe obtectam, vti *Maeſtlinus* obſeruauit, non omnino dubium eſt. Leuiores autem iſtae diſcrepantiae, quae ſe produnt ratione habita diametrorum Veneris et Martis, vel parallaxeos, vel etiam effectuum ex aberratione oriundorum, facile explicari poſſunt. Eſt enim pro tempere commemorato diſtantia Veneris a terra 0, 8073, hincque Diameter veneris $21''$ aequabit; diſtantia

 autem

autem Martis a terra quum sit 2, 3974 erit Diameter huius Planetae $5''$, et Parallaxis Veneris $11''$ eaque Martis $4''$ exaequabit. Denique ob Elongationem Martis a Sole 34 fere graduum, erit Aberratio pro Marte $-31''$, pro Venere autem Aberratio non erit nisi $-3''$; facta iam statim adplicatione huius correctionis, erit Longitudo Martis Geocentrica secundum Tabulas Cel. *de la Lande* $5^s. 15^\circ. 30'. 45''$ et Longitudo Veneris Geocentrica $5^s. 15^\circ. 31'. 25''$, quo ipso discrepantia in Longitudine inter hos Planetas nonnihil augetur.

§. 13. Seposita nunc consideratione Parallaxeos pro vtroque Planeta, quippe quum inde pro distantia centrorum vix maior quam 6 vel 7 secundorum variatio prodire poterit; nunc disquiramus quo momento temporis vera coniunctio centrorum Martis et Veneris contigerit, Parallaxium seposita consideratione. Hic primum nosse oportet esse motum Veneris diurnum e terra visum pro Epocha obseruationis $1^\circ. 12'. 46''$, Martis autem motum diurnum $37'. 42''$, vnde motus relatiuus, quo motus Veneris illum Martis superat, erit $35'. 4''$. Tempore igitur obseruato, quia inuenta est differentia Longitudinum Geocentricarum Martis et Veneris $40''$, vbi quidem Veneris Longitudo illam Martis excedit, inde omnino infertur veram coniunctionem centrorum contigisse 1591. die 2. Octob. $15^h. 33'$, siue 27 minutis primis ante tempus Epochae, pro quo nostri calculi subducti fuerunt, vbi quidem intelligitur has conclusiones eatenus tantum pro omnimode exactis haberi debere, quatenus Longitudines Geocentricae Planetarum ex Tabulis conclusae rite sibi constant. Si igitur tempore coniunctionis bini Planetae eandem habuerint

rint Latitudinem, momentum, quo bini Planetae ſe tangere viſi ſunt, anteuertet ipſum tempus coniunctionis 18 circiter minutis, adeo vt, ſi coniunctio fuerit centralis, totum tempus occultationis 36 vel 37 minutis primis prorſus fuerit abſolutum. Sin vero ſupponatur differentia Latitudinum apparentium 9″, vbi Parallaxi effectum 5″ tribuimus, inde colligeretur duratio occultationis 35 fere minutorum. Dolendum ſane eſt ante inuenta Teleſcopia huiusmodi obſeruationibus omnimodam exactitudinem conciliari non potuiſſe, ita vt Aſtronomis non aeque proficuae ſint, ac omnino eſſe poſſent; pro hac tamen obſeruatione nulli relinquitur dubio locus, quin occultatio reuera locum habuerit, quia Latitudinum Geocentricarum pro binis Planetis eiusmodi ſunt valores, qui optime cum hoc Phaenomeno quadrant. Caeterum quia de exactitudine maxime ſcrupuloſa me ſollicitum eſſe vel ea me prohibuit circumſtantia, quod de exacto temporis momento, quo haec obſeruatio facta eſt, non conſtat, eam ob rationem ſuperfluum omnino iudicaui, vt in veros valores effectuum Parallacticorum inquirerem.

§. 14. Celebris nunc ſequitur obſeruatio a *Maeſtlino* et *Kepplero* Tubingae facta, anno aerae Iulianae 1591. 8 Ianuarii 16^h, qua celebratiſſimi hi Aſtronomi viderunt Planetam Iouis a Planeta Martis fuiſſe obtectum, ex colore enim rutilo Martis arguebant hunc Planetam partem quandam Iouis obtexiſſe. Confer ſaepius citatum locum Aſtronomiae Opticae *Keppleri.* Pro hoc igitur temporis momento habetur, 1°. Longitudo Solis $9^s. 28°. 40'$ et Logarithmi diſtantiae Solis a terra 9, 993209. 2°. Longitudo Iouis Heliocentrica $7^s. 5°. 0'. 13''$, Latitudo eiusdem Planetae 1°. 8′. 59″ Bor. et Logarithm. diſtantiae Iouis a Sole 0, 734124. 3°. Longitudo Martis Heliocentrica 6ˢ. 9°. 31′. 12″, Latitudo eius Borealis 1°. 5′. 48″ et Logarithmus diſtantiae Martis a Sole 0, 210987, vbi quidem binae poſteriores determinationes ex Tabulis Celeb. *de la Lande* computo ſunt elicitae. His poſitis colligitur Longitudo Iouis Geocentrica 7ˢ. 15°. 2′. 14″ Latitudo eius Borealis 1°. 6′. 36″; pro Marte autem reperietur Longitudo Geocentrica 7ˢ. 15°. 2′. 46″ et Latitudo Geocentrica 1°. 6′. 50″ vbi ob Longitudines Planetarum aeque ac Latitudines optime conſentientes, non dubitare fas eſt, quin Planeta Martis partem quandem diſci Iouis obtexerit. Immo vero ipſo temporis momento aſſignato, hanc occultationem locum habere potuiſſe conſtat, quia ob diſtantiam Iouis a terra tempore obſeruationis 5, 6161, erat diameter Iouis apparens 34″, 1 et ob diſtantiam Martis a terra 1, 6005, erat diameter Martis 7″, 1, ideoque ſumma ſemidiametrorum 21 ſcie ſecundorum, quae non niſi 10″ a differentia inter Longitudines Planetarum Geocentricas diſcrepat.

§. 15. Quoniam autem pro 7. Ianuar. 16ʰ. inueni Longitudinem Iouis Geocentricam 7ˢ. 14°. 54′. 43″, illamque Martis 7ˢ. 14°. 28′. 31″, ob motum relatiuum Martis a Ioue interuallo viginti quatuor horarum 25′. 44″, nec non motum horarium relatiuum 1′. 4″, verum tempus coniunctionis centrorum Iouis et Martis incidet in 8 Ianuar. 15ʰ. 30′ temporis medii Pariſini, exiſtente tunc temporis Longitudine centri pro vtroque Planeta 7ˢ. 15°. 2′. 5″. Heic autem probe perpendendum eſt, neque correctionis ex Aberratione pro vno vel altero Planeta oriundae vllam habitam eſſe rationem, nec etiam paruulae iſtius, quae pro

Mar-

Marte locum habet, Parallaxis. Quia autem Aberratio pro Marte non eſt niſi $3''$ ſubtractiua, illaque pro Ioue $1''$ poſitiua, hinc paruulum omnino oritur diſcrimen; nec ex Parallaxi Martis, quae ad horizontem vix $5''$ excedit, vlla ſenſibilis producetur differentia. Quicquid ſit hypothetice heic tantum argumentamur ex ſuppoſita nimirum perfecta exactitudine Tabularum. Quum igitur inuenta ſit ſumma Diametrorum Iouis et Martis $41''$, 8, patet hanc quantitatem reſpondere $39'$ ex motu relatiuo Planetarum, vnde colligeretur totam occultationem $39'$ tranſiiſſe, ſi nimirum Latitudines Planetarum perfecte conſentientes fuiſſent, at ſi differentia Latitudinum ſtatuatur $10''$, duratio occultationis erit $37'$. Si correctiones ex Aberratione orivndae reapſe adplicentur, inde fiet tempus coniunctionis $15^h. 26'$ temporis medii Pariſini, ideoque parum diuerſum ab eo quod ſupra inuenimus. Qualescunque de caetero ſint errores Tabularum, quia differentia in Latitudine Geocentrica Planetarum non niſi $14''$ obſoluitur, omnino dubitari nequit, quin Planeta Martis prae diſco Iouis tranſierit.

§. 16. Sequitur iam occultatio Reguli a Venere anno 1598 aerae Iulianae 14. Septemb. hora 14. a Keplero Gratii in Stiria obſeruata (*Keppleri* Aſtronomia Optica pag. 305.). Pro hoc momento allato eſt Longitudo Solis $6^s. 1°. 39'$; Logarithmus diſtantiae Solis a Terra 0,000417; Longitudo Veneris Heliocentrica $2^s. 26°. 57'. 42''$, Latitudo eius Borealis $48'. 36''$ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 856770 prouti ex Tabulis Cel. *de la Lande* colligitur. Tabulae vero Halleianae praebent Longitudinem Veneris Heliocentricam $2^s. 26°. 57'. 16''$, Latitudinem eius Borealem $48'. 47''$ et Logarithmum diſtantiae

tiae a Sole 9, 856890. Hinc concluditur ex priori determinatione Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 24^\circ. 23'. 44''$ et Latitudo $29'. 19''$. B; ex posteriori vero Longitudo huius Planetae Geocentrica $4^s. 24^\circ. 23'. 6''$ et Latitudo $29'. 38''$ B. Quum igitur pro tempore obseruationis habeatur Longitudo Reguli $4^s. 24^\circ. 14'$ cum Latitudine Boreali $26'. 40''$, intelligitur Regulum a Venere non fuisse obtectum, quamuis ita *Keplero* haec astra nudis oculis intuenti videri potuerit. Quia autem pro 18 Sept. 14^h, sit Longitudo Veneris Geocentrica $4^s. 25^\circ. 34'. 58''$, ideoque motus Veneris diurnus a terra spectatus $1^\circ. 11'. 14''$, intelligitur veram coniunctionem Veneris et Reguli secundum Longitudinem Epocham nostram $3^h. 17'$ antecessisse, quatenus nimirum et Longitudo Reguli habita ratione praecessionis exacte supponatur cognita, nec in loco Geocentrico Veneris sensibilis aliquis sit error. Quodsi autem ex isthac obseruatione vera distantia Veneris secundum Longitudinem elici possit, huius obseruationis vsum facere liceret pro determinando motu Nodi pro Venere, quia hic Planeta tempore huius obseruationis non multum a Nodo ascendente distabat.

§. 17. Procodimus nunc ad obseruationem factam Anno 1627 die 5 Maii 10^h. Stylo Gregoriano, qua visus est Planeta Iouis adeo propinquus supremae in fronte Scorpii, vt iudicatus sit a nonnullis Astronomis hanc Stellam occultasse. (Conf. Astronomiam Britannic. *Vincentii Wing.* pag. 288.) Pro tempore commemorato, quum sit locus Solis $1^s. 14^\circ. 56'. 38''$; Logarithm. distantiae Solis a Terra 0, 004448; Longitudo Iouis Heliocentrica $7^s. 25^\circ. 30'. 36''$; Latitudo eius Bor. $51'. 36''$ et Logar. distantiae Iouis a Sole

Sole 0, 729537; fiet omnino Longitudo Iouis Geocentrica 7s. 27°. 56′. 13″ et Latitudo Borealis 1°. 3′. 16″. At pro momento temporis allato eſt Longitudo ſtellae β in fronte Scorpii 7s. 27°. 59′ et Latitudo 1°. 3′. 48″ Bor., ex quo concluditur occultationem pro temporis momento allato locum non habuiſſe, quod etiam conſentit cum obſeruatione *Hortenſii*, quippe qui vidit tempore citato Iouem ab iſta Stella Scorpii quaſi 5′ ad occaſum diſtare (vide *Lansbergii* Theſaur. Obſeruat. Aſtronomic. fol. 164). Neque tamen hinc rite infertur, quia occultatio tempore commemorato non facta eſt, in tranſitu hoc Iouis prope ſtellam β Scorpii occultationem locum habere non potuiſſe, nam ob diſtantiam Iouis a terra pro tempore obſernationis 4, 3753, habebitur diameter Iouis 44″, 3 cuius ſemiſſis vix differt ab inuenta differentia inter Latitudines Geocentricas Iouis et Stellae, quae non niſi 32″ habetur. Temporis autem momentum, quo vera coniunctio Stellae cum Planeta celebari debuit, inuenietur ex cognito motu diurno Iouis e terra ſpectato: eſt autem Longitudo Iouis Geocentrica 24 horis ante Epocham noſtrae obſeruationis 7s. 28°. 2′. 20″; quum igitur Iupiter 24 horis abſoluat 6′. 7″ motu retrogrado, tempus coniunctionis anteuertet momentum obſeruatum 11 circiter horis. Facile autem intelligitur hanc concluſionem eatenus tantem pro indubia habere poſſe, quatenus loca Planetae et Stellae exacte ſint determinata, vbi quidem ſi correctiones alicuius momenti admittendae ſint, inde tempus coniunctionis iam determinatum valde multum immutabitur. Quicquid tamen ſit, quia de Latitudinibus vel Stellae vel Planetae non multum dubitare licet, et differentia inter has Latitudines haud multo maior eſt ſemidiametro Iouis, tam prope Iouem ad Stellam tranuiisse oportuit, vt occultationem quasi factam fuisse censeri potuisset.

§. 18. Proxima, quae nobis se obtulit huius generis occultatio illa est, qua Celebris Astronomus *Kircherus* Anno 1679 die 16 Ianuar. $14^h. 30'$. Temp. med. Parisini obseruauit Planetam Saturni stellam o in constellatione Tauri occultasse. Pro tempore isto habetur locus Solis $9^s. 27^\circ. 13'. 14''$; Logarithm. distantiae Solis a terra 9, 993067; Longitudo Saturni Heliocentrica ex Tabulis Cel. *de la Lande* $2^s. 22^\circ. 8'. 24''$, Latitudo Australis $1^\circ. 12'. 27''$; Logarithmus distantiae Saturni a Sole 0, 954647. Ex Tabulis vero *Halleii* fit Longitudo Saturni Heliocentrica $2^s. 21^\circ. 58'. 22''$; Latitudo $1^\circ. 12'. 51''$ Austr. et Logarithmus distantiae Saturni a Sole 0, 954103. Hinc vero calculo subducto inueni Longitudinem Saturni Geocentricam $2^s. 18^\circ. 11'. 54''$ et Latitudinem Australem $1^\circ. 19'. 21''$; ex posteriori autem determinatione habetur Longitudo Saturni $2^s. 18^\circ. 0'. 26''$ et Latitudo Austr. $1^\circ. 19'. 48''$. Iam quia in Catalogo *Flamstedii* ad Annum 1777 reducto (vide Connoissance des temps 1777) fit Longitudo stellae o Tauri $2^s. 19^\circ. 22'. 43''$ et Latitudo $1^\circ. 20'. 12''$. Austr. fieret pro Epocha obseruationis Longitudo stellae $2^s. 18^\circ. 0'. 40''$ et Latitudo $1^\circ. 21'. 33''$, vbi quidem determinationes ex Tabulis Halleianis elicitae melius voto satisfaciunt, ac illae quas Tabulae Cel. *de la Lande* praebent. Verum pro Latitudine tamen discrimen tantum est, vt dubitari posset, an occultatio reuera locum habuerit, nisi ex obseruatis *Kirchii* id praeter omnem dubitationem demonstratum esset. Quum igitur motus Nodi pro Saturno satis exacte sit cognitus, pro Latitudine Saturni vix vlla sensibilis correctio locum habe-

habere poteſt. Nihil igitur remanet, niſi vt ſupponamus Latitudinem ſtellae o a *Flamſtead* minus exacte eſſe determinatam. Verum re bene penſitata inueni pro reducenda determinatione *Flamſtedii* ad annum 1777, variationis pro Latitudine nullam omnino habitam eſſe rationem, ideoque pro Epocha obſeruationis manebit illa Latitudo a *Flamſtead* obſeruata 1°. 20′. 12″, quae a Latitudine apparente Saturni non niſi 24″ differt, vnde habita ratione diametrorum apparentium globi Saturni, nec non annuli eius, iam nullus relinquitur dubio locus, quin occultatio reapſe locum habuerit.

§. 19. Anno huius ſeculi decimo ſexto, die 2 Decemb. hor. 20 a Celebri Anglorum Aſtronomo *Pound* obſeruatum eſt Planetam Iouis ſtellam quandam in Conſtellatione Geminorum occultaſſe. Eſt vero ex Tabulis Cel. de la *Caille* locus Solis pro hoc tempore 8ˢ. 11°. 23′. 21″. Et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 9, 993406; ex Tabulis autem Cel. de la *Lande* habetur Longitudo Iouis Heliocentrica 2ˢ. 25°. 5′. 6″; Latitudo eius Auſtralis 17′. 24″ et Logarith. diſtantiae Iouis a Sole 0, 709709. Hinc concluditur Longitudo Geocentrica Iouis 2ˢ. 28°. 17′. 13″ et Latitudo huius Planetae Auſtr. 21′. 22″. Diameter autem Iouis apparens erit 46″. His perpenſis facile intelligitur ſtellam, quam eo tempore a Ioue occultatam fuiſſe oportuit, non aliam eſſe quam illam, cuius Elementa pro Anno 1777 ita exprimuntur: Longitudo 2ˢ. 29°. 7′. 6″ et Latitudo Auſtralis 21′. 5″. Hinc enim pro Epocha obſeruationis fiet Longitudo Stellae 2ˢ. 28°. 16′. 40″ circiter et Latitudo 21′. 5″, ita vt nullum ſit dubium, quin occultatio reapſe facta ſit. Eſt vero Stella modo dicta illa 8 magnitudinis, cuius Elementa in Catalogo *Flamſtedii* ad Annum 1690 ita habentur expoſita: Longitudo $2^s. 27°. 54'. 29''$ et Latitudo A. $21'. 5''$.

§. 20. Denique celebris illa obſeruatio nobis commemoranda eſt, qua Celeb. *Bewis* Anno 1737 die 28 Maii, hora circiter decima obſeruauit Planetam Mercurii a Venere fuiſſe occultatum. Habetur autem pro hoc tempore locus Solis $2^s. 7°. 26'. 48''$ et Logarithmus diſtantiae Solis a terra 0, 006202. Tum vero fiet ex Tabulis Cel. *de la Lande* Longitudo Mercurii Heliocentrica $5^s. 23°. 47'. 55''$, Latitudo eius Auſtralis $5°. 28'. 51''$ et Logarithmus distantiae Mercurii a Sole 9, 583312; tumque Longitudo Veneris Heliocentrica $7^s. 27°. 47'. 36''$; Latitudo Auſtralis $57'. 57''$ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9,860357. Ex Tabulis autem *Halleii* fit Longitudo Heliocentrica Mercurii $5^s. 23°. 50'. 55''$, Latitudo $5°. 28'. 36''$ et Logarithmus diſtantiae Mercurii a Sole 9, 583459; et pro Venere Longitudo Heliocentrica $7^s. 27°. 48'. 12''$, Latitudo $57'. 44''$ et Logarithmus diſtantiae Veneris a Sole 9, 860329. Hinc ex priori determinatione concluditur Longitudo Mercurii Geocentrica $2^s. 29°. 31'. 9''$ et Latitudo Auſt. $2°. 9'. 8''$; tum vero fit pro Venere Longitudo Geocentrica $2^s. 29°. 31'. 54''$ et Latitudo $2°. 9'. 52''$, ita vt nunc appareat occultationem omnino locum habuiſſe eo tempore, quo obſeruata eſſe perhibetur. Nam paruula, quae in Latitudine adeſt diſcrepantia, nullam omnino parit difficultatem, ſiquidem ob diſtantiam Veneris a terra 0, 32336 ſit diameter Veneris apparens 51 fere ſecundorum, tumque ob diſtantiam Mercurii a terra 0, 9782 diameter apparens Mercurii cenſebitur 7°. Praeterea habetur pro tempore obſeruato

ſeruato Parallaxis horizontalis pro Venere 26″, 6 et pro Mercurio 8″, 6; ideoque Parallaxis reſpectiua Veneris a Mercurio 17″, 8; ita vt effectus parallactici non oriantur pro hac obſeruatione niſi valde exigui. Ex correctione, quae Aberrationi debetur, pro binis Planetis vix vlla ſenſibilis producetur variatio, eſt enim pro Venere illa correctio + 2″ et pro Mercurio − 7″, ita vt locus relatiuus hinc 9″ immutetur.

§. 21. Quia nunc pro hora 9^{na} die 28 Maii inveniatur Longitudo Mercurii Geocentrica $2^s. 29^\circ. 27'. 38''$ et Latitudo $2^\circ. 9'. 13''$; pro Venere autem Longitudo Geocentrica $2^s. 29^\circ. 32'. 33''$ et Latitudo $2^\circ. 10'. 17''$, fiet motus horarius relatiuus in Longitudinem $4'. 8''$, ideoque tempus coniunctionis centrorum Veneris et Mercurii anteuertet momentum aſſignatum 13 circiter minutis primis, vbi tamen ob neglectum effectum Parallacticum in Longitudine 3 vel 4 minutorum primorum incertitudo locum habere poteſt. Verum de hoc momento coniunctionis ex ipſa obſeruatione tutius eſſe videtur iudicium, quum enim Cel. *Bewis* indicaſſet tempore $9^h. 43'$ Mercurium adhuc diſtare a limbo Veneris $\frac{1}{12}$ quaſi parte Diametri Veneris, ſi haec diſtantia aeſtimetur 5 vel 6 ſcrupulorum ſecundorum, colligitur contactum Veneris cum Mercurio vno minuto cum dimidio tardius ac iſtud momomentum obſeruatum contingere debuiſſe. Ipſa autem duratio occultationis, ſi quidem ſupponatur centrum Mercurii per ipſum centrum Veneris tranſuiſſe, non niſi 16 minutis primis abſoluta fuit; centralis igitur coniunctio in id fere momentum incidit, quo diſpulſis nubibus vidit Cel. *Bewis* hor. 9. 51′ Mercurium totum a Venere eſſe obtectum.

tum. Si vero supponamus differentiam Latitudinum Veneris et Mercurii 10 fuisse secundorum, duratio occultationis erit 15 minut. primorum, et si differentia Latitudinis statuatur $20''$, fiet duratio occultationis $11'$. $40''$ circiter. Haec autem hypothetice tantum argumentamur, neque certa determinatio heic locum habet, nisi quatenus differentia Latitudinum Veneris et Mercurii per ipsam innotesceret obseruationem: quo facto nullo negotio tempus coniunctionis Planetarum proxime saltem determinari posset. Denique heic obseruamus Tabulas *Halleii* praecipue quod Latitudinem attinet, melius cum obseruatione quadrare, quum ex his Tabulis habeatur Longitudo Mercurii Geocentrica 2^s. 29°. $31'$. $44''$ et Latitudo 2°. $9'$. $7''$, Veneris autem Longitudo Geocentrica 2^s. 29°. $30'$. $55''$ et Latitudo 2°. $9'$. $26''$ Austr., vtrae autem Tabulae potiorem mereantur fidem, id quidem non nisi praeuia obseruatione decidi potest.

§. 22. Vt vno nunc intuitu conclusiones ex nostris calculis deductas conspectui exponamus generalia earum capita heic repetere iuuabit. De occultatione igitur Aselli Australis a Ioue, quae Anno ante Natiu. Christi 240 die 3 Septembris facta esse perhibetur, demonstrauimus, quod ista obseruatio merito pro suspecta haberi debeat; quia Latitudo stellae tempore obseruationis erat Australis: fieri autem non potuit, vt Latitudo Iouis inueniretur Australis. Pro ista obseruatione, qua Anno 271 ante N. C., die 17 Ianuarii, Planeta Martis stellae β in fronte Scorpii iuncta videbatur, ex calculo quidem vix concludi potest, vtrum haec obseruatio rite sibi constet, nec ne? Et saltem si determinatio Latitudinis pro Stella, quam attulimus, rite se ha-

habeat, distantia secundum Latitudinem inter Stellam et Planetam Martis satis habetur sensibilis, etiamsi Longitudines perfecte redderentur consentientes. Idem quoque pronunciandum est de occultatione stellae η Virginis a Planeta Veneris, quae anno 271 ante N. C. die 11 Octob. hor. 17 facta esse dicitur. Propius autem ad veritatem accedit illa obseruatio Anno Christi 498 facta, qua obseruatus est die 1 Maii hor. 7 Planeta Martis ita iunctus Planetae Iouis, et ipsum quasi tangere videretur: nam pro isto momento differentia Planetarum in Longitudine vix 8′ excedit, differentia autem Latitudinum nequidem 6′ absoluitur. Pro occultatione Reguli a Venere Anno 1574 die 16 Septemb. a *Maestlino* obseruata, inuenimus differentiam inter Longitudinem Stellae et Planetae pro momento obseruato 9′ et in Latitudine duorum circiter minutorum: dubium igitur manet, vtrum aliqua Stellae facta sit occultatio. At pro obseruationibus ab eodem Celeb. Astronomo *Maestlino* factis, Anno 1590 die 2 Octob. hor. 17 et Anno 1591. die 8 Ianuar. 16^h, quarum priori Martem a Venere coopertum obseruauit, posteriori autem transitum Martis ante discum Iouis vidit, certo demonstrari potest calculum cum obseruatione tam bene conspirare, vt de harum obseruationum veritate nulli relinquatur dubio locus. Secus autem est cum occultatione Reguli a Venere, quae Anno 1598 a *Kepplero* obseruata esse perhibetur, differentia enim in Latitudine maior est, quam vt vlla occultatio locum habere potuerit. Pro obseruatione transitus Iouis prope stellam in fronte Scorpii Anno 1627 die 5 Maii facta, demonstrauimus occultationem quidem locum habere potuisse, verum tempore, quod Epocham obseruationis 11 horis anteuertit. De reliquis autem occultationum

num obſeruationibus recentioribus, per calculum noſtrum penitus euictum eſt, has obſeruationes omnino confirmari, nec maiorem oriri diſſenſum calculi ab obſeruatione, quam vt ex leuiusculis erroribus Tabularum facilem inueniat explicationem. Hoc tamen in negotio antiquae iſtae obſeruationes praecipui forent momenti, modo loca Stellarum fixarum intra praeciſionem vnius vel alterius minuti pro Epochis obſeruationum haberentur determinata; his enim ſubſidiis certiſſimae concluſiones pro motibus Planetarum mediis, vt etiam pro motu Nodorum formari poſſent; verum quia de Longitudine et Latitudine Stellarum fixarum apud veteres Aſtronomos vix quidquam certi habetur determinatum, vſus huiusmodi obſeruationum ex hoc capite penitus fere deſtruitur.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE PRO DETERMINANDA POSITIONE VRBIS IAROSLAWL INSTITVTAE.

Auctore

PETRO INOCHODZOW.

Obſeruationes has eadem prorſus methodo vt antehae inſtitui: Inquiſiui primum in ſtatum Quadrantis et in latitudinem loci per altitudines ſtellarum fixarum meridianas in hemiſphaerio Auſtrali et Boreali captas, atque reperi

Die $\frac{10}{21}$ Octobris ex α, β, γ Vrſae maioris et γ Antinoi, γ, ε Cygni nec non α Delphini, errorem ſubtractiuum $2'. 45''$ et Latitudinem . . . $57^\circ. 37'. 26''$

Die $\frac{16}{27}$ Octobr. Ex α, β Vrſae maioris et α Aquilae γ Antinoi, γ Cygni, ε, α Delphini et ζ Pegaſi prodit error $- 2'. 51''$ et Latitudo 57. 37. 30

Die $\frac{13}{24}$ Decembr. Ex γ Cephei et β Pegaſi $- 2'. 46''$ 57. 37. 30

Die $\frac{17}{28}$ Decembr. Ex ſtella polari et α atque γ Pegaſi $- 2'. 47''$ . . . 57. 37. 31

Medium ex 27 combinationibus praebet errorem $- 2'. 47''$ et Latitudinem . . 57. 37. 29

En ipſas obſeruationes et calculos.

Altitudines stellarum fixarum meridianae.

Dies observ. St. novi.	Nomina fixar	Altit. Observ.	Error Quadran.	Refract.	Declinat. appar.	Latitudo.
2 Octob. 1784.	β Cygni	59°.57'.24"	−2.47	0'.38"	27°.31'.37½"	57°.37'.38½"
	α Sagittae	49. 58. 22	. .	0. 56	17. 32. 22	. . 43
	α Aquilae	40. 45. 30	. .	1. 17	8. 19. 2	. . 36
	γ Cygni	72. 0. 50	. .	0. 22	39. 35. 11	. . 30
21 Oct.	γ Antinoi	31. 0. 20	. .	1. 50	1, 26. 45	. . 22
	γ Cygni	72. 0. 59	. .	0. 22	39. 35. 18	. . 28
	α Delphin	47. 36. 31	. .	1. 1	15. 10. 16½	. . 33½
	ε Cygni	65. 36. 30	. .	0. 30	30. 10. 43	. . 30
	β Vrs. maior	25. 14. 14	. .	2. 19	57. 31. 37	. . 31
	α - - -	30. 36. 23	. .	1. 52	62. 54. 15	. . 29
	γ - - -	22. 36. 0	. .	2. 36	54. 53. 21	. . 16
27 Oct.	α Aquilae	40. 45. 32	. .	1. 17	8. 19. 1½	. . 33½
	β - - -	38. 20. 0	. .	1. 24	5. 53. 38	. . 49
	γ Antinoi	31. 0. 29	. .	1. 50	1. 26. 46½	. . 21½
	γ Cygni	72. 1. 0	. .	0. 22	39. 35. 12	. . 21
	ε Delphini	43. 2. 0	. .	1. 11	10. 35. 28½	. . 26½
	α - - -	47 36. 40	. .	1. 1	15. 10. 16	. . 24
	α Aquarii	31. 5. 40	. .	1. 50	1. 21. 11	. . 46
	γ - - -	29. 59. 25	. .	1. 54	2. 27. 37	. . 39
	ζ Pegasi	42. 9. 43	. .	1. 13	9. 43. 12	. . 29
	β Vrs. maior	25. 14. 19	. .	2. 19	57. 31. 35½	. . 37½
	α - - -	30. 36. 26	. .	1. 52	62. 54. 13	. . 34
24 Dec.	β Pegasi	59. 21. 20	. .	0. 39	26. 55. 22	. . 28
	γ Cephei	71. 14. 28	. .	0. 23	76. 26. 12	. . 30
28 Dec.	α Androm.	60. 20. 20	. .	0. 38	27. 54. 29	. . 34
	γ Pegasi	46. 25. 50	. .	1. 3	13. 59. 27	. . 27
	Polaris	59. 31. 6	−2.47	0. 39	88. 9. 51	. . 31
					Medium	57°.37'.31"

Alti-

Altitudines Solis in Meridiano versantis errore Quadrantis iam purgatae: in computu declinationis assumta est differentia Meridianorum $2\frac{1}{2}$ horarum.

Dies Obs. St. noui.		Altit. limbi ☉ super.	Refract. — parall.	½ Diam. ☉lis.	Declinat. ☉ Austr.	Eleuatio Poli.
29	Sept	29°.57'.10"	1'.45",5	16. 2,5	2°.42'.51"	57°.37'.47"
30	.	29. 34. 15	1. 48,5	- 3	3. 6 12	- - $24\frac{1}{3}$
4	Oct.	28. 1. 5	1. 56,5	- 4	4. 39. 16	- - $39\frac{1}{3}$
16	.	23. 29. 35	2. 22	- 7	9. 11. 27	- - 27
21	.	21. 41. 6	2. 34	- 8,5	10. 59. 52	- - $44\frac{1}{3}$
22	.	21. 20. 13	2. 36	- -	11, 21. 5	- - $26\frac{1}{2}$
26	.	19. 57. 15	2. 47	- 10	12. 44. 13	- - 29
27	.	19. 36. 45	2. 50	- -	13. 4. 30	- - 45
30	.	18. 37. 23	2. 58	- 11	14. 4. 4	- - 42
18	Nov.	13. 15. 37	4. 11	- 15	19. 27. 4,5	- - $44\frac{1}{2}$
26	.	11. 35. 41	4. 47	- 16	21. 7. 34	- - 48
1	Dec.	10. 45. 55	5. 8	- 17	21. 57. 40	- - 50
7	.	10. 0. 35	5. 29	- 18	22. 43. 47	- - 25
18	.	9. 18. 44	5. 51, 5	- 19	23. 26. 9	- - $17\frac{1}{2}$
29	.	9. 32. 30	5, 44	- -	23. 11. 49	- - 44
9	Ian.	10. 42. 19	5. 11	- -	22. 1. 41	- - 19
15	.	11. 42. 19	4. 44	- 18,5	21. 1. 0	- - $43\frac{1}{3}$
16	.	11. 53 43	4. 40	- -	20. 49. 29	- - $46\frac{1}{2}$
21	.	12. 57. 15	4. 17	- 18	19. 16. 2	- - 18
22	.	13. 10. 57	4. 13	- 18	19. 32. 13	- - 21
28	.	14. 40. 30	3. 46	16.17	18. 2. 0	- - 33
					Medium	57°.37'.35"

Ex his patet latitudinem Vrbis Jaroslawl tuto statui posse 57°. $37\frac{1}{2}$'.

De longitudine eiusdem Vrbis.

Quamuis multae eclipſes ſatellitum Iouis videri hic loci potuiſſent, verum inclementia coeli nubili reddidit eas inuiſibiles et conatus noſtros fecit irritos. Vix per totum commorationis tempus tres obſeruare licuit emerſiones, quarum duae priores ob rationes allegatas dubiae ſunt.

$\frac{19}{30}$ Nouembr. Emerſio 2^{di} ſatellitis $6^h. 44^I. 20^{II}$ Temp. vero. Nubibus in regione Iouis vagantibus Satellites et ipſe planeta ſaepe tegebantur.

$\frac{6}{17}$ Decembr. Emerſionem 1^{mi} Satellitis videbar mihi obſeruare $3^h. 51^I. 53^{II}$, obſeruatio haec etiam dubia ob nubeculas circumſtantes et crepuſculum, praeterea motus penduli ob dies nubilos non ſatis exploratus erat.

$\frac{13}{24}$ Decembr. Emerſio 1^{mi} Satellitis $5^h. 44^I. 50^{II}$ Temp. vero. Coelo ſereno et pacato faſciis mediocriter conſpicuis. Altitudo planetae 18°. Obſeruatio haec ſatis bona mihi videbatur; collata cum momento ephemeridum $3^h. 13^I. 30^{II}$. praebet differentiam meridianorum inter Pariſios et Jaroslawl $2^h. 31^I. 20^{II}$, adeoque longitudinem a primo meridiano $57^\circ. 50^I$, quam pro vſu geographico ſufficientem eſſe confido.

His addi poſſunt ſequentes obſeruationes Lunae culminantis et comparatae cum fixis.

$\frac{11}{22}$ Ian.

	Temp. Horol.	Altitudo ab errore Quadr. lib.
$\frac{10}{21}$ Ianuarii. Posito Quadrante in meridianum appulsum centri solis ad filum verticale obseruaui	$0^h.32'.55''$	
Meridiem vero ex altitudinibu respondentibus verum reperi	0. 33. 4	
β Tauri culminabat	9. 27. 27	$60°.47'.43''$
Limbus Lunae praecedens ad filum Quadr. vert.	9. 35. 19	
Centrum Lunae culminat	9. 36. 26½	59. 54. 47
$\frac{11}{22}$ Ianuar. Centrum Solis in meridiano	0. 34. 34½	
Altitudinibus matutinis respondentes ob nubes capere non potui, nox etiam nubila.		
$\frac{12}{23}$ Ianuar. Appulsus limbi ☽ praecedentis	11. 25. 23	
Centrum Lunae culminat	11. 26. 30	57. 23. 40
β Geminorum culminat	11. 41. 33	60. 54. 47
Sequentes dies nubili		
$\frac{17}{28}$ Ianuar. Centrum Solis in meridiano	0. 44. 9½	

Inuestigandam ex his obseruationibus loci longitudinem ad aliud tempus reseruare nunc coactus sum.

Altitudines Limbi ☽ superioris obseruatae sunt.

Declinationem acus magneticae inueni 4 graduum ad occidentem.

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE KOSTROMAE HABITAE.

Auctore
PETRO INOCHODZOW.

Altitudines ſtellarum fixarum meridianae:

Dies obſeru.	Nomina fixar.	Altituo obſeruata.	Refract. de la Caill.	Declin. appar. ad. d. obſeru.
$\frac{4}{15}$ Mart.	μ Gemin.	54°.55′. 0″	0′. 47″	22°.36′.16″
1785.	γ - -	48. 52.42	0. 58	16. 33.48
	ε - -	57. 37.44	0. 42	25. 19.18
	ζ - -	53. 10.48	0. 50	20. 51.58
	β - -	60. 50. 5	0. 37	28. 31.35
	δ Dracon.	35. 7.19	1. 34	67. 16.57
	α Cephei	29. 31.40	1. 56	61. 40.48
	β Cephei	37. 27.39	1. 27	69. 37.11
$\frac{13}{24}$ Mart.	δ Dracon.	35. 7.25	1. 34	67. 16.56
	Procyon.	38. 4 49	1. 25	5. 45.59
$\frac{15}{26}$ Mart.	α Gemin.	64. 38.40	0. 31	32. 20.46
	β - -	60. 50. 0	0. 37	28. 31.36
	β Cancr.	42. 8.33	1. 14	9. 49.47
	μ Leonis	59. 18.40	0. 40	27. 0.24
	α Cephei	29. 31.44	1. 56	61. 40.46
	β - -	37. 27.41	1. 27	69. 37.10

E combinationibus altitudinum ſtellarum verſus Boream et Auſtrum captarum, inquiſiui in errorem Quadrantis et in Latitudinem loci, vt ſequitur.

D.

			Error.	Latitudo.
Die $\frac{4}{15}$ Mart.	Ex δ Dracon. et	μ ♊ -	3′. 22″$\frac{1}{2}$	57°. 45′. 25″$\frac{1}{2}$
		γ - -	22	36
		ε - -	16	32
		ζ - -	24	24
		β - -	20$\frac{1}{2}$	27$\frac{1}{2}$
	Ex α Cephei et	μ ♊ -	26$\frac{1}{2}$	29$\frac{1}{2}$
		γ - -	26	30
		ε - -	20	36
		ζ - -	28	28
		β - -	24$\frac{1}{2}$	31$\frac{1}{2}$
	Ex β Cephei et	μ ♊ -	29	32
		γ - -	28$\frac{1}{2}$	32$\frac{1}{2}$
		ε - -	22$\frac{1}{2}$	38$\frac{1}{2}$
		ζ - -	30$\frac{1}{2}$	30$\frac{1}{2}$
		β - -	27	34
$\frac{13}{24}$ Mart.	Ex δ Dracon. et Procyone		10	46
$\frac{15}{26}$ Mart.	Ex α Cephei et	α ♊ -	12$\frac{1}{2}$	49$\frac{1}{2}$
		β ♊ -	24$\frac{1}{2}$	37$\frac{1}{2}$
		β ♋ -	17	45
		μ ♌ -	19	43
	Ex β Cephei et	α ♊ -	13$\frac{1}{2}$	50$\frac{1}{2}$
		β ♊ -	25$\frac{1}{2}$	38$\frac{1}{2}$
		β ♋ -	18	46
		μ ♌ -	20	44
Medium ex 24 combinationibus - -			3. 22	57. 45. 36

Sequuntur altitudines Solis meridianae, quibus correctio Quadrantis iam applicata, et in computu declinationis Solis differentia meridianorum inter Parisios et Kostromam 2^h. 36′ supposita est.

D.

D. obferu. St. nou.	alt. limb. ⊙ Boreal.	Refract. —parall.	½ diam. ⊙	Declin. ⊙	Eleuatio Poli.
1785.				Auftral.	
27 Febr.	24. 26. 0	2′. 15″	16′. 11″	8°. 6′. 33″	57°. 45′. 53″
28 Febr.	24. 48. 46	2. 13	- -	7. 43. 51	47
3 Mart.	25. 57. 22	2. 7	16. 10	6. 35. 9½	45½
4	26. 20. 30	2. 5	- -	6. 12. 5	40
5	26. 43. 30	2. 2	16. 9,5	5. 48. 54	47½
7	27. 30. 18	1. 58	16. 9	5. 2. 19	30
8	27. 53. 33	1. 56	- -	4. 38. 54	38
10	28. 40. 20	1. 52	16. 8	3. 51. 58	42
14	30. 14. 33	1. 45	16. 7	2. 17. 31	48
15	30. 38. 6	1. 43	- -	1. 53. 50	54
				Boreal.	
21	33. 0. 16	1. 34	16. 5,5	0. 28. 19	42½
24	34. 10. 50	1. 30	16. 4,5	1. 39. 9	53½
26	34. 58. 20	1. 28	16. 4	2. 26. 12	24
31	36. 54. 24	1. 21	16. 2,5	4. 22. 50½	50
				Medium - -	57. 46. 44

Latitudo igitur vrbis Koftromae rotunde ftatui poteft 57°. 45⅔′.

Cognitis latitudinibus vrbium Iaroslawl et Koftromae, atque diftantia illarum breuiffima, 60 nimirum Werftarum, quae in partibus circuli conftituunt 34′. 27″, fupputaui angulum ad polum inter meridianos horum locorum 1°. 2′. 36″; Longitudo vero Iaroslawl 57°. 50′, erit Longitudo Koftromae 58°. 52′. 36″, quae determinatio non fane multum a veritate abludere poteft.

Declinationem acus magneticae reperi 3¾ grad. verfus occidentem. OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE IN CHERSONESO TAVRICA ANNO 1785 INSTITVTAE

a *Theodoro Tchernoi.*

Referente
STEPHANO RUMOVSKI.

I.

Pro definiendo ſitu Geographico Cherſoneſi Tauricae, regionumque ad Caucaſum ſitarum placuit Sacrae Imperatoriae Maieſtati, vt ab Academia ablegaretur neceſſariis inſtrumentis munitus obſeruator. Munus hoc demandatum Viro Cl. *Theodoro Tchernoi*, Academiae Scientiarum Adiuncto Geographiae addicto, obſeruatori diligenti et experto; etenim in omnibus obſeruationibus, quas beate defunctus *Iohannes Islenieff* pro ſitu Geographico variorum Imperii Ruſſici locorum inſtituit, Vir Cl. *Tchernoi* ſociam operam praebuit, et poſt modum omnibus interfuit, quas mihi inſtituere hic licuit. Ille menſe Maio iter ingresſus ad iſthmum, nobis Perecop dictam, peruenit menſe Iunio, ibique quadrante tripedali a *Caniuet* elebarato pro Latitudine ſequentes inſtituit obſeruationes.

Die $\frac{21 \text{ Iunii}}{1 \text{ Iulii}}$ altitudinem maximam limbi Solis Borealis reperit 67°. 6′. 23″, quae errore quadrantis + 11′. 27″ correcta fit 67°. 17′. 50″, et adhibita refractione — parallaxi — 21″, ½ diametro Solis 15′. 46″ altitudo centri Solis prodit 67°. 1′. 43″. Vnde Latitudo Perecop reperitur 46°. 4′. 27″. Declinatione Solis exiſtente 23°. 6′. 10″.

Die 22 Iunii circa meridiem altitudo limbi Solis Borealis reperta eſt 67°. 1′. 18″. quae errore quadrantis correcta fit 67°. 12′. 45″; vnde adhibita refractione — parallaxi 21″, ½ diametro Solis 15′. 46″ Declinatione 23°. 1′. 44″, Latitudo Perecop reperitur 45°. 5′. 6″.

Eadem die captae ſunt altitudines maximae Lucidae Lyrae et Lucidae Aquilae, quarum illa inuenta eſt 82°. 23′. 38″, et errore quadrantis + 11′. 27″, Refractione — 8″ correcta dat Latitudinem iſthmi Perecop 46°. 0′. 28″ Declinatione Lucidae Lyrae apparente pro tempore obſeruationis exiſtente 38°. 35′. 25″.

Pari modo altitudo Lucidae Aquilae obſeruata eſt 52°. 7′. 45″, quae errore quadrantis + 11′. 27″, refractione — 44″ correcta, ob Declinationem ſtellae apparentem 8°. 18′. 42″ Bor. dat Latitudinem iſthmi Perecop 46°. 0′. 42″. Hinc pro vſu geographico Latitudo Iſthmi Perecop ſtatui circiter poterit 66°. 2′½.

Obſer-

II.

Obſeruationis Eupatoriae inſtitutae,

alias *Kesloff* dictae.

Pro definiendo valore partium micrometri quadranti praefixi ter menſurauit diametrum Solis verticalem; die $\frac{3}{14}$ Iulii reperit illum valere 13 Reu. 38 part. cent. die $\frac{4}{15}$ Iulii 13, 36 Reu. et tandem die $\frac{5}{16}$ Iulii inuenit diametrum Solis aequaſſe 13, 37 Reu. Eſt vero diameter Solis pro his diebus 31'. 33'', 8: vnde concluditur valor vnius Reuolutionis = 2'. 21'' et vnius centeſimae partis = 1'', 41.

Verificationem quadrantis ad horizontem Eupatoriae bis inſtituit: die $\frac{7}{18}$ Iulii dirigendo tubum in obiectum ad $\frac{3}{4}$ Werſt. diſtans altitudinem eius reperit in ſitu recto quadrantis 5, 21 Reu. Poſt medum collocato quadrante in menſula, cuius altitudo aequabat radium quadrantis, altitudinem eiusdem obiecti in ſitu inuerſo quadrantis reperit 14, 95 Reu. hinc concluditur error in defectu 4, 87 Reu.

Die $\frac{9}{25}$ Iulii altitudinem eiusdem obiecti reperit

in ſitu recto quadrantis	5, 04 Reu.
in ſitu in verſo - -	14. 81.
Error. in defectu	4. 88

et ſumendo medium prodit correctio altitudinibus obſervatis addenda 4, 87$\frac{1}{2}$ Reu. = 11'. 27''.

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſv	Alt. obſeru. limb. ☉ Bor.	Error. quadrat.	Refr. −paral	½ Diem ☉lis.	Decl. ☉lis Bor.	Latitudo.
$\frac{28}{9}$ Iun. Iul.	67°.10′. 6″	+11′.27″	− 21″	15′.47″	22°.19′.30″	45° 14′.11″
$\frac{30}{11}$ –	66. 54. 46	- -	—	- -	22. 4. 4	14. 1
$\frac{1}{12}$ Iul.	66. 46. 37	- -	—	- -	21. 55. 56	14. 0
$\frac{9}{20}$ —	65. 26. 48	- -	—	15. 48	20. 35. 45	13 40
$\frac{12}{23}$ —	64. 50. 42	- -	—	- -	19. 59. 58	14. 0
$\frac{15}{26}$ —	64. 11. 58	- -	—	- -	19. 21. 11	13. 58
$\frac{18}{29}$ Iul.	63. 30. 11	+11. 27	− 21	15. 48	18. 39. 28	45. 14. 4
					Medium	45. 13. 59.

Altitudines meridianae Stellarum fixarum.

Dies obſv.	Nomina ſtellarum.	Altitudo obſeruat.	Error. quadrat.	Refr.	Decl. Nut. et Aberr. corr.	Latitudo.
$\frac{1}{12}$ Iul.	α Aquilae	52°.54′.11″	+11′.27″	43″	8°.18′.44″.b	45°.13′.49″
$\frac{3}{14}$ —	δ Hercul.	69. 41. 26	- -	22	25. 6. 24	13. 53
	α Lirae	83. 10. 17	- -	7	38. 35. 30	13. 53
	α Aquilae	52. 54. 15	- -	43	8. 18. 45	13. 46
$\frac{5}{16}$ —	δ Hercul.	69. 41. 6	- -	22	25. 6. 25	14. 13
	α Lirae	83. 10. 7	- -	7	38. 35. 31	14. 4
	α Aquilae	52. 54. 14	- -	43	8. 15. 45	13. 47
$\frac{16}{27}$ Iul.	δ Hercul.	69. 41. 9	- -	22	25. 6. 25	14. 11
	α Lirae	83. 10. 2	- -	7	38. 35. 34	14. 12
	α Aquilae	52. 54. 11	+11. 27	43	8. 18. 47	45. 13. 52
					Medium	45′. 13 58.

Hinc perſpicitur Latitudinem Eupatoriae rotunde 45°. 14′ absque errore ſtatui poſſe, praeſertim cum earundem ſtellarum intermediis diebus captae altitudines idem praebeant confectarium.

Obſer-

Obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt. ♃
Die $\frac{4}{15}$ Iulii meridies verus ex altitud. ☉lis correſpond. - -	$0^h. 1'.27'',3$		
— Imm. II. Satellitis Iouis -	14. 45. 58	$14^h.44'.14''$	40°.
Aere tranquillo, coelo ſereno, faſciis Iouis optime conſpicuis.			
Die $\frac{5}{16}$ Iulii meridies verus ex altitud. Solis correſpod. -	0. 1.55,2		
Die $\frac{13}{24}$ Iulii Merid. verus ex altitud. Solis correſpond. -	0. 8. 3,2		
— Imm. I. Satell. Iouis - -	12. 25. 31	12. 17. 4	22°.
Luna ſplendente, faſciis quidem bene conſpicuis, aſt ipſis ſatellitibus non aeque micantibus ac in obſeruatione praecedente.			
Die $\frac{14}{25}$ Iulii meridiis verus ex altitud. Solis correſpond. -	0. 8.50,5		
Die $\frac{20}{31}$ Iul. meridies verus ex altitudinibus correſpondentibus	0. 12.48,5		
— Imm. I. Satellitis Iouis -	14. 24. 12	14. 11. 2	43°.
Coelo ſereno, aere tranquillo, faſciis et ſatellitibus optime conſpicuis.			
Die $\frac{21 \text{ Iulii}}{1 \text{ Aug.}}$ Meridies verus ex altitudin. Solis correſpondentibus	0. 13. 26,5		

Obſeruationes iſtae ſuper Satellites Iouis habitae, aeque ac omnes reliquae inſtitutae ſunt tubo *Dollondiano* triplici vitro obiectiuo inſtructo et obiecta octogies circiter amplificante.

Die $\frac{13}{24}$ Iulii	Imm. I. Satell.	10^h.	$57'$.	$58''$	Dresdae
		12.	17.	4	Eupatoriae.
Longit. Eupat. a Dresda		2.	19.	6	
Longit. Dresdae a Lut. Par.			45.	10	
Longit. Eupat. a Lut. Par.		2.	4.	16.	

Quodſi obſeruationes ſupra relatae conferantur cum momentis e tabulis depromptis, atque ex ternis determinationibus optime inter ſe conſentientibus $2^h. 4'. 30''$; $2^h. 4'. 17''$; $2^h. 4'. 23''$ ſumatur medium, differentia meridianorum Pariſienſis et Eupatorienſis prodibit $2^h. 4'. 23$. Parum igitur a veritate aberrabitur, ſi Longitudo Eupatoriae a meridiano Pariſino computata ſtatuatur $2^h. 4'. 20''$ ſiue ingradibus $31°. 5'$.

Declinatio acus magneticae Eupatoriae die $\frac{14}{25}$ Iulii obſeruata eſt $11°. 38'$ verſus occaſum.

III.

Obſeruationes Seuaſtropoli habitae.

Seuaſtopolis eſt vrbs nouiſſime fundata in littore occidentali *Cherſoneſi Tauricae*, ad ſinum ſecuram nauibus bellicis ſtationem praebentem, non procul ab oppido *Inkerman* dicto.

Die $\frac{2}{23}$ Auguſti directo tubo quadrantis in obiectum ad $1\frac{1}{2}$ Werſt. diſtans altitudo eius in ſitu recto quadrantis reperta eſt $+ 1, 95$ R, et in ſitu inuerſo $+ 11, 61$ Reu.; vnde concluditur error quadrantis altitudinibus obſeruatis addendus $= 4, 83$ Reu. $= 11'. 21''$.

Dies

Dies obſv.	Alt. obſeru. limb. ☉ Bor	Error. quadr.	Refr. — paral.	½ Diam. ☉lis.	Decl. ☉lis Bor.	Latitudo.
25 Iulii / 5 Aug.	62°.16'.25"	+11'.21"	— 26"	15'.49"	16°.51'.41"	44°.41'.10"
26 Iul.	61. 58. 32	- -	—	- -	16. 35. 7	44. 41. 29
28 —	61. 24. 17	- -	27	15. 50	16. 1. 14	44. 41. 20
30 —	60. 49. 46	- -	27	15. 50	15. 26. 21	44. 41. 41
3/14 Aug.	59. 37. 11	- -	29	15. 51	14. 13. 33	44. 41. 21
5 Aug.	58. 11. 9	+11'.21	30	15. 52	13. 35. 51	44. 41. 10
					Medium	44. 41. 21

Altitudines Stellarum fixarum meridianae.

Dies obſv.	Nomina ſtellar.	Altitudo obſeru.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nut. et Aberr. corr.	Latitudo.
25 Iulii / 5 Aug.	α Ophiuci	57.51.40	+11'.21"	36"		44°.41'.37"
	μ Hercul.	72.59.20	- -	17		44. 41. 32
	ε Aquilae	59.55.17	- -	33		41.25
	β Cygni	72.38.40	- -	17		41.34
	α Aquilae	53.26.36	- -	42		41.34
30 Iulii / 10 Aug.	α Ophiuci	57.51.42	- -	36	12°.44'. 2"	44. 41. 35
	μ Herculis	72.59.32	- -	17	27. 51.56	44. 41. 20
	ε Aquilae	59.55.11	- -	33	14. 47.30	41. 31
	β Cygni	72.38.29	- -	17	27. 31.18	41.45
	α Aquilae	53.26.36	- -	42	8. 18.49	41. 34
3/14 Aug.	α Ophiuci	57.51.49	- -	36		44. 41. 28
	μ Herculis	72.59.25	- -	17		44. 41.27
	ε Aquilae	59.55. 6	- -	33		41.14
	β Cygni	72.38.34	- -	17		41.28
	α Aquilae	53.26.91	+11.21	42		41. 39
					Medium	44. 41. 31

Quam obrem Latitudo Seuaſtopolis ſtatuenda erit 44. 41. 26

Obſer-

Obſeruationes Eclipſium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt. ♃
Die $\frac{29\ \text{Iulii}}{9\ \text{Aug.}}$ Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	$11^h.54'.16'',5$		
— Imm. I. Satell. ♃ - - - coelo ſereno, faſciis tamen non ſatis diſtincte conſpicuis.	10. 28. 56	$10^h.34'.26''$	14°
— Imm. II. Satell. ♃ - coelo ſereno et faſciis optime conſpicuis.	11. 51. 25	11. 56. 53	28°
Die $\frac{30\ \text{Iulii}}{10\ \text{Aug.}}$ Meridies verus per altitudines Solis correſpond.	11. 54. 47,7		
Die $\frac{5}{16}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 58. 10		
— Imm. I. Satell. ♃ - - -	12. 28. 15	12. 29. 50	32°
— Imm. II. Satell. ♃ - - - vtraque immerſio obſeruata eſt coelo ſereno et faſciis diſtincte conſpicuis.	14. 34. 21	14. 35. 53	46°
Die $\frac{6}{17}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 58. 39,5		
— Imm. III. Satell. ♃ - - coelo quidem ſereno, ſed ob ſplendorem Lunae faſciis minus conſpicuis.	14. 1. 53	14. 2. 55	44°
Die $\frac{8}{19}$ Aug. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 59. 42,2		

Ob-

Obſeruationibus I. et II. Satellitis Iouis collatis cum momentis Immerſionum ex Calendario aſtronomico Pariſino depromtis prodibunt pro Longitudine Seuaſtopolis a Lutetia Pariſiorum ſequentes determinationes $2^h.4'.44''$; $2^h.4'.57''$; $2^h.5'.2''$; $2^h.5'.5''$; ex quibus ſumto medio prodibit pro vſu Geographico differentia meridianorum Pariſienſis et Seuaſtopolis ſatis exacte $2^h.4'.57''$ ſiue in gradibus $31°.14'.15''$, de vera autem Longitudine Eupatoriae iudicium ſuſpendere licebit, donec obſeruationes cum correſpondentibus conferantur.

Die $\frac{3}{14}$ Aug. Declinatio acus magneticae obſeruata eſt $11°.13'\frac{1}{2}$ verſus occidentem.

IV.

Determinatio Latitudinis *Theodoſiae* alias *Keſa* dictae.

Per paucos dies commoratus eſt *Theodoſiae* Vir Cl. *Tchernoi*, et pro definienda Latitudine loci ſequentes inſtituit obſeruationes.

Dies obſv.	Nomina ſtellar.	Altit. obſeruat.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nut et Aber. corr.	Latitudo.
$\frac{12}{23}$ Aug.	ε Aquilae	59°.32′.27″	+11.21	34″	14°.47′.30″	45°.4′ 16″
	β Cygni	72. 15.48		18	27. 31. 22	4. 31
	α Aquilae	53. 3.59		42	8. 18. 52	4. 14
$\frac{13}{24}$ —	ε Aquilae	59. 32. 29		34		4. 14
	β Cygni	72. 15. 51		18		4. 28
	α Aquilae	43. 3. 55	+11′.21″	42		45. 4. 16
					Medium	45. 4. 20

Die $\frac{13}{24}$ Aug. obſeruata eſt altitudo Solis meridiano proxima, et limbi illius Borealis reperta eſt 55°. 57′. 47″, quae errore quadrantis 11′. 21″, Refractione — parallaxi 34″ correcta ſit 56°. 8′. 34″, et cum diameter ☉lis ſit 15′. 53″, Declinatio vero circiter 10°. 56′. 48″ prodibit Latitudo quaeſita 45°. 4′. 7″.

Pari modo ex altitudine die ſequenti obſeruata 55°. 37′. 8″ poſita declinatione Solis 10°. 36′. 4″ elicitur Latitudo 45°. 4′. 3″. Hinc pro vſu Geographico Latitudo *Theodoſiae* rotunde ſtatui poterit 45°. 4′.

V.

Obſeruationes Ienikolae inſtitutae.

Hic denuo repetita quadrantis verificatione ad horizontem error altitudinibus obſeruatis addendus repertus eſt 11′. 32″; ſumto autem medio inter hunc et Seuaſtopoli inuentum prodit 11′. 26″,5 idem quam proxime, qui prodiit ex verificatione Eupatoriae inſtituta.

Altitudines Solis meridianae.

Dies obſv.	Alt. obſeru. limb. ☉ Bor.	Error. quadran.	Refr. — paral.	½ Diam ☉lis.	Decl. ☉lis Bor.	Latitudo.
$\frac{16}{27}$ Aug.	54°. 38′. 15″	+ 11′. 27″	— 36″	15′. 54″	9°. 54′. 6″	45°. 20′. 54″
$\frac{21 \text{ Aug.}}{1 \text{ Sept.}}$	52. 50. 22	- -	38	15. 55	8. 6. 25	21. 9
22 —	52. 28. 39	- -	38	15. 55	7. 44. 28	20. 55
23 —	52. 6. 47	- -	39	15. 56	7. 22. 22	20 43
24 —	51. 44. 32	- -	39	15. 56	7. 0. 9	20. 45
$\frac{28 \text{ Aug.}}{8 \text{ Sept.}}$	50. 14. 40	+ 11. 27	44	15. 57	5. 30. 17	45. 20. 53
					Medium	45. 20. 53.

Alti-

Altitudines Stellarum fixarum meridianae.

Dies obfv.	Nomina ftellar.	Altitudo obferu.	Error quadr.	Refr.	Decl. Nut. et Aberr. corr.	Latitudo.
19/30 Aug.	ε Aquilae	59°.15'.24"	+11'.27"	34		45°.21'.14"
	β Cygni	71. 58. 50	- -	18		21. 14
	α Aquilae	52. 47. 0	- -	43		21. 8
	ε Delphin.	55. 3. 20	- -	40		21. 15
20/31 Aug.	ε Aquilae	59. 15. 17	- -	34	14°. 47'. 31"	21. 21
	β Cygni	71. 58. 47	- -	18	27. 31. 23	21. 27
	α Aquilae	52. 47. 3	- -	43	8. 18. 52	21. 5
	ε Delphin.	55. 3. 17	- -	40	10. 35. 22	21. 18
21 Aug. / 1 Sept.	ε Aquilae	59. 15. 15	- -	34		21. 23
	β Cygni	71. 58. 43	- -	18		21. 31
	α Aquilae	52. 47. 6	- -	43		21. 2
	ε Delphin.	55. 3. 10	+11. 27	40		45. 21. 25
					Medium	45. 21. 18

Hinc concludere licet Latitudinem Ienikolae rotunde ftatui poffe 45°. 21'.

Obferuationes Eclipfium Satellitum Iouis.

	Tempus Horol.	Tempus verum.	Alt.
Die 21 Aug./1 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correfpondentibus - - - -	$11^h.45'.15'',5$		
— Imm. I. Satell. ♃ - -	10. 47. 6	$11^h.\ 2'.19''$	25°
Socius - -	46. 41		
coelo fereno, aere tranquillo			
Die 22 Aug./2 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correfpondentibus - - -	11. 44. 12,3		

Die

	Tempus Horol.	Tempus verum	Alt. ♃
Die 23 Aug./3 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	$11^h.43'.14'',2$		
— Imm. II. Satell. ♃ - -	9. 9.58	$9^h.26'.58''$	18°
Socius - -	9. 9.25		
coelo ſereno, faſciis optime conſpicuis.			
Die 24 Aug./4 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 42. 38,8		
Die 28 Aug./8 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpond.	11. 39. 21,7		
— Imm. I. Satell. ♃ - -	12. 37. 45	12. 58. 46	47°
Socius - - -	37. 27		
coelo ſereno, aere tranquillo.			
Die 29 Aug./9 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - -	11. 38. 32,9		
Die 30 Aug./10 Sept. Meridies verus ex altitudinib. Solis correſpond.	11. 37. 44,1		
~ Imm. II. Satell. ♃ diſtincte obſervata, coelo ſereno.	11. 43. 54	12. 6. 35	45°
Die 31 Aug./11 Sept. Meridies verus ex altitudinibus Solis correſpondentibus - - - -	11. 36. 54,6		

Iam vero obſeruata eſt

Die

Die 1 Sept. Imm. I. Satell.	9^h.	$30'$.	$52''$	Dresdae
	11.	2.	19	Ienikolae
Different. meridianorum -	1.	31.	27	
Longit. Dresdae a Lut. Paris.		45.	2	
Longit. Ienikolae ab eadem -	2.	16.	29.	
Die 28 Aug. Imm. I. Satell. ♃	10^h.	$56'$.	$32''$	Auully
	12.	58.	46	Ienikolae
Differentia meridianorum -	2.	2.	14	
Longit. Auully a Lut. Paris. -		14.	24	
Longit. Ienikolae a Lut. Paris.	2.	16.	38	
Die 30 Aug. Imm. II. Satell. ♃	10.	4.	49	Auully
	12.	6.	35	Ienikolae
Differentia meridianorum -	2.	1.	46	
Longit. Auully a Lut. Paris. -		14.	24	
Longit. Ienikolae ab eadem -	2.	16.	10.	

Sumto ex his tribus determinationibus medio prodit differentia meridianorum Parisiensis et Ienikolensis 2^h. $16'$. $26''$, siue in gradibus $34°$. $6'$. $40''$.

Die $\frac{26 \text{ Aug.}}{6 \text{ Sept.}}$ Declinatio acus magneticae obseruata est $7°$. $15'$ versus occasum.

Insulae Taman, cuius distantia a Ienikola ex traditione praefectus Ienikolae Rosenberg est 18 praecise Werstarum, deuiatio a positione acus magneticae reperta est $23°\frac{1}{2}$ versus ortum; vnde posita Latitudine Ienikolae $45°$. $21'$. $6''$ Longitudine a meridiano Parisino computata $34°$. $6'$. $30''$ prodit Latitudo insulae Taman $45°$. $12'$. $16''$ et Longitudo $34°$. $14'$. $45''$.

OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES FAITES À AVULLY PRÈS DE GENÈVE.

Par

J. A. MALLET.

La longitude de l'obſervatoire d'Avully eſt de $14'. 24''$ de temps à l'orient de Paris, & la hauteur du Pôle de $46^\circ. 10'. 10''$.

1°. Eclipſes des Satellites de Jupiter.

J'ai eu l'honneur d'envoyer à l'Académie au mois de Septembre dernier 1785, le petit nombre d'obſervations d'eclipſes de Satellites de Jupiter que j'ai pû faire dans le courant de l'été, voici celles que j'ai pû obſerver depuis lors; Elles ont été faites ainſi que les précédentes avec une lunette achromatique à triple objectif qui groſſit 125 fois.

1785.		Temps vrai.	
Aouſt	23.	$15^h.25'.43''$	Immerſ. du 2^d. S.... Obſervation excellente; j'oubliai de la joindre à celles que j'envoyai en Septembre.
Sept.	22.	14. 50. 1	Immerſ. du 1^r. Sat. auſſi bonne qu'elle put être, vû la proximité où le Satellite eſt de Jupiter.

1785.

1785.		Temps vrai.	
Sept.	23.	$8^h.27'.57''$.	Immerſ. du 3^{me}. Sat. Obſervation médiocre, le temps peu net : j'ai cru revoir le Satellite deux fois dans l'eſpace d'une demi minute, mais cela eſt fort douteux. L'Emerſion n'a pu être obſervée, quoique annoncée dans la Connoiſſance des Temps, le Satellite étant derriere le diſque de la Planete.
Oct.	1.	11. 15. 6.	Immerſ. du 1^r. Sat. Temps ſerein, mais l'obſervation ne peut ètre que très douteuſe: le Satellite paroiſſoit toucher le diſque de Jupiter.
	5.	9. 55. 16.	Emerſ. du 2^d. Sat. Je n'ai été parfaitement ſur de voir le Satellite qu'à 9^h. $56'$. avant ce moment-là il diſparoiſſoit de temps en temps.
Déc.	8.	9. 24. 44.	Emerſ. du 2. Sat. Très bonne obſervation, le temps ſerein avec un leger brouillard.

2°. Occultations d'étoiles par la Lune.

1°. Le 27. Avril 1785. J'obſervai l'immerſion de l'étoile 43^e. d'Ophiucus derriere la partie éclairée de la Lune à . . . . . . $13^h.20'.20'',3$
& l'Em. de deſſous la partie obſcure à 13. 57. 57, 5 } Temps vrai.

L'obſervation de l'immerſion eſt médiocre, parceque la Lune étoit trés lumineuſe, & que l'étoile entroit fort obliquement; je dois l'avoir perdu de vue avant la véritable immerſion. L'obſervation de l'émerſion eſt très bonne.

2. Le

2°. Le 22. Juin 1785. J'obſervai l'immerſion de l'étoile φ du Sagittaire derriere la partie éclairée de la Lune à - - - - - - 12ʰ.28′. 1″,1 } Temps vrai.
& l'émerſ. de deſſous la partie obſcure 13. 45. 47, 5 }
Ces deux obſervations ſont aſſez bonnes.

J'ai fait le calcul de cette occultation, en employant les formules & la méthode de Mr. *Lexell* pour déterminer la parallaxe, le temps de la conjonction, & l'erreur des Tables.

	Par l'immerſion.	Par l'émerſion.
Longitude vraie du ☉, par les Tables de *Mayer*	IIIˢ. 1°.48′.19″,0	IIIˢ. 1°.51′.24″,4
Aſcenſion droite du ☉	III. 1. 58. 4, 6	III. 2. 1. 26, 7
Obliquité de l'écliptique . . .	. 23. 28. 9	
Longitude vraie de la ☾	IX. 6. 59. 43, 3	IX. 7. 44. 18, 2
Latitude vraie de la ☾, auſtrale .	. 3. 0. 51, 9	2. 57. 35, 1
Mouvement horaire de la ☾ en longitude	. . 34. 23, 2	. . 34. 25, 2
Mouvement horaire de la ☾ en latitude qui va en diminuant . . .	. . 2. 31, 3	. . 2. 32. 9
Parallaxe horizontale équator. de la ☾	. . 58. 22, 7	. . 58. 24, 4
Diametre horizontal de la ☾ . .	. . 31. 49, 0	. . 31. 50, 1
Diametre augmenté	. . 31. 58, 7	. . 31. 58, 7
Parallaxe de longitude, dont la longit. vraie de la ☾ eſt diminuée . .	. . 3. 51, 5	. . 17. 6, 6
Parallaxe de latitude, dont la latit. vraie de la ☾ eſt augmentée . .	. . 55. 36, 0	. . 53. 43, 0
Longitude apparente de l'étoile φ, tirée du Catalogue de *Bradley* . .	IX. 7. 11. 26, 5	. . . . . .
Latitude apparente auſtrale . .	. 3. 55. 6, 0	. . . . . .

Réſul-

Résultat.

Par l'immersion la conjonction a eu lieu le 22 Juin à

$$12^h.\ 49'.\ 10''.\ 1 + 1'',750\,\delta - 0'',129\,\eta - 0'',240\,\pi$$

Par l'émersion à

$$12^h.\ 48'.\ 50'',4 - 1'',797\,\delta - 0'',429\,\eta - 0'',905\,\pi$$

Par un milieu entre les deux observations à

$$12^h.\ 49'.\ 0'',2 - 0'',023\,\delta - 0'',279\,\eta - 0'',572\,\pi$$

Erreur des Tables de *Mayer* qui donnent la longitude

de la Lune trop grande $\begin{cases} \text{de } 24'',0 + 0,57\,\Phi'' \text{ par l'imm.} \\ \text{de } 13'',6 - 0,57\,\Phi'' \text{ par l'ém.} \end{cases}$

J'employe ici les mêmes lettres que Mr. *Lexell*, c'est à dire. que δ est la correction à faire au demi-diametre de la Lune; η la correction de la latitude des Tables; π la correction de la parallaxe horizontale équatorienne; & Φ'' le changement qui résultera sur le temps de la conjonction, lorsque les quantités δ, η, & π seront déterminées.

Si on veut faire usage des deux observations ensemble & employer la méthode indiquée dans l'Astronomie de Mr. *de la Lande*, on trouve les résultats suivans. Le temps vrai de la conjonction à $12^h.\ 49'.\ 15''$; l'erreur des Tables de *Mayer* en longitude, trop grande de $27''$; l'erreur des Tables de *Mayer* en latitude, trop grande de $55''$.

3°. Le 22. Octobre 1785, j'observai l'occultation de l'étoile ε des Gémaux par la partie éclairée de la Lune, très bonne, à $10^h.\ 58'.\ 49'',6$ temps vrai; & l'émersion de la partie obscure, excellente observation, à $11^h.\ 55'.\ 34'',9$ temps vrai.

3°. Opposition de Saturne en 1785.

J'ai observé cette opposition & les suivantes de la même maniere, & avec les mêmes instrumens, que celles que j'eus l'honneur de faire parvenir l'année derniere à l'Académie; j'ai eu pour Aide comme ci-devant, Mr. *Marc Pictet* qui m'a été fort utile.

Les positions des 6 étoiles auxquelles Saturne a été comparé le 24, 25 & 26 Juillet, sont tirées des Catalogues de *Bradley* & de *Mayer*. J'ai cru devoir rejetter la déclinaison déduite de l'observation de σ du Capricorne, ce résultat ne s'accordant point avec les autres; j'ai de même rejetté pour le 26 la déclinaison déduite de l'étoile voisine de π du Sagittaire.

1785. Juillet	Noms des étoiles.	Ascensions droites apparentes des étoiles.	Declinaisons app. des étoiles australes.	Ascens. droites appar. de ♄ déduites des observ.	Déclin. appar. de ♄ déduites des observat. australes.	Temps vrai des passages de Saturne au méridien, au quel sont rapportées toutes les observations.
	étoile près Φ du Sag.	278°.20'.57",0	19°.48'.45",9	304°.26'.15"	20°.12'.26"	
	1 ξ du Sagitt.	281. 9. 31,1	20. 55. 8,5	. . 15	. . 17	
	près π du Sag.	284. 17. 53,0	20. 7. 24,9	. . 14	. . 19	
24.	*d* du Sagitt.	286. 16. 52,1	19. 19. 3,4	. . 17	. . 23	
	f du Sagitt.	293. 28. 18,1	20. 15. 35,4	. . 16	. . .	
	σ du Capric.	301. 45. 39,2	19, 46. 20, 2	. . 11	rejettée 36	
			moyenne -	304°.26'.15"	20°.12'.21"	11h.59'.21"

1785. Juillet	Noms des étoiles.	Ascensions droites apparentes des étoiles.	Déclinaisons apparentes des étoiles australes.	Ascens. droites appar. de ♄ déduites des observ.	Déclin. appar. de ♄ déduites des observat. australes.	Temps vrai des passages de Saturne au méridien, au quel sont rapportées toutes les observations.
25.	près Φ du Sag.	. . . .	. . . . .	304°.21'.40"	20°.13'.37"	
	1 ξ du Sag.	. . . .	. . . . .	. . . 34	. . 36	
	près π du Sag.	. . . .	. . . . .	. . 42	. . 27	
	d du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 39	. . 28	
	f du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 40	. . .	
	σ du Capric.	. . . .	. . . . .	. . 35	rejettée 1	
			moyenne -	304°.21'.38"	20^b.13'.32"	11^h.55'. 8"
26.	près Φ du Sag.	. . . .	. . . . .	. . . . .	20°.14'.23"	
	1 ξ du Sag.	. . . .	. . . . .	304°.17'. 8"	. . 13	
	près π du Sag.	. . . .	. . . . .	. . . 5	rejettée 10	
	d du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . 3	. . 26	
	f du Sagitt.	. . . .	. . . . .	. . . 7	. . 25	
	σ du Capric.	. . . .	. . . . .	. . . 1	rejettée 36	
			moyenne -	304°.17'. 5"	20°.14'.22"	11^h.50'.54"

Résultat.

1785. Juillet	Temps moyen à Paris.	Longit. géoc. de ♄ déduite des observations.	Longit. géoc. de ♄ calculée par les Tab. de Halley.	Erreur des Tabl. en longit. géocent.	Latit. géoc. de ♄ déduit. des observ. australes.	Latit. géoc. de ♄ calculée par les Tables.	Erreur des Tab. en latit. géocent	Erreur des différentes Tables, en longitude héliocent. au temps de l'opposition.
24.	11^h.50'.59"	X^s.2°. 3'.16"	X^s.1°.48'.41"	— 14'.35"	0°.29'.39"	0°.30'. 2"	+ 23"	T. de Halley — 13'. 5".
25.	11. 46. 47	X. 1. 58. 46	X. 1. 44. 15	— 14. 31	0. 29. 50	0. 30. 7	+ 17	T. de Cassini + 7. 21
26.	11. 42. 34	X. 1. 54. 26	X. 1. 39. 49	— 14. 37	0. 29. 41	0. 30. 15	+ 34	T. de la Lande + 7. 12
			moyenne	— 14. 34		moyenne	+ 25	

Le 24. | 5. 41. 0 { Longitude vraie sur l'Ecliptique, de Saturne en opposition X^s. 2°. 3'. 58".
Latitude géocentrique australe - - - - - - - 0. 29. 36.

4°. Oppoſition de Jupiter en 1785.

Cette Planete a été comparée le 1. 4. & 5. Octobre aux étoiles β, γ, & 19e. des Poiſſons. J'ai lieu de croire que l'aſcenſion droite de γ priſe dans le Catalogue de *Mayer*, eſt d'environ 19″ trop petite, le réſultat de l'obſervation de cette étoile ſe trouvant differer des autres à peu près de cette quantite pour les trois jours d'obſervations.

1785. Oct.	Noms des étoiles.	Aſcenſions droites apparentes des étoiles.	Déclin. appar. des étoiles boréales.	Aſcenſ. droites appar. de Jupiter déduites des obſerv.	Déclin. appar. de Jupiter déduites des obſervat. boréal.	Temps vrai des paſſages de Jupiter au méridien, auquel ſont rapportées toutes les obſervations.
1.	γ. des Poiſſons	346°.31′.16″,2	2°. 7′. 9″,4	9°.29′.41″ rejetté	2°.18′.27″	
	19e des Poiſſons	353. 52. 25, 8	2. 18. 11, 6	9. 30. 4	2. 18. 30	
			moyenne	9. 30. 4	2. 18. 28	12h. 4′.21″
4.	β. des Poiſſons	343. 15. 13, 0	. . .	9. 7. 42	2. 8. 58	
	γ. des Poiſſons	346. 31. 15, 7	. . .	rejet. 26	2. 9. 0	
	19e des Poiſſons	353, 52. 25, 7	. . .	. . 48	2. 9. 3	
			moyenne	9. 7. 45	2. 9. 0	11h.51′.59″
5.	β. des Poiſſons	343. 15. 12, 9	. . .	9. 0. 17	2. 5. 44	
	γ. des Poiſſons	346. 31. 15, 6	. . .	rejet. 0	. . 56	
	19e des Poiſſons	353. 52. 25, 5	. . .	. . 21	. . 52	
			moyenne	9. 0. 19	2. 5. 51	11h.47′.51″

Réſultat.

1785. Oct	Temps moyen à Paris.	Longit. géoc. de Jupiter déduite des obſervat.	Longit. géoc. de Jupiter calculée par les T. de Halley.	Erreur des T. en long. géoc.	Latit. géoc. de Jupiter déduite des obſ. auſtr.	Latit. géoc. de Jupiter calc. par les Tables.	Erreur des Tables en lat. géo.	Erreur des longitudes héliocent. des différentes Tables, au moment de l'oppoſition.
1.	11h.39′.17″	0s.9°.38′.11″	0s.9°.37′.53″	− 18″	1°.38′.46″	1°.39′.10″	+ 24″	T. de Halley — 13″
4.	11. 26. 1	0. 9. 13. 57	0. 9. 13. 41	− 16	1. 38. 42	1. 39. 8	+ 26	T. de Caſſini — 5′.11
5.	11. 21. 36	0. 9. 5. 53	0. 9. 5. 39	− 14	1. 38. 41	1. 39. 7	+ 26	T. de la Lande + 4′. 37
			moyenne	− 16		moyenne	+ 25	

Le 1r. 22h. 7′. 0″ { Longitude vraie ſur l'Ecliptique de Jupiter en oppoſition 0s. 9°. 34′. 52″.
Latitude géocentrique auſtrale . . . . 1. 38. 45.

5°.

5°. Oppofition d'Uranus en 1786.

Le mauvais temps ne m'a permis d'obferver cette Planete près de fon oppofition, que deux fois, le 8 & le 14 Janvier, elle a été comparée à dix etoiles toutes fituées très près de fon parallele.

1786. Janv.	Noms des étoiles.	Ascenfions droites appar. des étoiles.	Déclinaif. appar. des étoiles boréales.	Ascenf. droites appar. d'Uranus déduites des obfervat.	Déclin. appar. d'Uranus déduites des obfervat. boréal.	Temps vrai des paffages d'Uranus au méridien, auquel on rapporte toutes les obfervat.
	λ. du Bélier	26°.31'. 3",5	22°.32'.54",2	110°.35'.35"	22°.30'. 0"	
	α. du Bélier	28. 47. 23, 5	22. 26. 50, 9	rejett. 18	. . 19	
	ν. du Taureau	63. 23. 19, 6	22. 19. 1, 0	rejett. 20	. . 15	
	τ. du Taureau	67. 21. 54, 1	22. 32. 1, 8	. . 29	. . 15	
	H. des Gém.	87. 47. 22. 6	23. 15. 37, 0	. . 34	. . 19	
8.	η. des Gém.	90. 30. 5, 5	22. 33. 11, 5	. . 36	. . 23	
	μ. des Gém.	92. 30. 45, 7	22. 36. 31, 7	. . 30	. . 21	
	d. des Gém.	99. 41. 22. 8	21. 59. 52. 9	. . 37	. . 7	
	ω. des Gém.	103. 6. 50, 9	22. 56. 34, 4	. . 33	. . 14	
	δ. des Gém.	106.50. 37, 9	22. 21. 38, 0	rejett. 43	. . 9	
			moyenne	110. 35. 33	22. 36. 15	12ʰ. 0'. 8"
	λ. du Bélier	26°.31'. 2",1	. . . . .	110. 19. 2	22. 38. 25	
	α. du Bélier	28. 47. 22, 1	. . . . .	rej. 18. 46	. . 20	
	ν. du Taureau	63. 23. 18, 5	. . . . .	. . 51	. . 29	
	τ. du Taureau	67. 21. 53, 5	. . . . .	. . 59	. . 31	
14.	H. des Gém.	87. 47. 22. 6	. . . . .	. . 55	. . 28	
	η. des Gém.	90. 30. 5, 7	. . . . .	. . 58	. . 29	
	μ. des Gém.	92. 30. 45, 9	. . . . .	. . 54	. . 28	
	δ. des Gém.	106.50. 38, 5	. . . . .	. . 58	. . 25	
			moyenne	110°.18'.55"	22.38'.27"	11ʰ.33'.10"

Ré-

Résultat.

1785. Janv.	Temps moyen à Paris.	Longitude géoc. d'Uranus tirée de l'obfervat.	Longitude géoc. d'Uranus calc. par les Tabl. des Conn.des T.1787	Erreur des T. en long. géoc.	Latit. géoc. d'Uranus tirée de l'obfervat.	Latit. géoc. d'Uranus calcul. par les Tables.	Erreur des T. en latit. géocent	Lieu du Soleil calculé par les Tables de Mayer.
8.	11^h.53′ 18″	III^s.18°.56′.54″	III^s.18°.57′.11″	+ 17″	0°. 29′. 1″	0°.28′.48″	— 13″	IX^s.18°.59′.15″,3
14.	11. 28. 38	III. 18. 41. 25	III. 18. 41. 36	+ 11	0. 29. 4	0. 28. 47	— 17	IX. 25. 4. 46, 5
			moyenne	+ 15		moyenne	— 14	

Le 8. | 10^h.50′. 0″ { Longitude vraie fur l'écliptique d'Uranus en oppofition III^s. 18°. 56′. 34″
Latitude géocentrique boréale . . . . 0. 29. 2.

SPE-

SPECIMEN
TABVLAE VSVI NAVTICO ACCOMMODATAE PRO INVENIENDA VERA
LVNAE A STELLA
VEL SOLE DISTANTIA
EX OBSERVATA VTRIVSQVE ALTITVDINE ET DISTANTIA APPARENTE.

Auctore
W. L. KRAFFT.

In nouiſſima editione Tabularum, (*) quas pro Calendarii nautici vſu edidit Collegium Londinenſe rei longitudinariae praefectum, Cel. *Maskelyne* regulam tradidit et perelegantem et rigori geometrico perfecte conformem, ex obſeruatis Lunae et Stellae Solisue altitudinibus earumque diſtantia apparente inueniendi veram earundem diſtantiam, a parallaxis et refractionis effectibus liberam, cuius cum demonſtrationem mihi quaererem, accidit, vt inſuper alia ſe mihi offerret regula, quae *Maskelynianae* analoga, id commodi habere videbatur, vt non ipſum modo calculum ad operationes reduceret paulo pauciores, ſed etiam tabulam ſuppeditaret et conſtructionis et applicationis facillimae, qua mediante calculus omnis ſolis Logarithmis abſolui-

(*) Tables requiſite to by uſed with the nautical ephemeris, the II. Edit. 1781.

ſolvitur, absque eo, vt continuam eorundem tractationem vel numeri vllius abſoluti vel anguli cuiusdam ſubſidiarii euolutione interrumpere opus ſit. Neque tamen, cum ſolutio huius problematis primaria ex ipſis Trigonometriae Sphaericae regulis immediate obuia, facili transformatione adhibita, omnium ſimpliciſſima iure videatur, regulae, quam reperi, exponendae hic immorarer, niſi ex methodorum pro ſoluendo hoc problemate a pluribus Geometris datarum numero et varietate, tabularumque hunc in finem conſtructarum multiplici labore iure concludi poſſe videretur, quicquid ad hunc calculum aſtronomis nauticis facilitandum aliquid conferre poſſit, attentione indignum cenſeri nihil. Praemiſſa igitur regulae *Maskelynianae* demonſtratione, qualem mihi concinnaui, aliam analogam, de qua dixi, tabulaeque huic ſuperſtructae ſpecimen aliquod et vſum exponam.

Si fuerit

altitudo appar. centri ☾ $= h$; vera $= H$
altit. app. centri ☉ vel ſtellae $= h'$; vera $= H'$
diſtantia centr. appar. $= d$; vera $= d'$.
et angulus inter verticales Lunae
et ſideris ad Zenith interceptus $= Z$;

conſtat ex principiis Trigonometriae ſphaericae, eſſe

$$\text{coſ.}\, Z = \frac{\text{coſ.}\, d - \text{ſin.}\, h \,.\, \text{ſin.}\, h'}{\text{coſ.}\, h \,.\, \text{coſ.}\, h'} \text{ et}$$

$$\text{coſ.}\, d' = \text{ſin.}\, H \,.\, \text{ſin.}\, H' + \text{coſ.}\, H \,.\, \text{coſ.}\, H' \,.\, \text{coſ.}\, Z,$$

quae poſterior aequatio ob $\text{coſ.}\, Z = 1 - 2 \,.\, \overline{\text{ſin.}\, \tfrac{1}{2} Z}^2$, vel $\text{coſ.}\, Z = 2 \,.\, \overline{\text{coſ.}\, \tfrac{1}{2} Z}^2 - 1$, poſitoque $H + H' = \eta$ et $H - H' = \theta$

praebet

praebet

$$\text{cof.}\, d' = \text{cof.}\, \theta - 2 \,.\, \text{fin.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 \,.\, \text{cof. H} \,.\, \text{cof. H}',$$

vel etiam

$$\text{cof.}\, d' = 2 \,.\, \text{cof.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 \,.\, \text{cof. H} \,.\, \text{cof. H}' - \text{cof.}\, \eta.$$

Ex priori vero aequatione, posito $b + b' = T$ et $b - b' = t$ colligitur:

$$\text{fin.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 = \frac{\text{fin.}\, \frac{d+t}{2} \,.\, \text{fin.}\, \frac{d-t}{2}}{\text{cof.}\, b \,.\, \text{cof.}\, b'} \text{ et}$$

$$\text{cof.}\, \overline{\tfrac{1}{2} Z}^2 = \frac{\text{cof.}\, \frac{d+T}{2} \,.\, \text{cof.}\, \frac{d-T}{2}}{\text{cof.}\, b \;\text{cof.}\, b'}$$

ita, vt posito

$$\text{fin.}\, \tfrac{d+t}{2} \,.\, \text{fin.}\, \tfrac{d-t}{2} = k,$$

$$\text{cof.}\, \tfrac{d+T}{2} \,.\, \text{cof.}\, \tfrac{d-T}{2} = \lambda, \text{ et}$$

$$\frac{\text{cof. H} \,.\, \text{cof. H}'}{\text{cof.}\, b \;\text{cof.}\, b'} = \mu,$$

habeatur

$$\text{cof.}\, d' = \text{cof.}\, \theta - 2\, k\, \mu$$

vel etiam

$$\text{cof.}\, d' = 2\, \lambda\, \mu - \text{cof.}\, \eta.$$

Binarum harum formularum, quae, calculi operationes quod attinet, ad idem redeunt, prior tamen posteriori antecellit, cum ob angulum θ 90 gradibus semper minorem et quantitatem k semper positiuam nulla distinctionis casuum necessitate impediatur, quae ob angulum η 90 gradibus modo maiorem modo minorem, et quantitatem λ modo positiuam modo negatiuam multiplex est in posteriori formula; quam sine dubio ob caussam formula

$$\text{cof.}\, d' = \text{cof.}\, \theta - 2\, k\, \mu,$$

 a Cel.

a Cel. *Dunthorne* in vſum nauticum fuit introducta et tabulis ſubſidiariis valores μ pro ſingulis Lunae altitudinibus apparentibus variaque eius parallaxi horizontali exhibentibus munita. Atque ob hanc ipſum rationem, quod quantitas $k\mu$ ſemper ſit poſitiua, nec vnitatem vnquam excedere poſſit, haec formula aliam transformationem admittit; poſito enim $k\mu = (\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \Phi)^2$ erit $2k\mu = 1 - \text{cof.} \Phi$; et $1 + \text{cof.}\, d' = \text{cof.}\, \vartheta + \text{cof.}\, \Phi$; ex quo colligitur:

$$(\text{cof.} \tfrac{1}{2} d')^2 = \text{cof.} \frac{\vartheta + \Phi}{2} \,.\, \text{cof.} \frac{\vartheta - \Phi}{2},$$

quae eſt ipſa illa regula exacte vera et perquam concinna, quam Cel. *Maskelyne* loco citato dedit atque ideo *Dunthornianae* antetulit, quod haec ipſius coſinus naturalis numeros abſolutos implicet, quos calculatoribus nauticis haud parum impedimenti faceſſere aſſerit, illa vero meris Logarithmis abſoluatur nec niſi vnius anguli ſubſidiarii euolutionem poſtulet.

Quodſi iam ſimili ratiocinio perpendamus, non ſolum valorem $k\mu$, ſed etiam valorem $\frac{k\mu}{\text{cof.}\,\vartheta}$ eſſe ſemper poſitiuum nec vnitatem vnquam excedere poſſe: ponere licebit $\frac{k\mu}{\text{cof.}\,\vartheta} = (\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \psi)^2$, vnde ob $2k\mu = 2 (\text{ſin.} \tfrac{1}{2} \psi)^2 \,.\, \text{cof.}\, \vartheta$ colligitur expreſſio ſimpliciſſima

$$\text{cof.}\, d'' = \text{cof.}\, \vartheta \,.\, \text{cof.}\, \psi.$$

Quae formula, a diſtinctione caſuum aeque libera, calculi operationibus paulo paucioribus abſoluitur, et cum non, vti regula *Maskelyniana*, ſummam et differentiam anguli ϑ et ſubſidiarii ψ, ſed ſimplicem angulum ſubſidiarium ψ inuoluat, facili opera ad tabulam reuocari poteſt adplicationis aeque facilis.

Quodſi

Quodsi igitur hoc qualecunque compendium ad nauticum vsum forte quid facere posse videatur; breuiter hic exposuisse iuuabit eas tabulae huic formulae superstructae particulas, quae exemplis in libro citato exhibitis computandis inseruiunt.

Argumentum.	Logar. corresp.	Interpolatio.
9, 2554100	9, 8061027	0, 5631. a
9, 2556794	9, 8059510	
⋮	⋮	
9, 6801284	8, 6279484	22, 6679. a
9, 6802600	8, 6249653	
⋮	⋮	
9, 7019914	7, 8439338 —	141, 3756. a
9, 7021168	7, 8616623 —	

vbi a denotat differentiam inter argumenta tabulae et exempli.

Exempl. I.

Obseruata sit altitudo apparens centri Lunae 12°. 30' $= h$, et stellae 24°. 48' $= h'$ cum distantia vtriusque apparente 51°. 28'. 35'' $= d$, existente parallaxi Lunae horizontali 56'. 15''. pro quo exemplo inuenitur distantia vera

ex formula *Maskelyniana* $d' = 51°.\ 9'.\ 50''$
ex ipsis principiis trigonometr. $d' = 51.\ 9.\ 54$

Secundum regulam hic traditam calculus continua Logarithmorum additione sequenti modo absoluitur: Anguli ad calculum necessarii sunt sequentes:

 $d =$

$d = 51°. 28'. 35''$	$h = 12°. 30'$	$H = 13°. 20'. 42''$
$t = 12. \ 18$	$h = 24. \ 48$	$H' = 24. \ 45. \ 57$
$\frac{d+t}{2} = 31. \ 53. \ 17$		$H - H' = 11. \ 25. \ 15$
$\frac{d-t}{2} = 19. \ 35. \ 17$		

quibus angulis inuentis capiantur et addantur ſequentes Logarithmi:

$$
\begin{array}{rl}
\text{L. ſin. } \frac{d+t}{2} & = 9,7228522 \\
\text{L. ſin. } \frac{d-t}{2} & = 9,5253813 \\
\text{L. ſec. } h & = 0,0104185 \\
\text{L. ſec. } h' & = 0,0420206 \\
\text{L. coſ. H} & = 9,9881209 \\
\text{L. coſ. H}' & = 9,9580990 \\
\text{L. ſec. (H} - \text{H}') & = 0,0086856 \\
\hline
\text{Argum.} & = 9,2555781 \\
\text{Arg tabulae proximum} & = 9,2554100 \\
\hline
\text{dat diff. } a & = 0,0001681. \\
\text{et Log. correſp. tab.} & = 9,8061027 \\
\text{adde Log. coſ. (H} - \text{H}') & = 9,9913144 \\
\hline
 & 9,7974171 \\
\text{Subtrahe part. Interpolat} & 946 \\
\hline
\text{erit Log. coſ. } d' & = 9,7973225 \\
\text{et } d' & = 51°. \ 9'. \ 53''.
\end{array}
$$

Exempl. 2.

Obſeruata ſit altitudo apparens centri Lunae $5°. 17' = h$, et Solis $= 84°. 7' = h'$ cum diſtantia vtriusque apparente 90°.

90°. 21'. 13'' = d, existente parallaxi Lunae horizontali 1°. 1'. 48'' pro quo exemplo inuenitur distantia vera

ex formula *Maskelyniana*	89°. 29'. 20''
ex ipsis principiis trigonom.	89. 29. 36

Anguli ad calculum necessarii sunt sequentes:

d = 90°. 21'. 13''	h = 5°. 17'	H = 6°. 9'. 4''
t = 78. 50	h = 84. 7	H' = 84. 6. 54
$\frac{d+t}{2}$ = 84. 55. 36		H − H' = 77. 57. 50
$\frac{d-t}{2}$ = 5. 45. 36		

L. sin. $\frac{d+t}{2}$ = 9, 9982952
L. sin. $\frac{d-t}{2}$ = 9, 0015676.
L. sec. h = 0, 0018490
L. sec. h' = 0, 9892626.
L. cos. H = 9, 9974926
L. cos. H' = 9, 0108598
L. sec.(H−H') = 0, 6808354

Argumentum. = 9, 6801622
Arg. tabulae proximum = 9, 6801284

dat differ. a = 0, 0000338
et Log. correspond. tab. = 8, 6279484
adde Log. cos. (H − H') = 9, 3191646

7, 9471130
Subtr. part. Interpol. 7661

erit Log. cos. d' = 7, 9463469
et d' = 89°. 29'. 36''.

Exempl. 3.

Obſeruata ſit altitudo apparens centri Lunae 88°. 46′ = h, et ſtellae = 5°. 6′ = h' cum diſtantia vtriusque apparente 89°. 58′. 6″ = d; exiſtente paraliaxi Lunae horizontali = 1°. 1′. 18″. pro quo caſu inuenitur diſtantia vera

ex formula *Maskyl.* $d' = 90°.\ 2'.\ 26''$

ex ipſis princ. trigon. $d' = 90.\ 2.\ 38.$

Anguli ad calculum neceſſarii ſunt ſequentes:

$d = 89°.\ 58'.\ 6''$	$h = 88°.\ 46'$	$H = 88°.\ 47'.\ 17''$
$t = 83.\ 40.\ 0$	$h' = 5.\ 6$	$H' = 4.\ 56.\ 16$
$\frac{d+t}{2} = 86.\ 49.\ 3$		$H - H' = 83.\ 51.\ 1$
$\frac{d-t}{2} = 3.\ 9.\ 3$		

$$
\begin{aligned}
\text{L. ſin. } \tfrac{d+t}{2} &= 9,9993296 \\
\text{L. ſin. } \tfrac{d-t}{2} &= 8,7400836 \\
\text{L. ſec. } h &= 1,6670757 \\
\text{L. ſec. } h' &= 0,0017228 \\
\text{L. coſ. } H &= 8,3253217 \\
\text{L. coſ. } H' &= 9,9983852 \\
\text{L. ſec.}(H-H') &= 0,9701014 \\
\hline
\text{Argumentum} &= 9,7020200 \\
\text{Arg. tabulae proximum} &= 9.7019914 \\
\hline
\text{dat differ. } a &= 286 \\
\text{et Logar. correſp. tab.} &= 7,8439338 - \\
\text{adde Log. coſ.}(H-H') &= 9,0298986 \\
\text{adde part. Interpot.} &= 40432 \\
\hline
\text{erit Log. coſ. } d' &= 6,8778756 -
\end{aligned}
$$

angul.

angul. respond. $= 89°. 57'. 22''$
complem. ad $180° = d' = 90. \; 2. \; 38$

quae exempla tabulae memoratae indolem et vsum satis superque demonstrant, cuius ceteroquin vel necessitatem vel vtilitatem astronomorum nauticorum iudicio relinquo.

Tandem et id addere lubet, methodo, quam protulit Illustr. *de Borda*, similem transformationem applicari posse, cuius ope ea aeque fere, ac superior, construendis tabulis apta reddatur. Illa vero methodus immediate ex superiori hoc modo derinatur: cum sit

$\text{cos.}\, d' = \text{cos.}\, \vartheta - 2 k \mu$; habebitur

$1 + \text{cos.}\, d' = 2 . \text{cos.}\, \tfrac{1}{2} \vartheta^2 - 2 k \mu$, siue

$(\text{cos.}\, \tfrac{1}{2} d')^2 = \text{cos.}\, \tfrac{1}{2} \vartheta^2 - k \mu$.

Si igitur capiatur angulus A talis, vt sit $\text{sin.}\, A^2 = \frac{k \mu}{\text{cos.}\, \frac{1}{2} \vartheta^2}$, erit $\text{cos.}\, \tfrac{1}{2} d' = \text{cos.}\, A . \text{cos.}\, \tfrac{1}{2} \vartheta$, vnde etiam facili labore tabula construi poterit, cuius argumentum sit $l \frac{k \mu}{\text{cos.}\, \frac{1}{2} \vartheta^2}$, et quae exhibeat Log. cos. A, ad quem addito log. cos. $\tfrac{1}{2} \vartheta$ habebitur Log. cos. $\tfrac{1}{2} d'$; in qua tamen cum dimidium reperiatur anguli quaesiti, et error, ex vsu praesertim tabulae cuiusdam subsidiariae, veluti pro valoribus μ, metuendus in ipsa distantia tota duplicetur; prior formula supra data $\text{cos.}\, d' = \text{cos.}\, \vartheta . \text{cos.}\, \psi$ huic hoc respectu antecellere videtur.

EPI-

EPITOME
OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXXII. SECVNDVM CALENDARIVM GREGORIANVM INSTITVTARVM.

Auctore

IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1782.

Menſe	Altitudo maxima Dig. p. c.	die hora	Altitudo minima Dig. p. c.	die hora	Variatio p. c.	Medium Dig. p. c.	Alt. med. Dig. p. c.
Ianuar.	28. 52	14. IX. p. m.	27. 04	3 VIII. p.m.	1 48.	27. 78	27. 76
Februar.	28 58	15. meridie.	27. 33	27 VIII. a. m.	1. 25.	27 95	28. 16
Mart.	28. 57	28. IX. p. m.	27. 11	6. meridie.	1. 46.	27. 84	27. 88
April.	28. 69	7. X. a. m.	27. 75	17. VI. p. m.	0. 94.	28. 22	28. 16
Maii	28. 32	24 med. noct.	27. 70	21. VIII. p.m. 22. VII. a. m.	0. 62.	28. 01	28. 02
Iunii	28. 24	15 21 } III. a. m.	27. 66	16. med. noct.	0. 58.	27. 95	28. 01
Iulii	28. 28	1[illegible]. meridie.	27. 44	4. IV. a. m.	0. 84.	27. 86	27. 96
Auguſti	28. 14	8. IX p. m.	27. 40	29. II. p. m.	0. 74.	27. 77	27. 89
Sept.	28. [illegible]1	6. X. a. m.	27. 57	20. VI. a. m.	0. 94.	28. 04	28. 12
Octobr.	28. 3[illegible]	26. IX. p. m.	27. 31	[illegible]0. III. a. m.	1. 01.	27. 81	27. 90
Nouembr.	28 77	30. p. m.	27. 38	16. IX p. m.	1. 39.	28 07	28. 23
Decembr.	28. [illegible]1	2 med. noct.	27 10	28. VI. a. m.	1. 71.	27. 95	28. 20
Anno 1782.	28. 81	Menſe Decembris.	27. 04	Menſe Ianuarii	1. 77.	27. 92	28. 04

2. Nu-

2. Numerus dierum, quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28 poll.

Menſe	ſupra 28. 20 Dies, hor.	28. 10 Dies, hor.	28. 00 Dies, hor.	27. 90 Dies, hor.	27. 80 Dies, hor.	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	1. 9	3. 21	6. 0	9. 21	15. 0	27. 78
Febr.	13. 0	18. 18	21. 3	22. 21	24. 15	28. 19
Mart.	5. 0	7. 3	10. 9	13. 9	18. 0	27. 86
April.	11. 18	17. 0	22. 18	26. 9	29. 9	28. 12
Maii	5. 9	10. 9	19. 12	24. 9	29. 9	28. 06
Iunii	1. 18	10. 3	17. 6	22. 15	28. 18	28. 03
Iulii	1. 18	7. 15	16. 9	20. 15	25. 18	28. 02
Aug.	0. 0	2. 18	9. 21	15. 18	22. 21	27. 92
Sept.	9. 18	17. 9	21. 3	24. 21	27. 12	28. 12
Oct.	1 21	6. 9	13. 9	17. 15	20. 18	27. 94
Nou.	17. 9	18. 21	21. 15	23. 18	26. 0	28. 29
Dec.	18. 9	18 15.	19. 6	12. 0	21. 21	28. 53
Anno 1782.	87. 9	138. 21	199. 15	243 3	288. 21	28. 03

Monendum eſt, duas priores figuras altitudinum barometricarum pollices deſignare integros, quorum duodecim pedem pariſinum regium conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius digiti; tum *a. m.* ſignificare horam antemeridianam et *p. m.* poſtmeridianam.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo Barometri maxima 28. 81, menſe Decembr. die 2da media nocte. Therm. 172, coelum obductum, Auſter.

2. Altitudo Barometri minima 27. 04, menſe Ianuarii die 3^{a} hora veſpertina 8va. Therm. 160, coelum obductum, nix copioſa, Auſter.

3. Va-

3. Variatio maxima 1, 77 vel 1 $\frac{77}{100}$ poll.
4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 27, 92.
5. Altitudo media inter omnes obseruatas 28, 04.
6. Mercurius in tubo barometrico commorabatur supra

28. 20,	per dies 87$\frac{1}{8}$
28. 10,	per dies 138$\frac{7}{8}$
28. 00,	per dies 199$\frac{5}{8}$
27. 90,	per dies 243$\frac{1}{8}$
27. 80,	per dies 288$\frac{7}{8}$

vnde concludere licet, mercurium per interuallum dimidii anni, vel 182$\frac{1}{2}$ dierum se in tubo Barometri sustentasse supra altitudinem 28, 03, quae parum ab altitudine media pro hoc anno inuenta differt.

Ascensus et Descensus Mercurii in tubo Barometri notabiliores.

NB. Signa + et −, quae differentias altitudinum barometricarum praecedunt, ascensius vel descensus mercurii indicant.

Mense.	Tempore. die. hora.	Diff. hor.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmosphaera.
Ianuar.	1. med. noct.	24	28,00	− 28	W fort.	167	coel. nubil.
	2. med. noct.	20	27,72	− 68	S fort.	167	coel. obd. nix copiosa
	3. 8. p. m.	24	27,04	+ 65		159	nix.
	4. 8. p. m.		27,69		NO	185	coel. seren.
	6. 8. a. m.	19	27,53	+ 38	N fort.	203	coel. nebul.
	7. 3. a. m.		27,91		W fort.	179	coel. seren.
	7. 8. p. m.	16	27,78	− 46	W fort.	163	coel. obduct.
	8. meridie		27,32		SW f. f.	162	nix copiosa coel. obd.

Menfe.	Tempore. die. hora.	Diff. hor.	Barom. Dig.p c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom	Atmosphaera.
Ianuar.	8.med.noct.	21	27,27	+44	SWfort.	163	coel. nubil.
	9. 9. p. m.		27,71		SW	158	coel. feren.
	10. med.noct.	20	27,60	+76	S f. f.	149	pluuia, coel. obd.
	11. 8. p. m.	40	28,36	−50	N	166	coel. feren.
	13. meridie	33	27,86	+66	W	150	coel. obductum.
	14. 9. p. m.	39	28,52	−50	W	158	coelum obductum.
	16. meridie		28,02		S	163	coel. obd.
	22. 8. a. m.	16	27,61	+28	S fort.	149	coel obd. nix et pluuia.
	22. med.noct.	20	27,89	+48	S	154	coel. obduct.
	23. 8. p. m.		27,41		S fort.	151	nix, coel. obduct.
	24. 10. a. m.	14	27,62	−45	W	160	coel nubil.
	24. med.noct.	15	27,17	+38	W fort	151	nix cop., coel. obd.
	25. 3. p. m.		27,55		NW	152	coel. obd.
Febr.	9. 3. p. m.	23	28,32	−44	W	168	nix, coel. obd.
	10. 2. p. m.		27,88		W	165	coel. obd.
	16. meridie		28,53		malacia.	195	nebula, coel. feren.
	– med. noct.	24	28,40	−65	malacia.	197	coel. feren.
	17. med.noct.		27,75		W	165	nix cop., coel. obduct.
	18. meridie	36	27,62	+72	NW	159	nix, deinde coel. feren.
	19. med.noct.	33	28,34	−61	N	190	coel. feren.
	21. 9. a. m.	37	27,37	+63	O	168	nix, coel. obd. deinde fer.
	22. 10. p. m		28,36		SO	174	coel obd.
	27. 8. a. m.	28	27,33	+89	N	150	nix, coel. obd.
	28. meridie		28,22		O	161	coel. obd.
		18		−49			

Mense.	Tempore. die. hora.	Diff. horae	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmosphaera
	1. 6. a. m.	18	27,73	−49	S fort.	150	coel. obduct.
Martii	5. 2. p. m.	16	27,78	−66	SW	150	nix, coel. obd.
	6. 6. a. m.		27,12		S. fort.	148	nix, coel. obd.
	24.med.noct.	22	27,23	+67	O fort.	155	nix, coel. obd.
	25. 10. p. m.		27,90		O fort.	164	coel. nubil. deinde nix.
	26. 9. a. m.	30	27,83	+65	NW	165	nix coel. obd.
	27. 9. p. m.		28,48		NW	158	coel. feren.
	28. 6. p. m.		28,57		SW	151	coel. feren.
April.	17.med.noct.	36	27,76	+46	N fort.	150	coel. nubil.
	19. meridie.		28,22		N	148	coel. feren.
Maii	13.med.noct.		27,95		SO fort.	133	coel. obd. pluuia.
	14. 4. a. m.	4	27,74	−21	— f. f.	135	— —
	15. 9. p. m.	41	28,30	+56	malacia	141	coel. feren.
	22. 7. a. m.	29	27,70	+43	W	139	pluuia, coel. obd.
	23 meridie		28,13		W	130	coel. nubil.
Iunii	15. 6. a. m	18	28,24	−14	W	128	coel. obd.
	— med. noct.	24	28,10	−44	W fort.	127	— — pluuia.
	16.med.noct.	15	27,66	+48	— —	135	— — pluuia.
	17. 3. p. m.	18	28,14	−39	NW	135	— — pluuia.
	18. 9. a. m.	21	27,75	+41	N fort.	138	— — pluuia copiosa.
	19. 6. a. m.		28,16		W fort.	137	coel. feren.
Iulii	3. meridie	16	27,90	−47	variabil.	122	coel. nubil.
	4. 4. a. m.	20	27,43	+47	SO	127	pluuia.
	4.med. noct.		27,90		W f. f.	131	coel. nubil.
	15. meridie	21	28,04	−41	W	121	coel. obd. pluuia.
	16. 9. a. m.		27,63		W	124	— — —

Mense

Menſe.	Tempore. die hora.	Diff. horar.	Barom. Dig.p.c.	Differ. p. c.	Ventus	Thermom.	Atmoſphaera.
Aug.	21. 6. a. m.	54	27,56	+ 57	W	133	coel. obd. pluuia copioſa.
	23. meridie		28,13		variab.	126	coel. nubil.
	29. 3. p. m.	45	27,40	+ 65	W f. f.	129	pluuia copioſa, coel. obd.
	31. meridie		28,05		malacia	127	pluu. cop. coel. nubil. nix.
Octob.	13. 6. p. m.	30	27,39	+ 63	O fort.	146	pluuia copioſa, coel. obd.
	14. med. noct.		28,02		NW	151	coel. ſeren.
	16. 6. p. m.	24	28,22	− 47	W	150	coel. nubil.
	18. med. noct.		27,77		S. f. f.	146	coel. obd.
	19. med. noct.		27,30		— —	143	nix et pluuia.
Nov.	3. med. noct.	24	27,53	+ 53	W fort.	142	pluu. cop. grando, fulgur.
	4. med. noct.		28,06		S	152	coel. ſeren.
	12. 10. p. m.	20	28,60	− 60	NW	155	coel. obd.
	14. med. noct.		28,35		S fort.	153	coel. obd. deinde nix.
	15. 8. p. m.		27,75		S	152	coel. ſeren.
	16. 10. p. m.		27,38		O	156	coel. nubil.
Dec.	18. 10. p. m.	29	28,52	− 60	S	168	coel. ſeren. deinde obd.
	20. 3. a. m.		27,92		SWfort.	159	nix
	20. 3. p. m.	36	28,00	− 70	SW	152	coel. obd. dein. nix cop.
	22. 3. a. m.		27,30		malacia	155	coel. obduct.
	26. 2. a. m.	30	28,03	− 70	NW	184	coel. ſer., deinde nebuloſ.
	26. med. noct.		27,80		S	180	coel. ſer. dein. obd. nix. cop.
	28. 6. a. m.		27,10		N f. f.	155	coel. obd.

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae, maximae et mediae pro singulis mensibus anni 1781.

Mense	Altitudo minima. Gr.	Die	hora	Altitudo maxima. Gr.	Die	hora	Diff. Gr.	Altit. media. nocte	merid.
								Grad.	Grad.
Ianuar.	203	6.	VII. a. m.	147	10. 26.	II. p. m.	56	165,6	157,8
Febr.	206	16.	VII. a. m.	146	26.	II. p. m.	60	178,0	168,0
Martii	183	16.	VII. a. m.	139	31.	II. p. m	44	165.5	156,0
Aprilis	164	24.	VII. a. m.	135	2. 3.	II. p. m	29	154,4	145,0
Maii	155	3.	VII. a. m.	116	19.	II. p. m.	39	143,0	133,3
Iunii.	141	18.	VII. a. m.	113	10.	II. p. m.	28	133,6	124,2
Iulii	138	23. 23. 24. 25.	VI. a. m X. p. m VI. a m VI. a. m.	109	12.	II. p. m.	29	131,3	124,1
Augusti	137	25.	VI. a. m.	115	9.	II. p. m.	22	131,0	123,0
Septem.	147	14.	VI. a. m.	125	20.	II. p. m.	22	139,3	131,4
Octobr.	153	14. 16.	VI. a. m. IX. p. m.	124	5.	II. p. m.	29	146,4	139,5
Nouem.	176	27.	VII. a. m.	136	3.	II. p. m.	40	157,6	152,8
Decem.	187	11. 30.	VIII. a. m. VIII. a. m	152	20. 21.	II. p. m.	35	175,0	169,1
Anno 1782.	206	Mense Februarii		109	Mense Iulii.		97	151,6	143,5

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menfe.	Dies frigidiores Gradib. 200	190	180	170	160	150	Dies calidiores Gradib. 110	120	130	140	150.
Ianuar.	2	2	4	6	21	30					7.
Februar.	3	8	12	19	24	28					4.
Mart.			1	11	22	29				1	10.
April.					6	22				4	24.
Maii						8		3	11	23	31.
Ianii						0		8	25	30	30.
Iulii						0	1	4	28	31	31.
Augufl.						0		11	30	31	31.
Septembr.						0			14	27	30.
Octobr.						6			3	12	31.
Nouembr.				4	9	26				2	8.
Decembr.			11	25	27	31					0.
Anno 1782.	5	10	28	65	109	180	1	26	111	161	237.

3. In fpecie frigoris intenfitas obferuata fuit intra gradus.

	Dies
200 et 210. die 5. 6 Ian. die 13. 15 et 16 Febr. -	5.
190 et 200. die 11. 12. 14. 17 et 20 Februarii -	5.
180 et 190. die 1. 4 Ian., die 7. 8. 19. 22 Febr., die 16 Martii; die 8 — 15. 25. 26 et 30 Dec. -	18.
170 et 180. die 7. 19 Ian., die 2. 3. 5. 6. 9. 21. 23 Febr. die 9. 10. 12. 13. 15. 17 — 20. 27 Martii, die 26 — 29 Nouembr., die 1 — 7. 16 — 18. 24. 27. 29 et 31 Decembris - - -	37.

	Dies.
160 et 170. die 2. 3. 8. 9. 11. 12. 14. — 18. 20. 24. 27. 28. Ian., die 1. 4. 10. 18. 28 Febr., die 8. 11. 14 .21 — 26. 28. 30 Martii, die 23 — 25. 28 — 30 Apr., die 19 — 21. 25. 30 Nou., die 19 et 23 Dec. - - - -	44.

Calor autem deprehensus fuit intra gradus.

	Dies.
110 et 100. die 12 Iulii - - - -	1.
120 et 110. die 17. 19. 21 Maii, die 2. 6. 8 — 12. 14. Iunii, die 10. 11. 14 Iulii, die 2 — 6. 9. 11. 12. 14. 15 et 19 Augusti - - -	25.
130 et 120. die 12. 13. 16. 18. 20. 23. 25. 31 Maii, die 1. 3. 5. 7. 13. 15. 16. 20 — 26. 28 — 30 Iunii, die 1 — 9. 13. 15 — 22. 26 — 31 Iulii, die 1. 7. 8. 10. 13. 16 — 18. 20. 22 — 31 Aug. die 3. 4. 6 — 11. 18. 20. 24. 26 — 28 Sept., die 1. 4 et 5 Octobris - - -	85.
140 et 130. die 1 Martii, die 2 — 5 Apr., die 9. 10. 11. 14. 15. 22. 24. 26 — 30 Maii, die 4. 17 — 19. 27 Iunii, die 23. 25 Iulii, die 21 Aug., die 1. 2. 5. 12. 15. 17. 19. 21 — 23. 25. 29. 30 Sept. die 2. 3. 6. 7. 17. 18. 20. 23. 28 Octobr., die 2 et 3 Nouembr. - - - -	50.

Patet ex tabula 1^a per totum annum fuisse.

1. Altitudinem Thermometri minimam, seu gradum frigoris maximi 206, die 16^a mensis Februarii, hora matutina 7^a. Barom. 28. 51, coelum nebulosum, malacia.

2. Al-

2. Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 109. die 12^a menſis Iulii, hora poſtmeridiana 2^a. Barom. 28. 08, coelum nubiloſum, Eurus; at hora 5ta ſubſequebatur tempeſtas vehemens ex occidente, pluuia comitata copioſa.

3. Vnde variatio maxima 97 graduum, ſecundum ſcalam Delislianam.

4. Frigus medium, ſiue altitudinem Thermometri mediam inter omnes quae mane et veſpere obſeruatae fuerunt, 151$\frac{3}{5}$ grad. Calorem autem medium, ſeu altitudinem Thermometri mediam ex meridianis erutam, 143$\frac{1}{4}$ grad. Si vero menſes aeſtiuos Maium — Octobrem, ab hyemalibus Ianuar. —— April. Nouembr. et Decembr. ſegregamus, inueniemus in illis calorem medium, 129$\frac{1}{4}$, in his vero frigus medium 166 graduum fuiſſe.

5. Ex tabula 2da intelligitur, hoc anno 180 dies fuiſſe frigidiores gradu 150, vel termino congelationis aquae naturalis; inter quos 109 numerauimus, quibus frigus 160 gradum ſuperauit: fuerunt porro iſtic 65 dies frigidiores gradu 170, deinde 28 dies frigidiores gradu 180, et 10 dies frigidiores gradu 190; 5 denique dies quibus intenſitas frigoris 200 gradum excedebat.

6. Docet denique eadem 2da Tabula, hoc anno reſpectu caloris, 237 dies fuiſſe quibus mercurius Thermometri ſupra terminum congelationis naturalis aſcendebat, inter quos annotati fuerunt 161 calidiores gradu 140, 111 vero dies calidiores gradu 130, 26 calidiores gradu 120, et vnicus dies quo intenſitas aeſtus gradum ſuperabat 110.

 III. Ven-

III. Ventus et Ventorum Directiones.

Menſe	Malacia	Vent. lenis	Vent. fortis	Procella.	Nord	N-O	Oſt	S-O	Sud	S-W	Weſt	N-W
	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ianuar	2	15	9	5	3	1	2	2	9	6	5	3
Febr.	9	18	1	0	9	2	3	1	3	2	4	4
Mart.	6	12	12	1	3	4	6	1	4	4	4	5
April.	2	23	5	0	7	5	7	6	1	0	1	3
Maii	3	16	9	3	1	0	2	5	4	2	8	9
Iunii	5	10	14	1	4	1	6	2	1	1	11	4
Iulii	6	14	10	1	2	1	5	2	1	5	10	5
Aug.	11	13	5	2	1	2	5	3	4	3	12	1
Sept.	12	11	6	1	1	3	4	1	6	4	6	5
Oct.	2	16	11	2	1	1	4	1	8	3	11	2
Nou.	11	14	4	1	1	0	11	7	8	1	1	1
Dec.	13	15	2	1	4	0	3	3	13	4	0	4
Anno 1781.	82	177	88	18	37	20	58	34	62	35	73	46

Intelligitur hinc, hoc anno imprimis Zephirum imperaſſe, tum vero Auſtrum, et Eurum quoad frequentiam tertium locum tenuiſſe. Malaciae praecipue obſeruatae fuerunt menſibus Decembris, Septembris, Auguſti et Novembris: procellae vero et venti vehementiores maxime obuenere menſibus Ianuarii, Iunii et Octobris.

Speciatim autem procellae eruperunt e regione.

Nord, die 11 Ian. et die 28 Decembris - -	2	dies
Oſt, die 11 Martii - - - -	1	——
Sud, die 10 Ian. die 13, 19 Maii et die 1. 19 Oct.	5	——
SW, die 8 Ian. die 14 Maii, die 12 Iun. et die 2 Sept.	4	——
Weſt. die 4 Iulii, die 29, 30 Aug., et die 4 Nou. -	4	——
NW, die 2, et 25 Ian. - - - -	2	——

IV. At-

IV. Atmoſphera.

Menſe.	Coelum ſerenum dies	Coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies	Quantit. aquae pluuiae. Dig. p. c.
Ianuar.	4.	19.	3.	3.	14.	0, 66.
Februar.	9.	9.	9.	2.	10.	0, 46.
Martii	9.	13.	5.	1.	10.	0, 36.
Aprilis	15.	4.	2.	7.	5.	1, 24.
Maii	7.	6.	3.	14.	2.	1, 69.
Iunii	12.	6.	1.	12.		2, 11.
Iulii	7.	6.	0.	20.		3, 49.
Auguſti	4.	7.	3.	24.		3, 92.
Septemb.	7.	6.	4.	16.	2.	2, 22.
Octobr.	7.	13.	2.	14.	3.	2, 48.
Nouemb.	5.	16.	10.	6.	8.	0, 57.
Decemb.	6.	11.	12.	0.	10.	0, 70.
Anno 1782.	92.	116.	54.	119.	64.	19, 90.

V. Reliqua Phaenomena.

Grando cecidit diebus 4; ſcilicet die 25 Iunii, die 5 Iulii, die 14 et 22 Sept. Aurorae boreales apparuerunt 29; et quidem 16 lucidae, die 10 Ian. die 17. 30 Martii, die 6. 7 Aprilis, die 4. 5 Maii, die 4. 22 Aug., die 3. 12. 22. 30 Sept., die 8, 11 Octobris et die 26 Nou. Reliquae 13 debiliores obſeruatae fuerunt, die 3, 18 Febr. die 19, 29 Martii, die 17 Maii, die 2. 6. 10. 13 Sept., die 1. 5. 14 Oct. et die 20 Nou.

Tonuit 11es, e longinquo die 17. 28 Maii, die 25 Iunii, die 7 Iulii et die 3 Nouembris; et vicine die 16 Maii, die 12 Iunii, die 12, 18 Iulii, die 28 et 31 Augusti.

Flumen Neua a glacie liberabatur die 18 Aprilis, postquam per 131 tantum dies glacie obductum perstitit. Tum vero post 211 dies, mense scilicet Nouembris die 25, glacie iterum obducebatur.

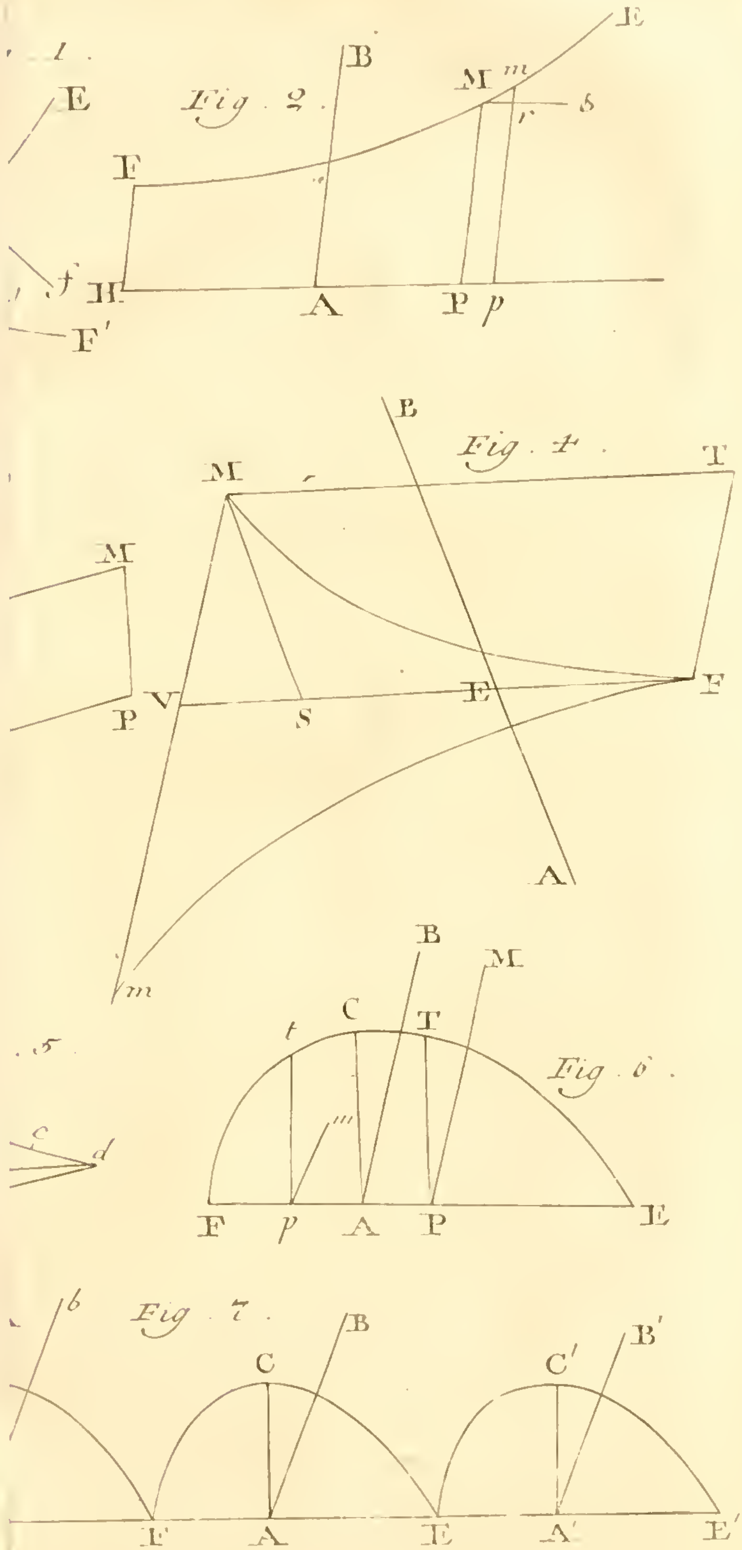


Fig. 2.
B
M
m
E
F
r
H
A
P
p
E
f
F'
Fig. 4.
B
M
T
M
V
S
E
F
P
A
m
Fig. 6.
B
M
C
T
t
m
F
p
A
P
E
c
d
Fig. 7.
b
B
C
C'
B'
F
A
E
A'
E'

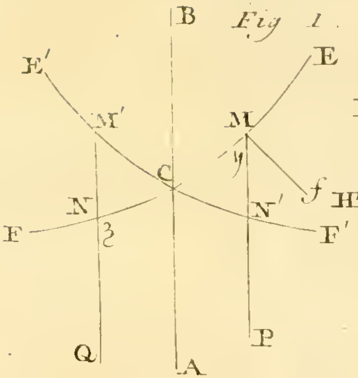


Fig. 1.

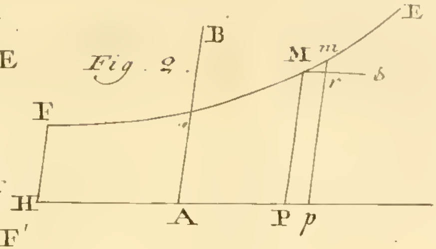


Fig. 2.

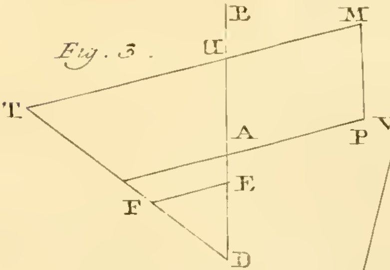


Fig. 3.

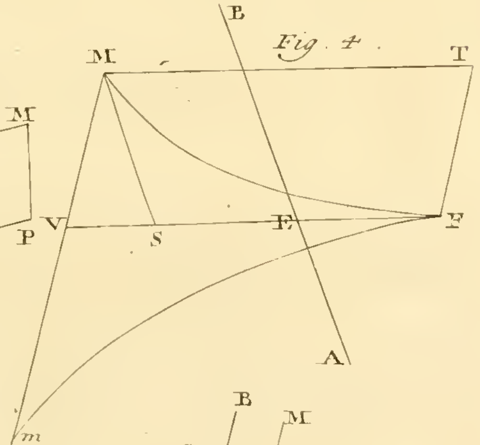


Fig. 4.

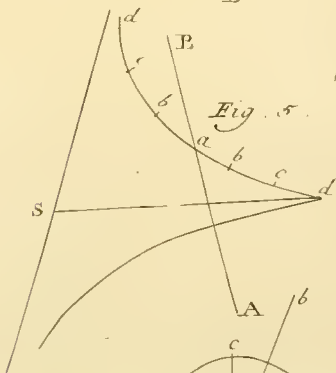


Fig. 5.

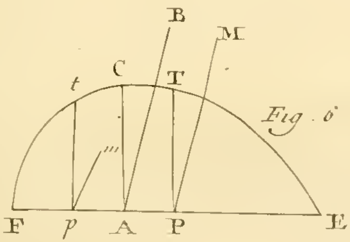


Fig. 6.

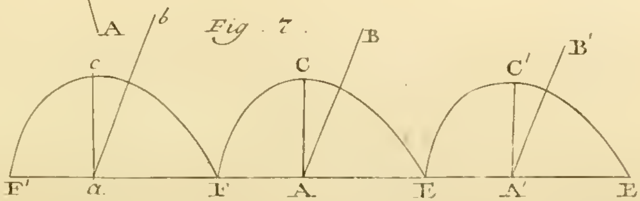
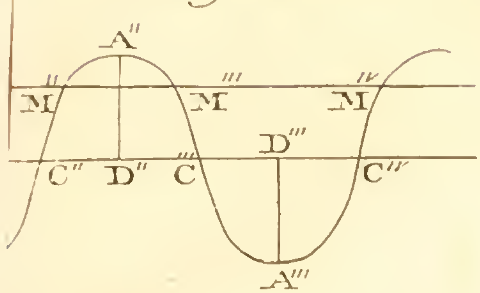


Fig. 7.

Fig. 2.



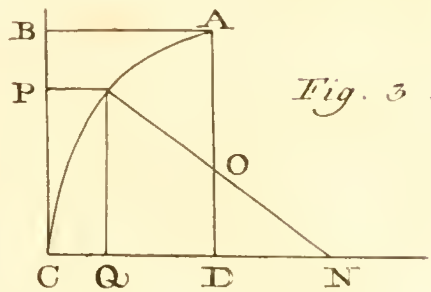


Fig. 3.

ig. 4.

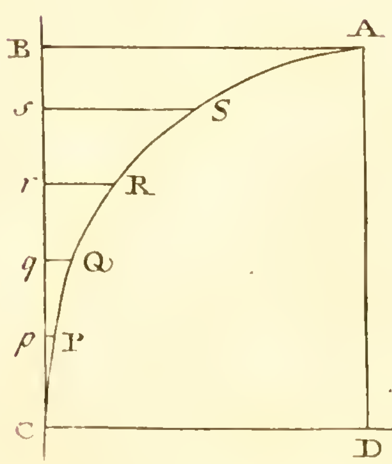


Fig. 5.

Fig. 2.

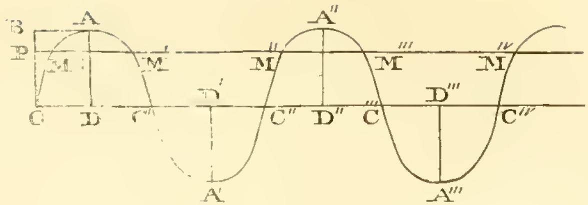


Fig. 1.

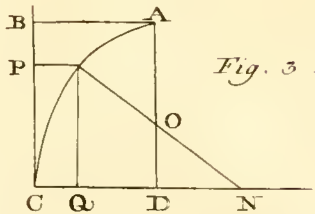


Fig. 3.

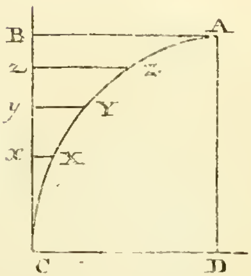


Fig. 4.

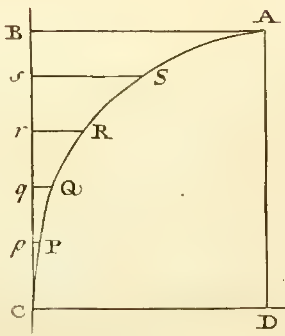


Fig. 5.

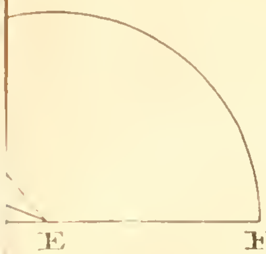
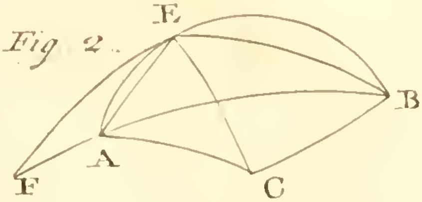


Fig. 2.



3.

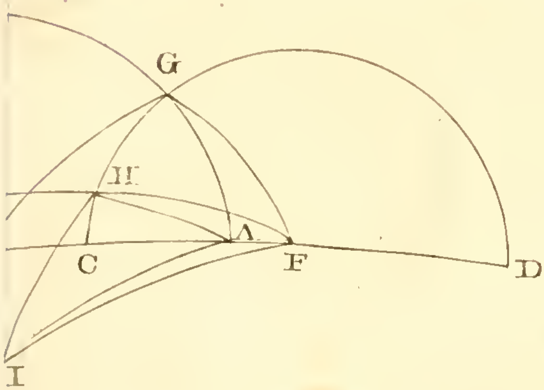
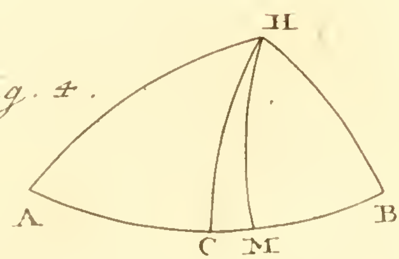


Fig. 4.



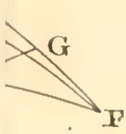


Fig. 1.

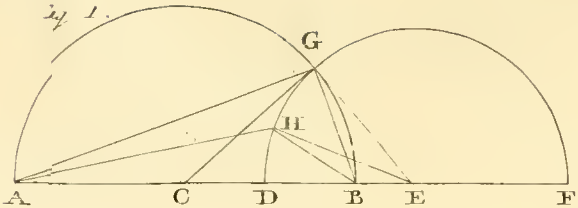


Fig. 2.

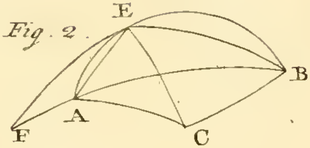


Fig. 3.

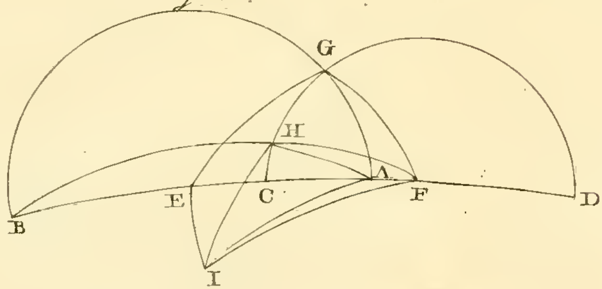


Fig. 5.

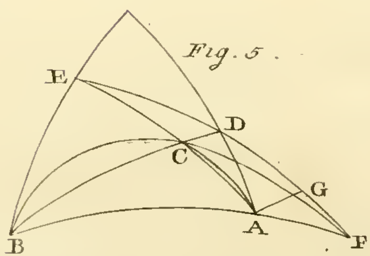


Fig. 4.

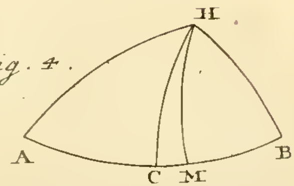
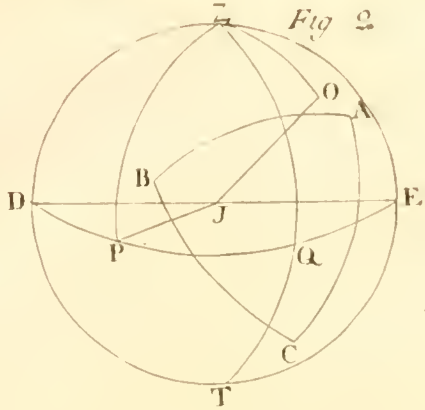


Fig 2



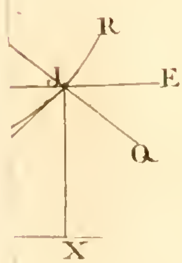
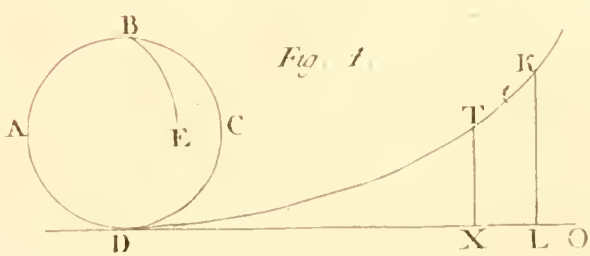


Fig 4



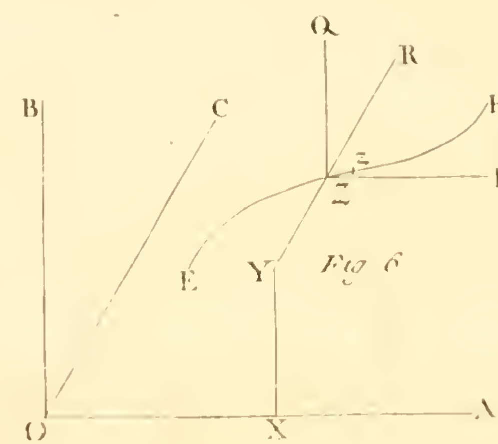


Fig 6

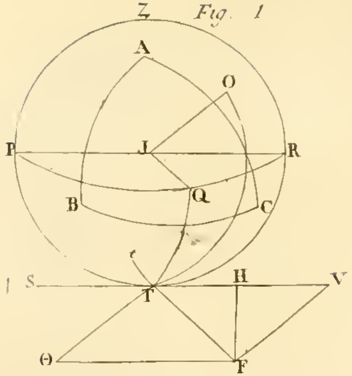


Fig. 1

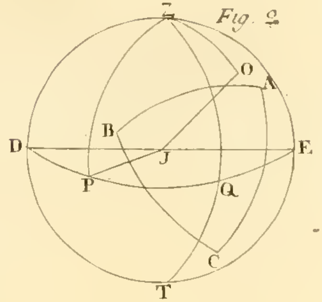


Fig. 2

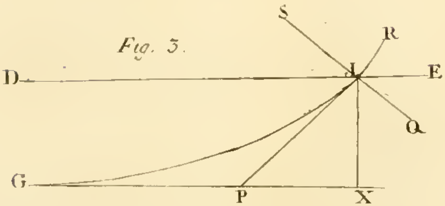


Fig. 3.

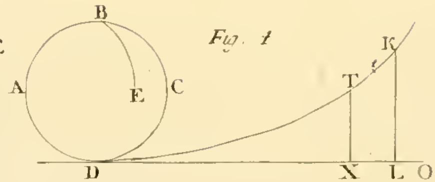


Fig. 4

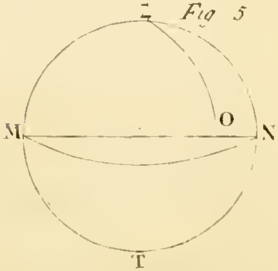


Fig 5

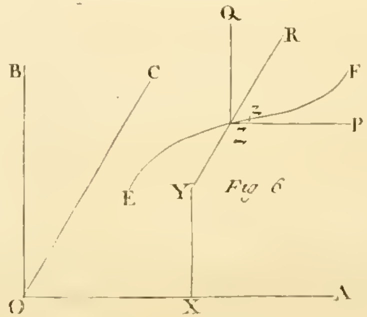


Fig 6

Fig. 1

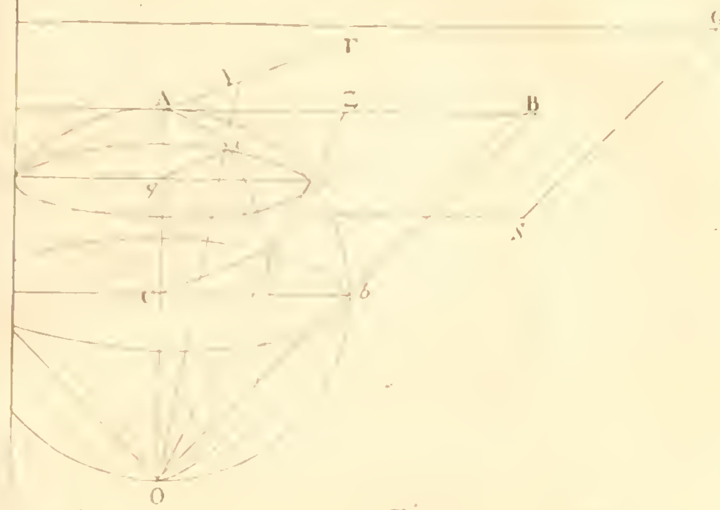


Fig. 3.

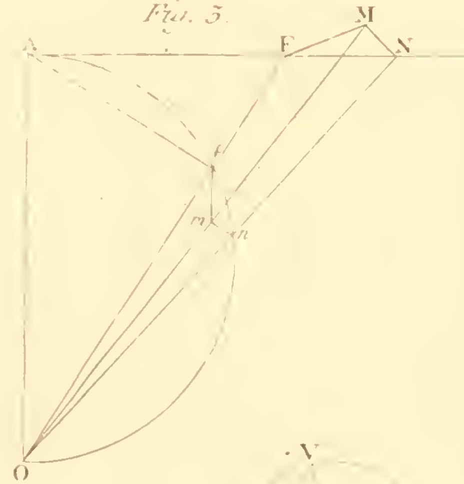


Fig. 5.

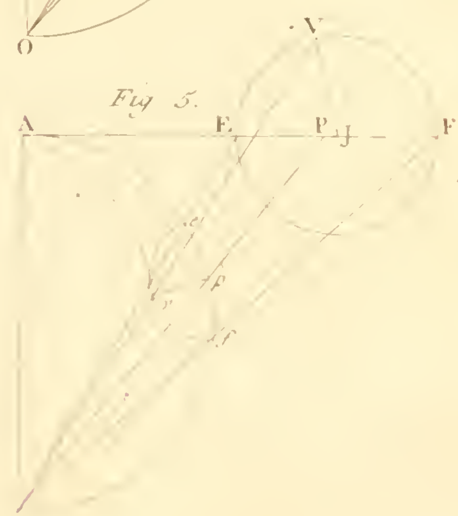


Fig. 1

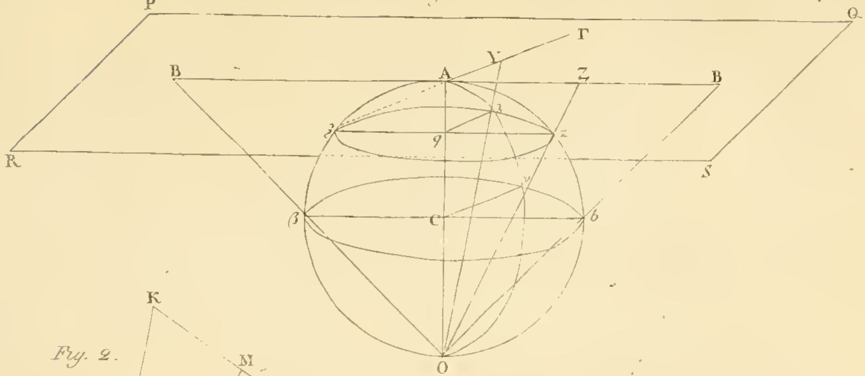


Fig. 2.

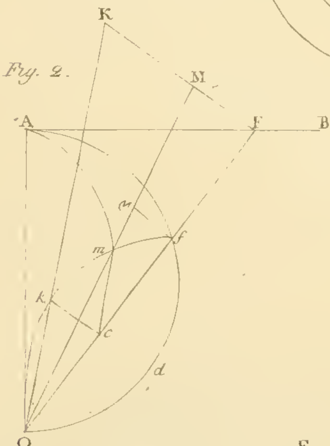


Fig. 3.

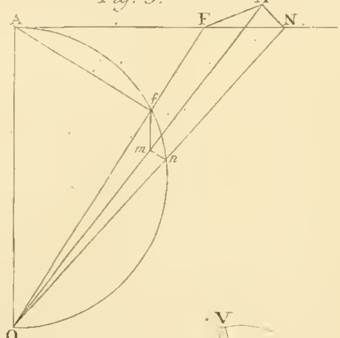


Fig. 4.

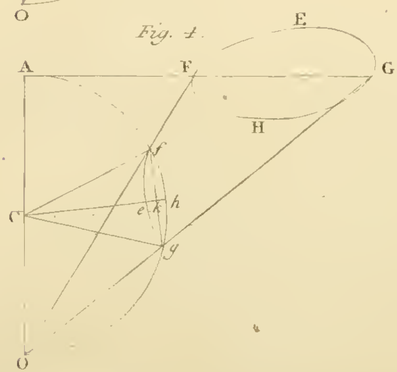


Fig. 5.

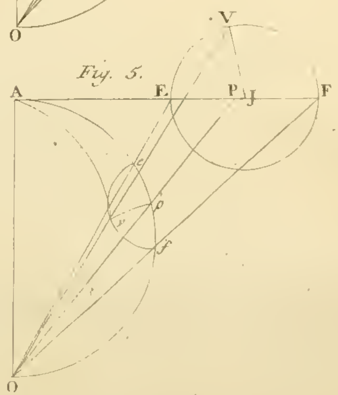


Fig 2

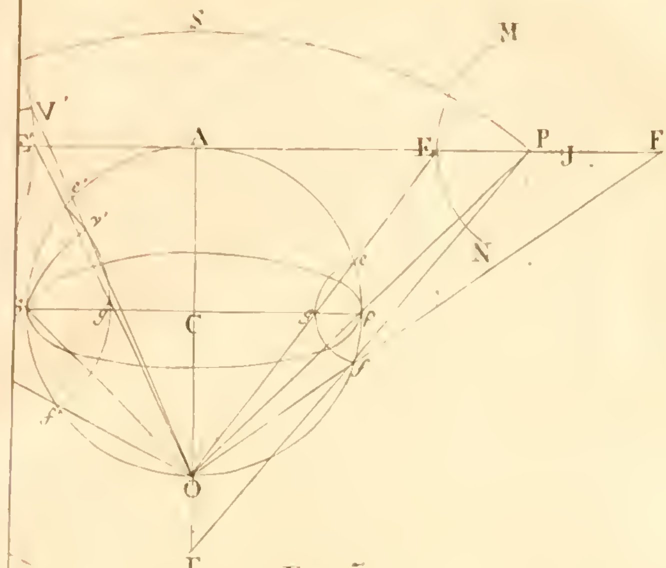


Fig 3

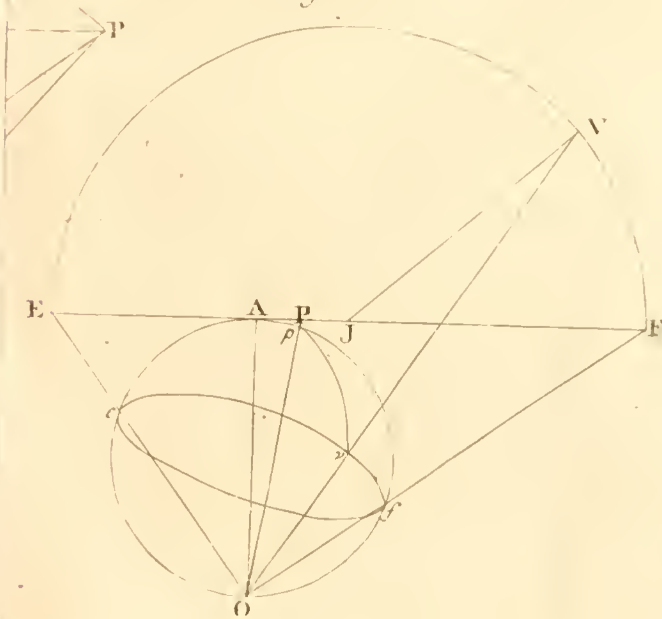


Fig 2

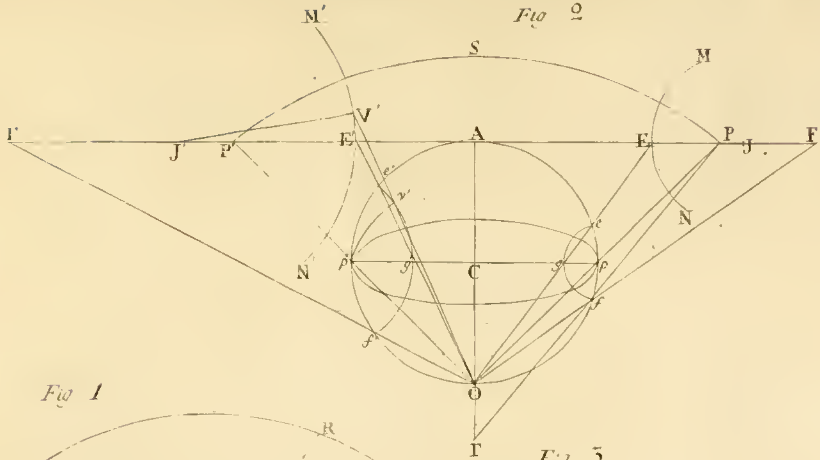


Fig 1

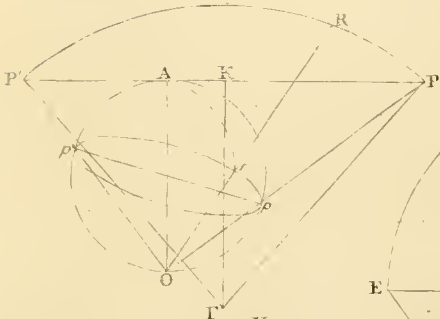


Fig 3

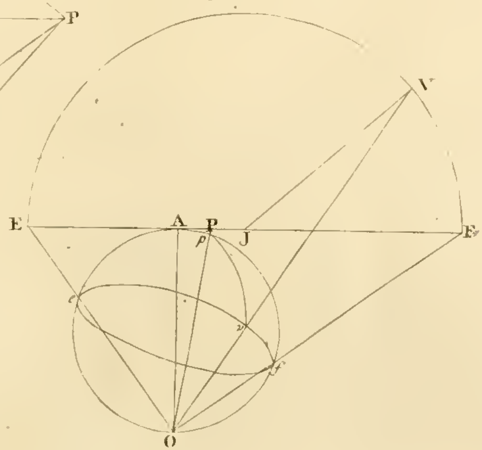
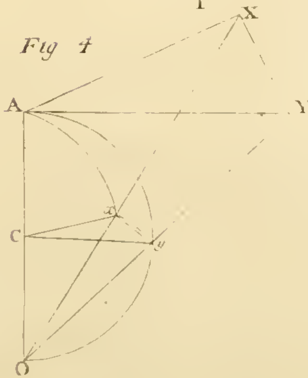


Fig 4



vipara.

Fig. 1

Caenopteris furcata

Fig. 2

Caenopteris rutaefolia

Fig. 3

Caenopteris vi—vipara