MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XVII.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME XVII.

PARIS,

TYPOGRAPHIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,

IMPRIMEURS DE L'INSTITUT, RUE JACOB, 56.

1840.

TABLE DES ARTICLES

CONTENUS

DANS LE DIX-SEPTIÈME VOLUME

DE LA NOUVELLE COLLECTION DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

FIN DE LA TABLE DU DIX-SEPTIÈME VOLUME.

ÉLOGE HISTORIQUE

D'ANTOINE-LAURENT

DE JUSSIEU;

PAR M. FLOURENS, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Lu à la séance publique du 13 août 1838.

LA famille des Jussieu est originaire du petit bourg de Montrotier, situé au milieu des montagnes du Lyonnais. Un membre de cette famille vint s'établir à Lyon vers 1680, pour y exercer la pharmacie. Il s'y maria, et fut père de seize enfants, dont trois, Antoine, Bernard et Joseph de Jussieu, ont été trois des botanistes les plus célèbres du XVIII^{e} siècle.

L'aîné de toute cette famille si nombreuse et si privilégiée, se nommait Christophe; c'est de lui qu'est né M. Laurent de Jussieu, qui devait avoir le bonheur d'ajouter une nouvelle gloire au nom que ses oncles lui avaient laissé, et le bonheur non moins rare de le transmettre à un successeur fait pour en soutenir l'éclat : famille dans laquelle le génie de la botanique semble être héréditaire depuis bientôt deux siècles, comme le génie des mathématiques l'a été, pendant tant d'années, dans celle des Bernouilli.

15

Antoine de Jussieu par qui commencent la célébrité du nom et la vocation pour la botanique, fut botaniste presque dès son enfance. Dès l'âge de quatorze ans, il parcourait, en herborisant, les environs de Lyon et les provinces voisines du Lyonnais; à dix-huit, il étudiait à Montpellier sous Magnol, lequel proposait déjà le nom de *familles,* expression heureuse, quoique alors à peine comprise, des affinités, et, si l'on peut ainsi dire, des parentés des plantes; à vingt-quatre, il succédait à Tournefort, le plus grand botaniste de son temps, et peut-être de tous les temps, pour avoir fixé, le premier, les idées constitutives de la science, comme Linné en a fixé plus tard la nomenclature.

Obligé de se donner à la pratique de la médecine, dans laquelle il excellait, Antoine ne tint pas, pour la botanique, tout ce que semblait promettre son génie facile et si singulièrement précoce. Mais, en appelant auprès de lui son second frère, Bernard, il fit plus pour cette science qu'il n'aurait probablement pu faire en s'y livrant tout entier lui-même.

Après avoir appelé Bernard, il appela Joseph. Celui-ci, dont la vie devait être aussi agitée que celle de ses deux frères a été tranquille, partit pour le Pérou en 1735. Il accompagnait, en qualité de botaniste, les astronomes que l'Académie envoyait alors mesurer, à l'équateur, un degré du méridien, et résoudre ainsi, par une expérience directe, la question fameuse, et si longtemps débattue, de la figure de la terre. Joseph est un exemple de plus de tout ce que peut inspirer de courage et de patience, ce dévouement aux sciences, qui compte déjà tant de victimes, qui en compte sur presque tous les points du globe, et qui est un côté de l'héroïsme des temps modernes. Retenu d'abord par la curiosité que lui inspiraient des régions si riches et si nouvelles, retenu ensuite par les habitants du pays qui, frappés d'une épidémie, redoutaient le départ d'un médecin habile, il ne revit la France qu'après trente-six années des fatigues les plus pénibles, épuisé de corps et d'esprit, ayant perdu jusqu'à la mémoire de ce qu'il avait fait, et ne justifiant que trop, par tant d'épreuves et de malheurs, le titre que lui a donné Condorcet, de *martyr de la botanique.*

De ces trois frères, le seul qui ait eu sur la botanique, et, par la botanique, sur l'histoire naturelle entière, une de ces influences profondes qui marquent une époque dans les sciences, est Bernard. C'est lui qui, tandis que tous les autres botanistes français, à commencer par son frère Antoine, suivaient d'un pas timide les traces de Tournefort, s'ouvrait une route nouvelle, dans laquelle nul ne l'avait précédé encore, et dans laquelle nul ne devait aller plus loin que son neveu, M. Laurent de Jussieu, à qui cet Éloge est consacré.

Antoine-Laurent de Jussieu, neveu et continuateur de Bernard, naquit à Lyon le 12 avril 1748.

Dès qu'il eut fini ses premières études, son oncle le fit venir à Paris, où il arriva au mois de juillet 1765, âgé de dix-sept ans et demi.

Il se trouva ainsi tout à coup auprès de l'homme qui, depuis Tournefort, tenait en France le sceptre de la botanique, et n'avait pour rival en Europe que le seul Linné : homme étonnant, dont le nom remplissait le monde savant, et qui n'avait presque rien écrit. Mais, s'il avait peu écrit, il avait beaucoup pensé; il avait passé sa vie à méditer sur une de ces questions qui contiennent toutes les autres questions d'une science; il avait résolu le problème de la *méthode* en histoire naturelle; et ce problème fondamental, il l'avait résolu au milieu du siècle dont les efforts en tout genre ont le plus avancé la pensée humaine.

Au moment où le jeune Jussieu vint se réunir à son oncle, Antoine était déjà mort, Joseph était toujours au Pérou, et l'illustre vieillard vivait à peu près seul. Logé dans une petite maison de la rue des Bernardins, il n'en sortait que pour aller à la messe, à l'Académie, ou au Jardin des plantes; presque toujours plongé dans ses méditations profondes, et ne les interrompant, si c'était même les interrompre, que pour quelques amis, choisis parmi les hommes les plus respectables de cette époque, les Poivre, les Lemonnier, les Duhamel et les Malesherbes.

Telle était la vie retirée de Bernard. A cette simplicité de mœurs, à ce besoin d'une méditation continue, mais libre, et dans laquelle, par un tour particulier de son esprit, il semblait plutôt laisser venir les idées que les chercher, il joignait une régularité d'habitudes qui était extrême. Tout, dans sa maison, était soumis à l'ordre le plus exact, et, si l'on peut s'exprimer ainsi, à *l'esprit de méthode* le plus sévère. Chaque chose s'y faisait, chaque jour, à la même heure, et de la même manière.

Chaque repas avait son heure fixe et invariable. On soupait à neuf; et lorsque le jeune Laurent allait jusqu'à se permettre la distraction du théâtre, il n'oubliait jamais de calculer le nombre précis de minutes qu'il lui fallait pour rentrer dans la salle à manger par une porte, juste dans le moment même où son oncle y entrait par l'autre.

Voici encore un trait, et qui peint le caractère de Bernard par une autre face. La partie de ses revenus qui n'était pas absorbée par les dépenses courantes, il la déposait dans un coffre. Il lui fallut un jour faire une dépense extraordinaire, il ouvrit le coffre et y trouva quarante mille francs; puis le coffre fut refermé pour n'être plus rouvert qu'après sa mort, et l'on y retrouva une somme à peu près égale.

Eh bien, on peut dire qu'il traita ses idées comme sa fortune. Il les laissa s'accumuler de même avec régularité, avec suite, mais avec une sorte d'insouciance; enfin il y puisa un jour, et traça le tableau de ses *Ordres naturels*, monument immortel de son génie; puis il les laissa s'accumuler encore; et, à sa mort, il en légua le dépôt à son neveu, comme la partie la plus précieuse de son héritage.

Bernard passait presque tout son temps à méditer. Habituellement, il méditait assis. L'oncle et le neveu travaillaient tout le jour dans la même chambre, sans se parler. Le soir, le neveu faisait la lecture à son oncle, qui lui communiquait, à son tour, ses vues et ses réflexions.

On sent que les impressions reçues auprès d'un homme de cette trempe, ne devaient guère moins influer sur le caractère du jeune Jussieu que sur son génie. Aussi, même simplicité dans les habitudes, même constance dans le travail, même persévérance dans le développement d'une grande idée et de la même idée: jamais deux hommes ne semblèrent plus faits pour se continuer l'un l'autre, et n'être, si l'on peut ainsi dire, que les deux âges, les deux phases successives d'une même vie.

Au bout de cinq ans passés auprès de son oncle, dans des études si actives et dans un commerce si intime, le jeune Laurent, quoique à peine âgé de vingt-deux ans et demi, était déjà docteur en médecine, et suppléant de Lemonnier dans la chaire de botanique du Jardin des plantes.

Dès qu'il commença à professer, l'influence de Bernard sur ses idées dut prendre une nouvelle force. Il le consultait sur ses difficultés, il lui soumettait ses doutes; et toutefois on doit ajouter que, jusque dans les discussions qu'il soulevait alors, il y avait souvent moins de curiosité scientifique que de piété filiale. Car, depuis la mort d'Antoine, Bernard était tombé dans une mélancolie profonde; bientôt il perdit la vue. Il ne fallait rien moins, pour rattacher ce vieillard à la vie, que les liens adroits dont l'entourait un jeune homme, ingénieux à réveiller sans cesse cet esprit né pour la méditation, par des questions piquantes et difficiles.

En 1773, une place devint vacante à l'Académie, et Bernard engagea son neveu à se présenter; mais ce neveu n'avait rien publié encore. Il fallut donc songer à un mémoire; et, pour sujet de ce premier travail, Laurent choisit l'*Examen de la famille des renoncules.* Au reste, le sujet importait peu; car, quel qu'il fût, il ne pouvait être, pour lui, qu'une occasion de faire sentir sa force, et de développer de grandes idées.

C'est alors en effet que, par une réaction énergique sur les idées de son oncle, il conçoit ces idées sous une nouvelle forme, sous une forme qui lui est propre, et qu'il leur imprime, à son tour, le cachet de sa pensée et de son génie. Il a souvent répété que c'était ce mémoire qui l'avait fait botaniste, que le *voile s'était levé,* ce sont ses expressions, et que, pour la première fois, s'étaient découverts à ses yeux ces grands principes dont la démonstration devait être ensuite le but constant de ses efforts et de ses recherches.

Ce mémoire frappa tous les esprits. C'était tout un ordre nouveau d'idées. Un élément nouveau, le principe constitutif de la méthode naturelle, prenait enfin sa place dans la science, et bientôt il allait en changer la face.

Jusqu'alors, et particulièrement depuis Linné, elle s'était occupée surtout de nomenclature; maintenant, et par un progrès qui la ramenait plus près de son véritable objet, la nature des êtres, à l'étude de la nomenclature elle allait faire succéder l'étude des caractères. « La nomenclature, dit l'auteur « lui-même, ne doit pas être négligée; mais la recherche des « caractères est une partie plus importante de la botanique. »

Il établit que tous ces caractères n'ont pas une valeur égale. Il y en a de généraux et de particuliers, de constants et de variables, de primitifs et de secondaires. Souvent un seul équivaut à plusieurs. Il ne suffit donc pas de *compter* les caractères, il faut les *évaluer*.

Les caractères sont les *signes indicateurs* des rapports des êtres. Dans tout être organisé, soit végétal, soit animal, chaque partie a des rapports nécessaires avec toutes les autres. On peut donc juger de toutes par chacune. Et ces parties qu'on prend ainsi pour *signes* des autres, ces parties par lesquelles on juge des autres, sont ce qu'on nomme des *caractères.*

Les naturalistes ont commencé par chercher ces *caractères,* ces *signes,* dans toutes les parties, à peu près indifféremment. Ils ont reconnu ensuite que toutes ces parties n'ont pas, à beaucoup près, une force égale, soit pour unir, soit pour séparer les êtres. De là est né le *calcul des caractères;* et ce *calcul* a donné la solution du problème de la *méthode.*

Dès le milieu du XVI^e^ siècle, Gessner conçut l'idée de tirer, des organes de la fructification, les principaux caractères des plantes. Ce fut le premier pas. La prééminence de la graine, démontrée par Césalpin, fut le second.

Le problème le plus intéressant peut-être de toute la physiologie végétale, a été la détermination de la fonction propre de chaque partie de la fleur.

Une fleur se compose, comme chacun sait, de plusieurs parties. Au milieu est le *pistil*, ou l'organe femelle; autour du *pistil*, sont les *étamines*, ou les organes mâles; la *corolle*, ou la partie brillante, la partie colorée de la fleur, la fleur même, selon Tournefort, entoure les étamines; et le *calice*, prolongement de la lame la plus externe de l'écorce, de l'*épiderme*, enveloppe toutes ces parties.

Plus d'un siècle et demi après Gessner, Tournefort ignorait encore l'usage des étamines; il niait cet usage, à côté de Vaillant qui le démontrait.

Les idées de Vaillant sur les sexes des plantes, rendues populaires par le système ingénieux de Linné, furent confirmées par des expériences précises de Linné même, de Gleditsch, de Kœlreuter; et le problème *physiologique* fut résolu.

Le problème relatif à la *méthode* ne l'a été que par M. de Jussieu. Il voit la *corolle*, le *calice*, manquer dans un grand nombre de plantes. Le *pistil* et les *étamines*, parties plus essentielles, parties productrices de l'embryon, du nouvel être, subsistent; mais, pris séparément, chacun de ces organes ne donne que des rapports incomplets; les rapports naturels, les rapports complets ne sont donnés que par ces deux organes, pris ensemble, et considérés dans leur *insertion respec-*

tive. L'insertion des étamines forme donc, dans la fleur, le premier caractère.

Le premier caractère de la graine se tire des *lobes de l'embryon,* ou du nouvel être. Ces lobes sont les premières feuilles de la nouvelle plante, l'organe qui lui fournit son premier aliment ou le lui prépare. On conçoit donc combien, pour me servir d'une expression heureuse de M. de Jussieu lui-même, les *différences remarquables et simples* que l'on observe dans ces premiers organes, doivent influer sur le développement général de la plante et sur son organisation entière. Toutes les autres parties de la graine, les parties étrangères au nouvel être, les parties de la graine proprement dite, les *enveloppes séminales,* le *périsperme,* etc., ne sont que des parties secondaires.

Le mémoire où M. de Jussieu jetait ainsi les premières bases de la science des caractères, est, comme je viens de le dire, de 1773. Ce mémoire lui ouvrit les portes de l'Académie.

L'année d'après, 1774, il en donna un autre plus étendu, plus complet, où toutes ces grandes idées sont reprises, remaniées, et portées à un plus haut degré de clarté et de précision.

Voici quelle fut l'occasion de ce nouveau mémoire.

La méthode de Tournefort, établie par Tournefort même au Jardin des Plantes, y régnait encore en 1774, malgré tous les changements survenus dans la science. On sentait le besoin d'une réforme. D'un autre côté, le nombre des espèces acquises s'était beaucoup accru durant ce long intervalle, et l'ancien local ne suffisait plus. Buffon conçut le projet d'un agrandissement digne de l'époque à laquelle son nom devait servir de date. Il présenta ce projet à Louis XV, qui aimait la botanique et qui l'adopta. Le Jardin fut doublé; et toute la partie consacrée à l'*École* proprement dite, put dès lors être replantée.

Il ne restait plus qu'à se décider sur l'ordre à suivre dans cette plantation nouvelle. La méthode de Tournefort ne pouvait être conservée, du moins dans son entier, surtout depuis les deux grands progrès par lesquels Linné avait, d'une part, précisé les genres, et, de l'autre, simplifié la nomenclature. On ne pouvait pas non plus adopter le système de Linné, d'ailleurs si ingénieux, mais, au fond, plus éloigné de l'ordre naturel que celui de Tournefort. Il n'y avait donc que deux partis à prendre, ou de corriger l'un de ces deux systèmes par l'autre, ou d'en établir un nouveau; et c'est à ce dernier parti que l'on s'arrêta.

Le système nouveau, proposé par M. de Jussieu, est une combinaison savante des travaux célèbres de Linné, de Bernard de Jussieu, et de Tournefort. Il prend, de Linné, les *genres*, les *espèces*, la *nomenclature;* il prend, de Bernard, les *ordres* ou les *familles naturelles;* il tire enfin, de Tournefort, un moyen de multiplier les *classes* de Bernard, sans rompre ses *ordres* ou ses *familles*.

Les *genres* de Linné étaient les plus précis que l'on eût encore; ses *espèces* étaient les mieux déterminées; sa *nomenclature* était admirable. Cette nomenclature, qui réduisait à deux mots pour chaque plante, le nom de l'*espèce* et le nom du *genre,* les longues phrases de Tournefort et de Gaspard Bauhin, constituait, à elle seule, une grande réforme de la science. Cependant, quand il fut question de l'introduire au Jardin des Plantes, une difficulté survint. On sait quelle était la prévention de Buffon contre la partie technique des classifications. Il repoussa d'abord les noms linnéens. M. de Jussieu lui fit sentir que ces noms étaient un des changements les plus heureux que l'on eût jamais opérés dans l'histoire naturelle; il ajouta que le Jardin de Paris ne devait rester en arrière sur aucun point, et Buffon se rendit aussitôt. Le Jardin des Plantes reçut tout à la fois la nomenclature de Linné, et les ordres naturels de Bernard.

Ces *ordres naturels*, tels que Bernard en avait conçu l'ensemble, se trouvaient compris dans sept classes. Laurent sentit le besoin de multiplier ces classes, et il en porte le nombre à quatorze.

Les *lobes de l'embryon* donnent les trois premières : d'où la fameuse division du règne végétal entier en plantes *acotylédones, monocotylédones* et *dicotylédones*.

L'*insertion des étamines* sur le pistil, sur le support du pistil, sur le calice, ou sur la corolle, donne les divisions suivantes.

Ainsi, deux ordres de caractères, les premiers tirés de l'embryon, les seconds tirés de l'insertion relative des différentes parties de la fleur, donnent toutes les classes. Des caractères de moins en moins élevés donnent les autres groupes, les familles, les genres, les espèces : partout les groupes se subordonnent dans la méthode, comme les caractères dans la nature; et le principe constitutif de la méthode, pris dans la nature même, est l'*importance relative des caractères*.

Mais cette *importance relative des caractères*, base de tout l'édifice de la méthode, comment l'estimer, comment l'évaluer, à son tour, avec certitude? Ici deux moyens se présentent, et tous deux également sûrs.

L'un, fondé sur le raisonnement, conclut directement l'importance du caractère de l'importance de l'appareil qui le fournit. Tout, dans le végétal, tend à la formation de la fleur; tout, dans la fleur, tend à la formation de l'embryon, du nouvel être; la formation de ce nouvel être, de l'embryon, est donc le but, la fin de toutes les autres fonctions végétales; *c'est donc dans l'embryon*, dit M. de Jussieu, *que les naturalistes doivent chercher leurs premiers caractères.*

Quand ce moyen, fondé sur le raisonnement, quand ce moyen *rationnel* manque, et il manque bientôt en botanique, l'auteur y supplée par un autre purement *expérimental,* mais tout aussi sûr, et qui ne manque jamais. A défaut de la fonction qui n'est pas connue, ou qui l'est mal, ou qui du moins ne l'est pas assez pour rendre raison de l'importance de l'organe, il détermine l'importance de l'organe par sa constance; et ce n'est pas tout.

Il en est de chaque circonstance d'un organe comme de l'organe même; la circonstance la plus constante, c'est-à-dire la plus générale, est toujours la plus importante. Linné a fait, des étamines, la base de son système : nombre, attache, réunion, proportion, situation de ces parties, il considère tout, il emploie tout; et il ne voit pas que, parmi tous ces caractères, un seul a de l'importance, parce que seul il a de la constance, savoir, l'*attache* des étamines, ou leur insertion.

Tournefort a fondé son système sur la corolle. L'absence, la présence, la situation, la division, la forme de la corolle, il emploie tous ces caractères, qui sont variables; et il néglige précisément le caractère tiré de l'*attache* de cet organe, qui seul est constant.

L'ordre naturel a échappé à ces deux grands hommes; et il leur a échappé à tous deux, comme on voit, par la même cause, parce qu'ils n'ont pas connu *l'importance relative des caractères*. Il y a plus, c'est qu'à prendre tous les botanistes depuis Gessner, tous ceux qui ont rencontré juste dans leurs essais, tous ceux qui ont saisi quelques fragments de l'ordre naturel, tous ceux-là suivaient, à leur insu, *l'importance des caractères*. Il y a plus encore, c'est qu'il y a des familles naturelles toutes faites, comme celles des *graminées*, des *composées*, des *ombellifères*. Qu'on étudie ces familles : tout caractère qui varie dans une d'elles est subordonné, secondaire; le caractère primitif, essentiel, le *caractère important*, embrasse la famille entière.

Il y a donc un ordre, une graduation, une subordination dans les caractères; le vrai problème est donc de commencer par classer ces caractères, d'après lesquels se classent, à leur tour, les êtres. Or, c'était là une face toute nouvelle de la science. Bernard de Jussieu qui avait introduit le principe de *l'importance relative des caractères* dans la classification des plantes, n'avait pas assez dégagé ce principe du point de vue pratique; en l'élevant au point de vue théorique, en le généralisant par cette transformation même, Laurent en faisait mieux sentir toute la portée; il consommait la grande révolution commencée par son oncle; il créait la philosophie de la méthode.

Lorsque M. de Jussieu écrivait ces deux mémoires, premiers germes de tout ce qu'il a fait par la suite, Bernard et Linné vivaient encore. Bientôt ces deux grands naturalistes moururent, Bernard en 1777, et Linné l'année suivante. Dès lors la première place fut libre, et tout le monde sentit que c'était M. de Jussieu qui allait l'occuper; il était impossible que lui-même ne le sentît pas.

Je trouve en effet dans une lettre de lui, écrite vers cette époque, ces mots remarquables : « Il est des circonstances « dont un homme doit profiter; et il s'en offre une pour moi « que j'aurais tort de négliger. Nous avons perdu, en trois « mois de temps, les trois premiers botanistes de l'Europe, « M. de Haller en Suisse, M. Linnæus en Suède, le troisième « à Paris. Il serait glorieux de leur succéder, et de rappeler en « France une primauté que les étrangers lui ont disputée. »

Ces mots trahissent le sentiment qu'il avait de sa force; ce qui le trahit bien plus encore, c'est l'entreprise qu'il conçut dès lors de soumettre en quelque sorte le règne végétal entier aux principes qu'il venait de poser dans ses deux mémoires : entreprise immense, et dont le résultat a été ce grand ouvrage sur les *familles des plantes*, duquel date l'esprit nouveau qui anime aujourd'hui tous ceux qui s'occupent des rapports et de la classification des êtres.

La méthode naturelle est le but vers lequel tendaient tous les efforts des naturalistes, avant qu'ils l'eussent trouvée; et, une fois trouvée, elle est devenue le guide de tous leurs efforts subséquents.

Les anciens, si l'on excepte Aristote, et Aristote seul, ne se sont point occupés des rapports des êtres. Ils ne cherchaient dans l'histoire naturelle, et particulièrement dans la botanique, que le côté utile; ils n'étudiaient les végétaux que pour l'économie domestique et la médecine. L'ordre, les rapports des espèces, la méthode, expression de cet ordre et de ces rapports, tout ce côté purement scientifique de la botanique leur a échappé; et il n'était guère possible qu'il en fût autrement, ils connaissaient trop peu de plantes.

Il n'y en a que cinq cents dans Théophraste, six cents dans Dioscoride, huit cents dans Pline.

L'ordre naturel, le véritable ordre des êtres, a ses matériaux dispersés sur toute la surface du globe. On peut le comparer à un édifice dont on n'aurait que les débris disjoints et bouleversés, dont on n'aurait pas même, à beaucoup près, tous les débris, et dont il s'agirait néanmoins de rétablir la structure. On conçoit que, plus il manquerait de ces débris, plus la restauration serait difficile, qu'il pourrait en manquer beaucoup trop pour qu'elle fût possible, et que, pour être rigoureusement sûr qu'elle est exacte, il faudrait nécessairement les avoir tous.

Dès la fin du moyen âge, des découvertes étonnantes se succèdent; la plus étonnante est celle d'un nouveau monde. La curiosité des hommes, éveillée par ces grands événements, les porte à des explorations plus énergiques et plus hardies. Les sciences renaissent, les grands voyages commencent, et le nombre connu des êtres s'accroît avec une rapidité qui va croissant elle-même, et dans une proportion très-digne d'être remarquée, à mesure que l'on s'approche de notre époque.

Pour ne pas sortir ici de la botanique, le nombre des plantes, qui n'est encore, dans les premiers auteurs du XVI^{e} siècle, que de huit à neuf cents, est déjà, vers la fin de ce siècle même, de plus de deux mille; il est, au siècle suivant, de plus de dix mille dans Tournefort, en y comprenant les variétés; réduit aux seules espèces proprement dites, ce nombre est de sept mille dans Linné; il est de vingt mille dans M. de Jussieu, et il s'est quadruplé depuis; il sera de près de quatre-vingt mille dans le grand ouvrage que publie en ce moment M. De Candolle. Une famille, celle des *composées,* aura, dans ce grand ouvrage, plus de huit mille espèces; ce sera plus d'espèces, dans une seule famille, que n'en avait le règne végétal entier du temps de Linné.

Ce qui marque le mieux la force de l'esprit de M. de Jussieu, c'est le parti qu'il a tiré des matériaux que l'on possédait à l'époque où il a écrit. Le nombre de ces matériaux s'est quadruplé depuis, comme je viens de le dire; et cependant il n'est aucun grand principe de l'ordre naturel qui ne soit posé dans son livre, et presque aucune des combinaisons établies par ses successeurs dont on ne puisse y trouver le germe. Fontenelle admire, dans Tournefort, une classification où plus de douze cents espèces nouvelles, et, ajoute-t-il, *qu'on n'attendait pas,* avaient pu entrer, sans en rompre les bases. Qu'aurait-il dit de la méthode de M. de Jussieu, où près de cinquante mille espèces, inconnues au moment où l'auteur écrivait, ont pu trouver leur place, et presque partout une place indiquée d'avance, une place où *on les attendait?*

L'ouvrage dans lequel M. de Jussieu expose cette méthode, fruit de combinaisons si profondément calculées, est le résultat de quinze années de travaux sans relâche. Il en commença l'impression en 1788; il en avait la tête si pleine que l'impression fut commencée sans que le manuscrit fût prêt; l'auteur ne fut jamais en avance sur l'imprimeur que de deux ou trois feuilles. Il y a plus : c'est que les premières feuilles avaient été imprimées sans ces *Notes,* placées à la suite des caractères des familles, et qui sont peut-être, de tout le livre, la partie la plus fine et la plus profonde. M. de Jussieu fit mettre ces feuilles au pilon; il ne recula pas devant une résolution qui, pour un ouvrage ordinaire, aurait pu paraître extrême; il sentait que l'ouvrage qu'il écrivait serait éternel.

L'impression, et par conséquent la rédaction, puisqu'elles marchaient ensemble, durèrent quinze mois; l'ouvrage parut au mois de juillet 1789.

Il s'ouvre par cette *Introduction* célèbre dans laquelle l'auteur développe de nouveau, et, cette fois-ci, dans tout leur véritable ordre, ces grands principes qu'il avait déjà posés dans ses deux mémoires de 1773 et de 1774. Ici ces principes forment un corps complet de doctrine. On conçoit tout ce qu'une étude de quinze années avait dû leur donner de lucidité, d'enchaînement et de force; c'est là que, par ses réflexions, par son expérience, par ses méditations profondes, l'auteur remonte jusqu'aux règles les plus élevées de l'art des méthodes, et qu'il rattache cet art à une science nouvelle, à une science créée par lui, à la science des caractères.

Deux faits dominent toute idée de *méthode naturelle :* l'un est la subordination même des caractères. S'aidant, tour à tour, du raisonnement et de l'expérience, M. de Jussieu conclut, comme nous avons vu, l'importance des organes de leur fonction; et, quand cette fonction n'est pas connue, il la conclut de leur constance : artifice ingénieux, et par lequel un fait d'une évaluation souvent impossible, toujours difficile, presque toujours obscure, du moins dans l'état actuel de la botanique, savoir la *fonction* d'un organe, se trouve habilement transformé en cet autre, d'une évaluation toujours simple, facile, évidente, savoir sa *constance.*

Le second fait constitutif de la *méthode naturelle* est l'assujettissement des caractères aux groupes. Dans les *méthodes* *artificielles,* on commence par choisir un caractère parmi tous les autres; et l'on soumet ensuite les espèces à ce caractère. Dans la *méthode naturelle,* la marche est tout opposée; on y soumet le caractère aux espèces.

Les auteurs systématiques descendent des classes aux genres, des genres aux espèces; ils vont du général au particulier. M. de Jussieu renverse complétement cette marche; *il remonte,* comme il le dit lui-même, *du particulier au général.* Et toute la différence entre les *méthodes artificielles* et la *méthode naturelle* est là : les unes soumettant les espèces aux genres, les genres aux classes; l'autre soumettant, au contraire, les classes aux genres, les genres aux espèces: les unes soumettant les faits aux idées; et l'autre, les idées aux faits.

Dans cette route nouvelle, ouverte à la science des rapports, chaque pas de M. de Jussieu appelle l'attention du naturaliste. Le secret de sa force est dans la marche qu'il a suivie.

L'exemple des familles naturelles toutes faites le guide dans la formation des familles moins évidentes. Il voit dans ces familles, naturelles aux yeux de tous les botanistes, les *graminées,* les *composées,* les *légumineuses,* les *ombellifères,* etc., les espèces rapprochées conformément à l'ensemble de leur structure; et c'est là, pour lui, le trait de lumière : tout caractère qui, appliqué à l'une de ces familles, en bouleverserait les espèces, doit donc être exclu; la première condition de tout caractère est donc de respecter le rapprochement des espèces fondé sur l'ensemble de leur structure.

Et ce calcul de l'importance des caractères, déduite de leurs rapports avec l'ensemble de la structure, est le principe sur lequel l'ouvrage de M. de Jussieu repose tout entier. L'objet propre de cet ouvrage est la distribution des genres en familles.

Tournefort avait déjà distribué l'ensemble des espèces en genres. Linné avait donné à ces premiers genres plus de régularité et de précision. Il s'agissait de faire, pour les groupes d'un ordre plus élevé, pour ces groupes mêmes, omis dans les systèmes de Tournefort et de Linné, pour les *familles*, ce que Tournefort et Linné avaient fait pour les genres.

M. de Jussieu distribue tous les genres connus au moment où il écrivait, au nombre de près de deux mille, en cent *familles*. Chacune de ces familles primitives, il la fonde sur un ensemble déterminé de caractères; et ce concours de caractères, il montre qu'il est indispensable; car chaque caractère, pris séparément, peut appartenir à plusieurs familles; c'est leur assemblage, et un assemblage différent pour chacune, qui seul est propre à chaque famille, et la constitue.

Le *caractère* de chaque famille n'est donc pas *unique*, il n'est pas *arbitraire*, comme dans les systèmes artificiels; ce caractère, *un* mais *multiple*, est l'assemblage des caractères donnés par l'observation, par le fait, comme les plus constants dans chacune.

On conçoit qu'une lumière aussi nouvelle n'a pu être portée sur toutes ces *familles*, sur tous ces groupes principaux du règne végétal, sans que l'auteur en revît tous les éléments : les espèces, les genres, les caractères de chaque genre. Dans ce travail immense, jamais son attention ne s'est lassée; l'œil exercé du naturaliste admire partout cette expérience consommée, ce tact heureux, cette sagacité profonde, qui jusque-là peut-être, et dans aucune branche de la science, n'avaient paru à un égal degré.

Les naturalistes ont reconnu de bonne heure, comme je viens de le dire, certaines familles de plantes pour naturelles.

Dès 1672, Morison saisissait les principaux traits de celle des *ombellifères*. Quelques années plus tard, Rai essayait une distribution du règne végétal sur un plan plus vaste; il signalait la grande division des plantes en *dicotylédones* et *monocotylédones*, et déjà il rangeait le *palmier* parmi ces dernières. Enfin, en 1689, précisément un siècle avant M. de Jussieu, Magnol publiait son ouvrage sur les *familles des plantes*. Mais ni Magnol, ni Morison, ni Rai, n'avaient pu suivre ces vues générales dans le détail; et ces vues éparses, ces traits heureux, demeuraient perdus.

Vers le milieu du XVIIIe siècle, ce même Linné à qui la botanique devait déjà sa nomenclature, sa langue descriptive et le système artificiel le plus précis, le plus rigoureux qu'elle ait jamais eu, publia une suite d'*ordres* ou de *familles naturelles*, qu'il porta d'abord, en 1738, à soixante-quatre, et qu'il réduisit, plus tard, à cinquante-huit; et toutefois ces deux essais n'offrent encore que des séries de noms : nulle explication, nul développement, nulle indication des motifs qui avaient pu diriger l'auteur, soit dans la formation, soit dans le classement de ses familles. *C'était,* comme l'a dit M. de Jussieu lui-même, *une sorte de problème que Linné laissait à résoudre à ses successeurs*, et qui n'a point été résolu.

Un ouvrage plus complet, et, sous le point de vue des *familles naturelles,* beaucoup plus important, est celui d'Adanson, publié en 1763. Le premier trait qui frappe dans Adanson, c'est le caractère de réformateur. Ce caractère perce dès son premier écrit, son *Histoire naturelle du Sénégal,* où, touchant à la classification des *coquillages*, il change cette classification de fond en comble, et la place tout d'un coup sur ses véritables bases, savoir, sur les animaux, dont les coquillages proprement dits, les *coquilles,* ne sont en effet que les dépouilles. Ce génie original et rénovateur paraît tout entier dans l'ouvrage sur les *familles des plantes.* Nul homme n'a plus cherché qu'Adanson à débarrasser la science de ses entraves systématiques; nul n'a plus complétement mis au jour le vice radical de tous ces systèmes artificiels, c'est-à-dire *partiels,* fondés sur une seule partie, sur un seul organe, et sur un organe arbitrairement choisi; nul n'a mieux vu enfin que la méthode, pour être naturelle, c'est-à-dire *complète,* doit reposer sur l'*universalité* des parties; mais ce qu'il n'a pas vu, c'est la subordination de ces parties les unes aux autres. Et ce qui montre jusqu'à quel point peut aller la prévention, même dans un esprit de cet ordre, c'est cette phrase curieuse que je trouve dans le Rapport d'Adanson à l'Académie sur le premier mémoire de M. de Jussieu : « Les principes de M. de Jussieu, dit Adanson dans « ce Rapport, demeuré inédit et conservé dans nos archives, « souffriront peut-être quelque difficulté de la part des bo- « tanistes qui croient qu'une méthode, pour être naturelle, « doit se fonder sur toutes les parties prises ensemble, sans « donner à aucune une préférence exclusive sur toutes les « autres. » Ici la méprise d'Adanson est évidente pour tout le monde; ce qu'il rejette sous ces mots de *préférence exclusive,* c'est précisément la *subordination des parties;* et rejetant la subordination des parties ou des caractères, il rejette par là même celle des groupes, du moins dans ce que ces groupes ont de plus élevé; il n'admet que des *familles,* dont il porte le nombre à cinquante-huit; il n'admet pas de *classes;* il ne voit pas cette compréhension de tous les groupes les uns dans les autres, depuis le premier jusqu'au dernier, depuis l'espèce jusqu'au règne; et cette généralisation graduée qui des espèces remonte aux genres, des genres aux familles, des familles aux classes, des classes au règne, et qui, sous un autre point de vue, sous le point de vue abstrait, est toute la méthode, cette généralisation graduée lui échappe.

L'homme dont M. de Jussieu a le plus profité pour son grand ouvrage, est son oncle Bernard. Cependant le *Catalogue* de Bernard n'offre, comme le tableau des *Ordres* de Linné, que des séries de noms. Mais les principes qui guidaient Bernard dans son *Catalogue,* soit pour la formation des familles, soit pour la réduction des familles en classes, ces principes nous ont été fidèlement conservés par son neveu, et ce sont ceux-là même que je viens d'exposer : la subordination des caractères entre eux, et l'assujettissement des caractères aux groupes.

Bernard a donc l'honneur d'avoir posé les premières bases de l'ordre naturel; il a vu les principes sur lesquels cet ordre se fonde. Mais, d'une part, il s'est borné à appliquer ces principes, sans en développer, sans en bien débrouiller peut-être la théorie, et, de l'autre, en fait d'application même, il s'est borné à des séries de noms. Il n'y a rien dans Bernard, ni de cette philosophie de la méthode, qui a découvert un nouvel horizon aux sciences naturelles, ni de ce choix raisonné des caractères qui, diversement groupés, donnent toutes les familles; et ce sont là les deux vrais titres, les deux titres éternels de M. de Jussieu.

A Dieu ne plaise qu'on puisse nous soupçonner de vouloir élever ici l'un de ces deux hommes célèbres aux dépens de l'autre. Bernard est l'inventeur; il a fait les premiers pas; si son neveu est allé plus loin que lui, c'est qu'il est parti du point où son oncle l'avait conduit. Je cherche la vérité, je la cherche dans l'étude seule de leurs pensées, et il me semble que le caractère particulier de leur génie s'y démêle et s'y reconnaît à des traits distincts. Bernard, par la force d'une pénétration heureuse, a vu les principes de l'ordre naturel, mais il les a vus sans s'en rendre compte, et beaucoup plus pour lui que pour les autres; Laurent les a vus en s'en rendant compte, et en les exposant aux autres; ces principes, si je puis ainsi dire, naissent dans l'un, ils mûrissent dans l'autre; l'un les aperçoit, l'autre les explique; en un mot, l'un est ce premier âge où le génie découvre, l'autre est ce second âge où le génie raisonne ce qu'il a découvert; et il y a, entre M. de Jussieu et son oncle, entre leurs travaux, entre leurs manières, entre la forme de leur pensée, toute la différence qu'il y a entre ces deux âges.

Si, après avoir comparé l'ouvrage de M. de Jussieu à ce qui avait été fait avant qu'il parût, nous le comparons à ce qui est venu après, sa place n'en demeure pas moins unique.

Nous avons vu que l'auteur avait établi cent familles primitives; aucune de ces familles n'a été supprimée; plus de la moitié n'a subi aucune modification. Trois ont été portées, et portées tout entières, dans des groupes voisins, ce qui n'est qu'un mode différent d'association. La plupart des autres, par l'effet naturel de tant d'espèces nouvelles recueillies depuis près d'un demi siècle, ont dû être découpées et sous-divisées; mais presque aucune ne l'a été que sur des sections, sur des coupes, établies par M. de Jussieu lui-même. Enfin, il y en a cinq, et seulement cinq, qui ne se sont trouvées naturelles que par fragments.

Les erreurs ne portent donc que sur quelques fragments de familles, sur quelques genres épars; et encore ici une note, une indication, un doute, viennent-ils, presque toujours, mettre sur la voie de la vérité, et d'une vérité que la sagacité la plus merveilleuse pouvait seule entrevoir alors, tant les éléments desquels l'auteur l'a déduite étaient peu nombreux, et tant il a fallu depuis en rassembler de nouveaux pour l'établir d'une manière complète.

Et maintenant si l'on demande quel est le mérite particulier, le mérite attaché, si je puis ainsi dire, à chaque page de cet ouvrage, et par lequel il se distingue si fortement de tous ceux qui avaient paru jusque-là dans une carrière si vaste et déjà si souvent battue, il sera facile de répondre que ce mérite réside surtout dans cette précision continue des détails, qui marque à chaque fait sa véritable place; qui, ne se bornant pas aux résultats principaux, en tout genre rapidement saisis, ne néglige aucune de ces vérités de tous les ordres sur lesquelles ces résultats se fondent; mérite essentiel dans une étude où tous les faits sont nécessaires, où presque aucun ne peut être suppléé par un autre, où presque tous sont également pénibles à acquérir; mérite le plus rare peut-être, et qui explique bien ce mot profond de Buffon, que la patience, c'est-à-dire, la constance dans les grands efforts, est le génie.

On a reproché à M. de Jussieu, et avec raison, la disposition de quelques-unes de ses classes, fondées sur les formes de la corolle. C'est en effet là le point vulnérable de sa méthode; et lui-même le déclare formellement. « Ces classes ont, « dit-il, le défaut de ne pas pouvoir subsister sans admettre « des exceptions. » Il ajoute que, à ne considérer que la rigueur et non la commodité de la méthode, il aurait dû s'en tenir aux seuls caractères invariables, les *lobes de l'embryon* et l'*insertion des étamines*. Cependant, à mesure que le nombre des espèces s'est accru de plus en plus, on a fini par trouver qu'il n'est pas jusqu'à ce dernier caractère, pris de l'insertion des étamines, qui ne puisse varier, et qui ne doive par conséquent être exclu des caractères classiques.

Tout est venu confirmer, au contraire, la grande division fondée sur les lobes de l'embryon. M. Desfontaines, par une des plus belles découvertes de l'anatomie végétale, a fait voir que les rapports tirés des organes de la végétation répondent partout, dans cette division, aux rapports tirés des organes de la fructification. On peut même dire que cette éclatante confirmation, puisée dans la structure des tiges, place les trois premiers groupes du règne végétal dans un rang particulier, et que ne marque pas assez le nom commun de *classe*, également imposé par M. de Jussieu à ces trois premiers groupes et aux groupes suivants. On peut les comparer aux quatre *embranchements* du règne animal établis par M. Cuvier, et sous lesquels viennent se ranger, à une certaine distance, les classes proprement dites, et peut-être conviendrait-il de les désigner de même, dans les deux règnes, par une dénomination propre et déterminée.

Comment donc remplir l'intervalle qui sépare ces trois premiers groupes du règne végétal, des simples *familles*, sans admettre, entre ces groupes et ces familles, rien d'artificiel, d'arbitraire? Ici encore M. de Jussieu a le mérite d'avoir tracé la voie par l'association, plus d'une fois indiquée dans son ouvrage, de plusieurs familles entre elles; et c'est ce que M. Robert Brown a admirablement vu. « Le problème actuel, dit-« il, est de combiner les familles en groupes plus considéra-

« bles, et également naturels. » Et c'est en effet ce problème, déjà résolu par M. Brown lui-même pour un certain nombre de cas, qui, résolu pour tous, donnerait la bonne classification générale.

Lorsque M. de Jussieu eut publié son ouvrage, il fut sans contredit le premier naturaliste de son époque. Cependant, il ne faut pas croire que cet ouvrage ait eu, dès l'abord, tout l'éclat qu'il a eu plus tard. On était en 1789 : au milieu de cette révolution profonde qui ouvrait à la France toutes les portes de ses destinées nouvelles, il n'était guère possible que l'on s'aperçût beaucoup d'une révolution qui s'opérait dans la botanique. D'ailleurs, cet ouvrage était trop en avant des idées reçues, pour pouvoir être bien compris sans une longue étude. Ce ne fut donc qu'assez lentement que les principes de M. de Jussieu pénétrèrent parmi les naturalistes, et surtout parmi les naturalistes étrangers.

En France, dès que le nouvel ordre social, assis sur ses bases, permit le retour des études paisibles, une circonstance particulière vint donner tout à coup à ces principes une nouvelle force et une influence inattendue. Un jeune naturaliste, jusque-là caché dans une petite ville de province, et à la découverte duquel, car c'en fut une, et que plusieurs de nos contemporains se sont disputée, et à la découverte duquel M. de Jussieu lui-même a l'honneur d'avoir eu part, publia, en 1795, deux mémoires, l'un sur les *Principes de la classification des mammifères*, l'autre sur la *Classe des vers de Linné ;* et ces deux mémoires furent pour la zoologie ce que les deux premiers mémoires de M. de Jussieu avaient été pour la botanique ; ils changèrent la face de cette science ; et dès lors, en zoologie comme en botanique, les mots *méthode na-*

turelle eurent leur sens complet; la *méthode naturelle* fut la *méthode fondée sur l'organisation.*

M. Cuvier a rendu longtemps après, et dans une occasion solennelle, un noble hommage à M. de Jussieu. Il déclare hautement, dans son *Rapport historique sur les progrès des sciences naturelles depuis* 1789, « que l'ouvrage de M. de Jussieu « fait, dans les sciences d'observation, une époque peut-être « aussi importante que la *Chimie* de Lavoisier dans les sciences « d'expérience. »

Je ne sais pourtant si cet autre hommage, qu'il lui rend dans le premier des deux mémoires que je viens de citer, n'a pas quelque chose de plus remarquable. « Les zoologistes, y « dit M. Cuvier, n'avaient aucune idée de ce calcul des carac- « tères, dont les botanistes avaient cependant entrevu la réa- « lité, et qu'un d'entre eux a si bien développé dans un « ouvrage dont toutes les branches de l'histoire naturelle sen- « tiront bientôt l'heureuse influence, quoiqu'il n'ait été di- « rigé que vers l'une d'elles. » Ici, comme on voit, la chaîne philosophique des progrès se renoue; et les efforts du jeune Cuvier pour la rénovation de la zoologie se rattachent au livre même qui venait de renouveler la botanique.

Mais la zoologie offrait aux applications de la *méthode naturelle,* et particulièrement aux applications de la méthode naturelle fondée sur le raisonnement, un champ beaucoup plus vaste que la botanique. Dans les animaux, les organes sont plus distincts, les fonctions plus tranchées, et par suite la subordination des caractères plus évidente. Les modifications des organes externes y dépendent, d'une manière visible, des modifications des organes internes; le cerveau, le cœur, les poumons, par exemple, ne peuvent changer sans que les autres parties, nécessairement corrélatives à celles-là, changent aussi; la raison de cette concordance rigoureuse entre toutes les modifications de l'économie animale est palpable : le principe de la *subordination des organes* y devient le principe même des *conditions de l'existence des êtres*.

Aussi, la science des caractères a-t-elle pris, par son application à la zoologie, un nouvel essor. La méthode s'est complétée, en se généralisant, en s'étendant d'un règne organisé à l'autre; et il n'est pas jusqu'aux deux auteurs qui, comparés entre eux, n'offrent des traits distincts, et par lesquels ils se complètent eux-mêmes : M. de Jussieu plus fait pour suivre la chaîne continue des détails avec une patience opiniâtre et une infatigable sagacité; M. Cuvier plus fait pour passer aux dernières conséquences d'un vol rapide et qui franchit les intermédiaires : l'un né pour ne pas se rebuter dans la marche expérimentale, la seule, du moins actuellement, applicable à la botanique; l'autre pour embrasser d'un coup d'œil plus prompt la marche rationnelle, à laquelle se prêtait mieux la zoologie : tous deux ayant donné à la pensée humaine un nouveau ressort logique, le ressort de la *méthode*, laquelle, consistant à réunir les objets par leurs qualités communes, est en effet aux sciences d'observation, ce que l'*analyse*, ou l'art de les décomposer en leurs éléments distincts, est aux sciences d'expérience.

Et de même que l'*analyse*, née des expériences de Galilée, a passé peu à peu des sciences physiques dans la science plus générale de l'*entendement*, en devenant l'*analyse philosophique* de Condillac, de même la *méthode*, née des recherches des naturalistes modernes, n'attend, pour produire tous ses effets, que l'étude abstraite du philosophe. Et dès lors seulement, la philosophie générale, qui ne résulte pas moins de l'*art de classer les idées*, jusqu'ici négligé par elle, que de l'*art de les décomposer,* dont elle s'est occupée avec tant de soin, sera complète.

M. de Jussieu avait publié son ouvrage en 1789. Presque toujours enfermé dans son cabinet pendant ces années d'un travail sans relâche, il était demeuré étranger au mouvement politique qui poussait alors la nation entière. Son ouvrage était à peine terminé, lorsqu'il se trouva chargé de l'un des départements de la mairie de Paris. La mairie de Paris, alors unique, se partageait, comme on sait, en plusieurs départements. Celui des hôpitaux échut à M. de Jussieu; et c'est à cette occasion qu'il publia son *Rapport sur les hôpitaux de Paris,* genre de travail le plus fait sans doute pour rendre les sciences respectables, et dans lequel l'auteur n'avait été précédé encore que par un autre membre de cette Académie, dont la mémoire sera éternellement vénérée parmi les hommes, l'illustre et infortuné Bailly.

En 1793, le Jardin des Plantes reçut une organisation nouvelle, et prit le titre de *Muséum d'histoire naturelle.* Daubenton en fut le premier Directeur; M. de Jussieu lui succéda. Dans ces temps difficiles, M. de Jussieu se dévoua tout entier à l'administration de ce bel établissement, auquel se rattachaient, d'une manière si étroite, l'éclat de son nom, et presque tous ses souvenirs de famille.

Dès la création de l'Institut, il en fit naturellement partie. Il fut un des premiers présidents de la nouvelle Académie des sciences; il était vice-président l'année même qui fut marquée par la présidence de Napoléon.

En 1804, la chaire de matière médicale de la Faculté de médecine, étant devenue vacante par la mort de Peyrilhe, il se présenta, et tous les concurrents se retirèrent.

Devenu professeur, il prit pour base de ses leçons le principe fécond de l'accord des propriétés des plantes avec les affinités botaniques; principe qu'il avait signalé dès ses premiers travaux; application nouvelle de la méthode naturelle, et marche la plus propre peut-être à étendre le domaine de la matière médicale.

Il fut nommé au Conseil de l'Université en 1808.

Pendant la seconde moitié de sa vie, la pensée la plus constante de M. de Jussieu a été de donner une seconde édition de son grand ouvrage. Malheureusement, ses forces diminuant à mesure que les matériaux de la science s'accroissaient, il n'a pu laisser, de ce beau travail, que des fragments, mais tous d'une profondeur rare, et qui suffiraient seuls pour la réputation d'un autre.

Ces fragments forment une suite de mémoires, insérés de 1804 à 1820, et presque sans interruption, dans les *Annales du Muséum*. Plus de la moitié des cent familles primitives de l'auteur y est revue; chacune de ces familles y est examinée en détail, et dans chacun des genres qui la composent. M. de Jussieu n'avait pu profiter, en 1789, du grand ouvrage de Gærtner sur les *fruits*. Il le prend, cette fois, pour terme de comparaison, et, si je puis ainsi dire, pour pierre de touche de tous les nouveaux rapprochements qu'il essaye. En étudiant la graine, Gærtner avait porté l'anatomie sur cet organe même dont M. de Jussieu tirait les principales bases de sa méthode. Appliquées à la science des rapports, les observations de Gærtner prennent une importance nouvelle et inattendue; M. de Jussieu s'en sert pour répandre un jour nouveau sur le calcul des caractères, sur la formation des familles, sur cet art, jusqu'à lui si peu connu en botanique, d'appliquer l'un à l'autre ces deux ressorts, desquels seuls dépendent désormais tous les progrès futurs de la science, l'anatomie et la méthode.

M. de Jussieu se délassait de ces travaux profonds par des écrits d'un autre genre, mais dont l'histoire naturelle, et, ce qui va presque sans dire, le Jardin des Plantes, étaient toujours l'objet; je veux parler de ses *Mémoires sur le Muséum*.

Le *Jardin royal,* fondé sous Louis XIII, par un édit de 1626, ne fut d'abord qu'un *Jardin pour les plantes médicinales;* c'était même là son titre légal; son cabinet n'était qu'un *droguier*.

M. de Jussieu rappelle les faibles commencements de ce *droguier,* devenu depuis le plus magnifique établissement consacré à la nature, qui fût jamais. Il rappelle les difficultés de tout genre qu'on eut à surmonter d'abord, et la petite guerre qu'il fallut soutenir contre la Faculté de médecine, laquelle s'opposait surtout à ce que la *chimie,* objet d'une des nouvelles chaires du Muséum, *fût enseignée dans Paris, comme étant,* disait la Faculté, *pour bonnes causes et considérations défendue et censurée par arrêt du parlement.*

M. de Jussieu rappelle aussi ces hommes illustres auxquels ce bel établissement a dû la partie la plus noble de sa splendeur : les Tournefort, les Duverney, les Bernard de Jussieu , les Vicq-d'Azyr, les Buffon. Il s'arrête à la grande époque de Buffon; et l'on regrette qu'il n'ait pas ajouté l'époque qui a suivi, et qui peut-être n'a pas été moins grande.

Dans cette nouvelle époque, Haüy, dévoilant le mécanisme de la formation des cristaux, soumettait aux lois du calcul jusqu'aux phénomènes de la nature; M. de Jussieu soumettait à des lois d'une autre espèce, aux lois du raisonnement fondé sur l'expérience, les êtres nouveaux rapportés avec une profusion jusque-là sans exemple de presque toutes les parties du globe; et Cuvier, pénétrant jusque dans les couches mêmes de ce globe, y découvrait des générations perdues; il créait un art de rapprocher, de réunir les débris épars de ces générations éteintes; il leur donnait, par les seules lois de l'anatomie comparée, un nouvel être, et comme une nouvelle vie; et, à toutes ces populations des anciens mondes, ranimées par lui, sa voix puissante semblait commander *de se lever et de marcher*.

Je voudrais n'oublier aucun des écrits sortis de la main de M. de Jussieu. Je trouve dans sa *Thèse*, publiée en 1770, les premières idées nettes sur ces analogies multipliées des végétaux et des animaux, sur cette unité, si je puis ainsi dire, des deux règnes organiques; vues nouvelles alors, car elles n'avaient été indiquées encore que par Pallas; vues profondes, et qui ont été si brillamment développées depuis par Vicq-d'Azyr et M. Cuvier.

Un seul des écrits de M. de Jussieu pourrait être omis, et peut-être devrait-il l'être, car il est tout à fait étranger à l'histoire naturelle, c'est son *Rapport sur le magnétisme animal*, publié en 1784. Rien, dans cet écrit, ne se rattache à ces questions profondes et positives, sujet habituel des pensées du grand naturaliste; et par conséquent il ne saurait en coûter beaucoup d'avouer ici que rien, non plus, n'y rappelle l'esprit judicieux et ferme du législateur de la botanique.

La Restauration avait trouvé M. de Jussieu au Conseil de l'Université et à l'École de médecine. En 1815, le Conseil de l'Université fut remplacé par celui de l'Instruction publique, et M. de Jussieu ne fut pas appelé dans ce nouveau Conseil. En 1822, il fut exclu de l'École de médecine, avec Vauquelin, Chaussier, Pinel, Deyeux, des Genettes, etc. En 1830, lorsque l'injustice put être réparée, plusieurs de ces hommes célèbres, Vauquelin, Chaussier, Pinel, étaient morts; et M. de Jussieu lui-même, alors âgé de quatre-vingt-deux ans, était trop vieux pour reprendre sa place à la Faculté.

Déjà, dès 1826, il s'était démis, pour son fils, M. Adrien de Jussieu, de sa chaire du Muséum; quelques années après, en 1831, il eut le bonheur de voir entrer ce fils à l'Académie.

Le travail avait été, toute sa vie, un besoin pour lui. Tout le temps que lui laissaient ses fonctions, il le passait dans son cabinet, à étudier, à ranger ses plantes. Il avait l'habitude de lire jusque dans les rues.

Par une conformation particulière de famille, sa vue avait toujours été fort basse: il était encore dans la force de l'âge, lorsqu'il perdit entièrement l'usage d'un œil; et, vers la fin de sa vie, la vue de l'autre s'affaiblit au point de ne plus lui permettre ni d'écrire, ni d'observer.

Ne pouvant plus, dès ce moment, travailler par lui-même, il se fit rendre compte des travaux des autres. Tous ces soins délicats qu'il avait eus pour son oncle Bernard, devenu aveugle, une main plus chère encore les eut alors pour lui. On cherchait des problèmes qui pussent exercer cet esprit, né, comme celui de Bernard, pour méditer et pour combiner. On le tenait au courant des découvertes nouvelles; et, parmi ces découvertes, si quelque chose se rapportait à ses idées sur les caractères et sur la méthode, l'instinct botanique, toujours en éveil chez lui, le saisissait aussitôt; chaque chose était promptement réduite à sa plus simple expression; puis M. de Jussieu rédigeait ces nouveaux résultats dans un latin d'une élégance singulière; et, préparant une seconde édition de l'*Introduction* de son grand ouvrage, il ne se reposait point qu'il ne les y eût fait entrer.

On vient de publier, dans les *Annales des sciences naturelles*, ce dernier écrit de M. de Jussieu, œuvre d'un vieillard presque nonogénaire. On est étonné d'y voir jusqu'à quel âge reculé l'auteur avait conservé toute la netteté de son esprit; on l'est plus encore d'y voir avec quelle force avaient dû s'emparer de sa tête ces idées qui, produites une première fois en 1773, reproduites en 1774 et en 1789, et constamment remaniées depuis, l'ont occupé jusqu'à sa dernière heure.

Cependant il ne se faisait point illusion; il répétait souvent qu'il ne travaillait ainsi que par besoin, par habitude, et non pour instruire les autres.

On l'entendit même un jour expliquer, avec bonhomie, à son secrétaire, pourquoi il écrivait en latin plutôt qu'en français. D'abord, disait-il, cela m'emploie du temps, et c'est autant de gagné; et puis des choses fort ordinaires, dites dans une langue étrangère, prennent une physionomie moins banale; si je les exprimais dans la mienne, je jugerais tout de suite qu'elles n'en valent pas la peine, et je ne ferais plus rien.

M. de Jussieu a joui de toute sa gloire; mais il ne cessa jamais de rapporter la plus grande part de cette gloire à son oncle; et ce sentiment lui inspira, il y a peu d'années encore, un mot heureux. Quelqu'un complimentait, devant lui, son fils sur le bonheur de porter un aussi beau nom que le sien. Oui, répondit M. de Jussieu, c'est vrai; il m'a été bien utile.

Jusque dans les dernières années de sa vie, il n'a jamais manqué, quand il était à Paris, de se rendre à l'Académie; et alors même qu'il n'y voyait presque plus et qu'il n'entendait plus, il s'y rendait toujours; il était heureux du sentiment seul de se retrouver parmi ses confrères.

Il a été soixante-trois ans membre de cette Académie; et soixante-six ans professeur au Jardin des Plantes, soit en qualité de suppléant, soit en titre.

A la campagne, où il passait, sur la fin de sa vie, une partie de l'année, son plaisir, presque unique, était la promenade. Il cherchait encore des plantes; et, quoiqu'il n'y vît presque plus, ainsi que je viens de le dire, il approchait ces plantes de ses yeux jusqu'à ce qu'il les eût reconnues. Quand il n'y vit plus du tout, il chercha à les reconnaître au tact; et, d'y réussir, était pour lui un petit triomphe. C'était en effet une sorte de problème, d'énigme, de difficulté vaincue: tel avait toujours été le tour de son esprit, et le tour qu'il avait voulu donner à la botanique. On peut en juger par ces paroles que j'emprunte à l'un de ses premiers mémoires, paroles qu'il est d'autant plus à propos de rappeler à la fin de cet Éloge, que l'auteur, en cherchant à y définir, à sa manière, les qualités du grand botaniste, semble s'y être peint lui-même. « Un homme d'esprit, dit M. de Jussieu, peut faire des « systèmes, il peut les varier à l'infini; mais l'ordre naturel « ne sera jamais l'ouvrage que d'un botaniste consommé en « qui la patience pour examiner les plus petits détails égale

« le génie pour en tirer des conséquences, pour former des « suites, pour faire en un mot, de la botanique, non une « science de mémoire et de nomenclature, mais une science « nouvelle qui ait ses combinaisons et ses affinités comme la « chimie, ses problèmes comme la géométrie. »

Le caractère de M. de Jussieu s'était développé de bonne heure; il s'est constamment soutenu le même. Les habitudes sévères de Bernard avaient donné à ce caractère une maturité précoce. Fort jeune encore, M. de Jussieu obtenait déjà de tous ceux qui l'entouraient, et souvent de personnes beaucoup plus âgées que lui, une estime mêlée de respect.

Il avait, comme son oncle Bernard, une piété sincère.

Quoique homme d'un génie supérieur, quoique savant d'une célébrité rare, il a eu le secret de se ménager une carrière paisible; et ce secret, il l'a trouvé surtout dans le calme philosophique de son esprit. Il s'est laissé attaquer, à peu près dans toutes les langues, sans jamais répondre. Il disait que, s'il s'était trompé, il était tout simple qu'on l'attaquât; et que, s'il ne s'était pas trompé, toutes les attaques seraient bien vaines.

M. de Jussieu s'était marié deux fois; la première en 1779, et la seconde en 1791. Il a eu deux filles du premier mariage; et, du second, une fille et un fils; ce fils est M. Adrien de Jussieu, membre de cette Académie.

Par un contraste remarquable, au milieu de tant de rapports qu'il avait avec son oncle Bernard, M. de Jussieu aimait autant la société que Bernard avait aimé la solitude. A la vérité, cette société dont il avait besoin se bornait presque à sa famille; mais cette famille était fort nombreuse. Outre les personnes que je viens de nommer, il avait appelé auprès de lui, par une sorte d'adoption, deux neveux et une nièce, laquelle devint plus tard l'épouse de son fils.

M. de Jussieu était adoré de toute cette famille. On sait quels ont été les soins religieux qu'avaient pour lui madame de Jussieu, sa seconde épouse, et mademoiselle de Jussieu, l'une des deux filles de son premier lit. Tous les membres de sa famille partageaient ces soins, ou du moins ils auraient tous voulu les partager.

De son côté, il avait une affection inépuisable pour tous les siens. Il se plaisait particulièrement à réunir autour de lui ses petits-enfants, à les voir jouer, à jouer avec eux; il trouvait que sa bibliothèque avait cela de bon, que les figures de fleurs et d'animaux dont elle était remplie, les retenaient souvent auprès de lui pendant des heures entières.

Il aimait les jeunes gens. Ayant eu le privilége de vivre longtemps, il avait eu le malheur attaché à ce privilége: il avait perdu peu à peu la plupart de ses premiers amis; à mesure, les générations nouvelles lui en avaient donné d'autres; et il est mort environné de jeunes botanistes dont l'affection ne le touchait pas moins sans doute que le respect.

L'âge l'avait extrêmement courbé; mais naturellement sa taille était très-élevée. Sa constitution était forte. Il dut à son goût pour l'exercice de la promenade, à l'habitude du travail, qui est l'exercice de l'esprit, et qu'il sut prolonger jusqu'à ses derniers jours, et aux soins de tout genre dont il était entouré, une santé ferme qui ne fut troublée que sur la fin de sa vie, et qui ne le fut que par quelques indispositions légères. Sa dernière maladie ne s'annonça pas même d'une manière plus grave; mais bientôt le défaut d'action, complet et persistant, des organes digestifs, fit perdre toute espérance.

Il s'éteignit le 17 septembre 1836, âgé de 88 ans 5 mois et 5 jours.

Pendant près d'un demi-siècle, qui s'était écoulé depuis la publication de son grand ouvrage, sa supériorité ne fut contestée par personne. Il vit tous les botanistes qui vivaient autour de lui, travailler à perfectionner sa méthode; Desfontaines la confirmait par ses belles observations sur la structure des tiges; du Petit-Thouars l'appliquait avec une sagacité singulière; Richard, le père de l'analyse végétale exacte et détaillée, et dont on connaît le langage austère, appelait l'auteur de cette méthode, *le premier botaniste de l'Europe;* tous les botanistes célèbres, qui se sont élevés pendant ce demi-siècle, l'ont proclamé leur maître : il a été donné à peu d'hommes d'exercer une telle influence sur les autres hommes, et à bien moins encore d'en être les témoins; carrière peut-être unique, qui s'étend un nombre d'années à peu près égal dans le XVIII^e^ et dans le XIX^e^ siècle, et qui, par sa contemporanéité comme par sa gloire, se lie aux deux plus grands événements des sciences naturelles dans ces deux siècles, la *Chimie* de Lavoisier, publiée en 1789, la même année que l'ouvrage de M. de Jussieu, et par laquelle se ferme le XVIII^e^ siècle, et les *Recherches sur les ossements fossiles* de G. Cuvier, par lesquelles s'ouvre le XIX^e^.

NOTES.

Page ij... *Antoine ne tint pas, pour la botanique, tout ce que semblait promettre son génie facile et si singulièrement précoce.*

Il a cependant laissé un grand nombre de mémoires. On voit, par son *Discours sur le progrès de la botanique au Jardin royal* (Paris 1718), et plus particulièrement encore par son *Introduction à la connaissance des plantes*, écrit qui fait suite au précédent, qu'il s'en tenait à peu près à la méthode de Tournefort.

Mais il se faisait déjà, grâce à Vaillant, des idées plus justes de la fleur. « Nous entendons, dit-il, par fleurs, ce composé de parties appelées dans « les plantes *étamines* et *pistil*, servant à leur multiplication; et nous ne « regardons ces feuilles colorées qui environnent ces parties que comme « des enveloppes propres à leur conservation; enveloppes qui, pour les « distinguer des feuilles de la plante, se nomment, en langage de bota-« niste, *pétales.* »

Quelques-uns de ses mémoires indiquent une grande sagacité. En reconnaissant, le premier, dans les impressions de plantes, si fréquentes sur les houilles de Saint-Étienne et de Saint-Chaumont, et prises pendant si longtemps pour des jeux de la nature, des fougères, et des fougères analogues plutôt à celles des climats tropicaux, qu'aux fougères actuelles de la France, il fit faire un véritable pas à l'étude philosophique des fossiles. Il reconnut aussi, dans d'autres *pétrifications* recueillies sur divers points de la France, des débris de plusieurs animaux, et nommément de poissons, et de poissons de la mer des Indes, des débris d'hippopotame, etc.

Parmi ses nombreux mémoires, les uns se rapportent à la botanique (ses mémoires sur les *champignons*, le *café*, le *simarouba*, le *contrayerva*, *le cierge du Pérou*, le *cachou*, etc.); d'autres à la géologie (ses deux importants mémoires sur les *Causes des impressions des plantes marquées* *sur certaines pierres des environs de Saint-Chaumont dans le Lyonnais*, et sur les *pétrifications qui se trouvent en France de diverses parties de plantes et d'animaux étrangers;* celui sur *quelques ossements d'une tête d'hippopotame*, celui sur la *corne d'Ammon*, etc.); et quelques-uns à l'anatomie (ses mémoires sur *une fille sans langue*, sur le *sperma ceti*, etc.).

Né à Lyon le 8 juillet 1686, mort à Paris le 22 avril 1758.

Page iij... *Joseph ne revit la France qu'après trente-six années des fatigues les plus pénibles...*

Condorcet remarque que, « par une singularité unique, il fut académi- « cien pendant trente-six ans, sans avoir jamais paru à l'Académie. » En effet, il avait été nommé en 1743, lorsqu'il était au Pérou; et son état, à son retour, ne lui permit pas de se rendre aux assemblées de la Compagnie.

Condorcet remarque encore que, « il consacra aux sciences sa vie en- « tière, et qu'il n'a pas même publié un seul mémoire. »

Quoiqu'il n'ait pas écrit, il a rendu de vrais services à la science. L'Europe lui doit plusieurs plantes nouvelles, l'*héliotrope*, le *cierge du Pérou*, etc. Ses herbiers ont fourni des espèces remarquables, et, jusqu'à lui, inconnues. On a tiré des renseignements utiles de sa correspondance avec ses frères. La publication de ses *Notes* (accompagnées de plans et de dessins) pourrait rendre encore de nouveaux services. Malheureusement, la plupart de ces *Notes*, et les plus intéressantes peut-être, celles qui se rapportaient à ses voyages dans l'intérieur des Cordillères, lui furent enlevées avec une partie de ses collections.

Né à Lyon le 3 septembre 1704, mort à Paris le 11 avril 1779.

Page iij... *Homme étonnant, dont le nom remplissait le monde savant, et qui n'avait presque rien écrit.*

On n'a de Bernard, en botanique, que trois mémoires: le premier, sur la *pilulaire;* le second, sur le *lemma ;* le troisième sur les fleurs d'une espèce de *plantain* (*plantago monanthos*), dont on ne connaissait que les fleurs mâles, et dont il a découvert les fleurs femelles.

Son mémoire sur quelques *productions marines*, prises pour des plantes, confirma la belle découverte de Peyssonnel, touchant l'origine animale de ces productions.

Ses *Ordres naturels*, « le dernier de ses ouvrages, et le plus solide mo-« nument de sa gloire, » selon les expressions de M. de Jussieu lui-même (*Mémoires sur le Muséum*), ses *Ordres naturels*, plus connus sous le titre de *Catalogue de Trianon*, n'ont point paru de son vivant. Ce *Catalogue*, devenu si fameux comme première ébauche des familles naturelles du *Genera plantarum*, n'a été publié que par M. de Jussieu, qui le plaça en tête de son grand ouvrage.

« Cet homme modeste, dit M. de Jussieu, dans son mémoire de 1774, « en parlant de son oncle, n'a pas publié son travail, parce qu'il s'est cru « trop peu avancé dans la science. Il voulait auparavant diminuer le nom-« bre des vides occasionnés par l'absence des familles inconnues, et atten-« dait que de nouvelles découvertes le missent à portée de réformer les « articles douteux. »

Né à Lyon le 17 août 1699, mort à Paris le 6 novembre 1777.

Le père de ces trois hommes célèbres, docteur en médecine, et maître-apothicaire à Lyon, se nommait *Laurent de Jussieu*. Leur mère se nommait *Lucie Cousin*.

PAGE vij... *Dans tout être organisé, soit végétal, soit animal, chaque partie a des rapports nécessaires avec toutes les autres. On peut donc juger de toutes par chacune....*

C'est pourquoi quelques-unes (et particulièrement les plus *externes*, parce qu'elles sont les plus évidentes, les plus commodes pour l'observateur) peuvent être prises pour *caractères*, pour *signes*, de toutes les autres. J'ai exposé dans l'*Éloge* de M. Cuvier, et d'après M. Cuvier même, les raisons de cette concordance, de cette *corrélation* de toutes les parties entre elles dans les animaux; là, ces raisons sont palpables, comme je le dis plus loin.

A défaut du côté rationnel de cette *corrélation* des parties, pour longtemps encore, peut-être, caché en botanique, M. de Jussieu en avait parfaitement saisi, dès son mémoire de 1773, le côté expérimental.

« Il est vrai, dit-il dans ce mémoire, que les caractères fondamentaux

« d'un ordre quelconque, doivent toujours être pris dans la fructification ;
« mais en même temps il faut regarder ceux que fournissent les autres
« parties, comme des caractères accessoires, *qui annoncent l'existence des*
« *précédents*.... C'est ainsi que, chez les animaux, la disposition extérieure
« des parties indique le nombre des ventricules du cœur, et les autres
« distinctions classiques ou génériques. »

Il dit, dans son mémoire de 1774 : « Les caractères simplement géné-
« raux sont ordinairement liés à quelques-uns des caractères essentiels... ;
« ce qui procure des signes accessoires *qui annoncent l'existence des vrais*
« *caractères*. » Il dit encore, à propos des organes des animaux : « Il n'est
« pas toujours aisé de déterminer quels sont les plus essentiels ; et comme
« ils sont internes..., il faut avoir recours à des signes extérieurs pour les
« indiquer. Celui qui se contenterait de ces signes secondaires, *sans éta-*
« *blir leur affinité avec les parties intérieures*, n'aurait qu'une idée impar-
« faite des vrais rapports qui existent entre les animaux. »

Page viij... *Les idées de Vaillant sur les sexes des plantes...*

Voyez son *Discours sur la structure des fleurs, leurs différences et l'usage de leurs parties, prononcé à l'ouverture du Jardin royal de Paris, le* 10 *juin* 1717.

Page viij... *Le problème relatif à la méthode n'a été résolu que par M. de Jussieu.*

La solution de ce problème commence avec Gessner et Césalpin, comme je l'ai dit plus haut.

La subordination expresse des caractères est déjà clairement indiquée dans cette phrase de Morison : *Notas genericas et essentiales à seminibus eorumque similitudine petitas per tabulas cognationis et affinitatis disponentes stirpes exhibemus. Differentias autemspecificas à partibus ignobilioribus, scilicet, radice, foliis et caulibus.... desumptas adscribimus* (*Plantarum historia*, etc.).

Au fond, le problème de la *valeur relative* des caractères est implicitement compris dans toute méthode ; mais personne, avant M. de Jussieu, ne s'était bien rendu compte des moyens de le résoudre. Le principal de ces moyens a été, comme nous le verrons plus loin, de faire sortir la *subordination* des caractères de l'*assujettissement* de ces mêmes caractères aux groupes, c'est-à-dire, en un seul mot, de leur *constance*.

De plus, tous les caractères avaient été essayés un à un ; mais il fallait choisir entre ces caractères, il fallait les combiner ensemble, il fallait enfin, dans un caractère important, déterminer la circonstance qui le rendait tel.

On a souvent cité cette phrase de Linné : *Sciant nullam partem universalem magis valere quam illam à situ, præsertim seminis. Class. plant.*, p. 487. Or, dans cette phrase, Linné entend la position de l'embryon par rapport à la graine et à ses parties, ce qui n'est qu'un caractère très-secondaire.

Pour bien démêler tout ce qu'il y a de neuf dans M. de Jussieu, il suffit de porter l'analyse dans la plupart des principes, plus ou moins heureux, mais aussi plus ou moins vagues, qui avaient été proposés avant lui.

P. IX... *Les différences remarquables et simples que l'on observe dans l'embryon, influent sur le développement général de la plante et sur son organisation entière...*

M. de Jussieu s'exprime à peu près ainsi, aux mots : *Méthode naturelle*, du *Dictionnaire des sciences naturelles*. Dans son mémoire de 1774, il avait dit : « Une conformation différente dans l'embryon végétal occa-« sionne, dans le développement et l'organisation de la plante, des diffé-« rences remarquables qui constituent autant de caractères : ces différences « étant dépendantes de celles de l'embryon, les caractères qu'elles donnent, « dépendent également d'un seul qui détermine leur existence; d'où il suit « que le caractère tiré de l'embryon doit avoir une valeur égale à celle de « tous les autres réunis ensemble. »

P. IX... *Buffon conçut le projet d'un agrandissement digne de l'époque à laquelle son nom devait servir de date.*

Je ne parle ici que de l'agrandissement de 1774. Un nouvel agrandissement fut dû à Buffon en 1785. (Voyez les *Mémoires de M. de Jussieu sur le Museum*).

P. XI... *Ces* ORDRES NATURELS, *tels que Bernard en avait conçu l'ensemble, se trouvaient compris dans* SEPT *classes...*

Dans son mémoire de 1774, M. de Jussieu s'exprime ainsi: « Le règne « animal n'a que *sept* classes; on n'en compte pas plus dans le règne « végétal, en suivant les divisions de Trianon. »

Ce nombre *sept* résulte en effet de l'emploi de la seule *insertion des étamines* pour la subdivision des *monocotylédones* et des *dicotylédones.*

On a alors *trois* classes pour les *monocotylédones, trois* pour les *dicotylédones;* en tout, *six* classes. Les *acotylédones*, laissées indivises, à cause de leurs fleurs si peu apparentes et si peu connues, forment la *septième.*

P. *id... Il porte le nombre des classes du règne végétal à quatorze....*

Il le porta plus tard, dans son *Genera plantarum*, à *quinze*, par l'addition, dans les *dicotylédones apétales*, de la classe des *apétales* à *étamines épigynes.*

P. id... L'insertion des étamines sur le pistil, sur le support du pistil, sur le calice, sur la corolle, donne les divisions suivantes...

L'insertion des étamines, prise en soi, est toujours de trois sortes : sur le pistil, sur le support du pistil, ou sur le calice. Le point important était de ramener les formes de la corolle à l'insertion des étamines.

Or, considérées relativement à la corolle, les *dicotylédones* (car il n'y a de corolle que dans les *dicotylédones*) sont *apétales, polypétales*, ou *monopétales.*

Dans les *apétales*, l'insertion des étamines est *essentiellement immédiate*, puisqu'il n'y a pas de *support intermédiaire,* de corolle.

Dans les *polypétales*, cette insertion est *simplement immédiate;* car, y ayant une corolle, l'insertion peut se faire sur cette corolle, et s'y fait quelquefois en effet, quoique fort rarement.

Enfin, dans les *monopétales* , l'insertion des étamines est *médiate.* C'est la corolle qui y porte, du moins presque toujours, les étamines, et qui va toujours s'insérer, quand elle les porte, à l'un des trois points (le *pistil*, le *support du pistil*, ou le *calice*), auxquels se seraient insérées les étamines mêmes, s'il n'y avait pas eu de corolle. *L'insertion de la corolle* peut donc être substituée alors à celle des étamines; c'est un signe accessoire qui annonce, qui implique le vrai caractère.

P. xv... *Il est (le nombre des plantes) de vingt mille dans M. de Jussieu...*

Ce grand nombre de plantes nouvelles (grand par rapport à Linné, qui n'en comptait que sept mille), et qui n'avaient été connues ni de Linné ni de Bernard, était particulièrement dû, soit aux voyages de Dombey et de Commerson, soit aux ouvrages de Forster, de Forskal, d'Aublet.

Au reste, le nombre des plantes sur lesquelles M. de Jussieu s'est exercé, ne peut guère être évalué que d'une manière approximative, puisqu'il n'a traité en effet que des *genres* et non des *espèces*.

P. xvii... *Le second fait constitutif de la méthode naturelle est l'assujettissement des caractères aux groupes...*

Le fait que je cherche à désigner ici par ces mots d'*assujettissement des caractères aux groupes*, est le fait même de la *constance* des caractères, vu dans le moyen par lequel on arrive à reconnaître cette *constance*. Cette *constance* n'est que la *répétition* d'une même partie, d'un même caractère, dans un certain nombre d'espèces. Il faut donc commencer par voir les espèces, par rechercher les caractères qui s'y *répètent*, par évaluer ces caractères d'après cette *répétition* même, en un mot, et comme je le dis ici, par les *assujettir aux espèces*.

P. xviii... *La première condition de tout caractère est de respecter le rapprochement des espèces fondé sur l'ensemble de leur structure...*

Les espèces, rapprochées d'après l'ensemble de leur structure, donnent les *genres naturels;* les genres, rapprochés d'après leur structure, donnent les *familles naturelles;* et il en est des familles par rapport aux classes, comme des espèces par rapport aux genres, comme des genres par rapport aux familles. Les caractères qui, appliqués à ces classes, à ces familles, à ces genres naturels, respectent partout les rapprochements fondés sur l'ensemble de la structure, sont donc les vrais caractères; et il est impossible que, dans la marche suivie par M. de Jussieu, ils ne soient pas tels. Car il ne forme pas le groupe en conséquence du caractère; il tire, au contraire, le caracrère du groupe. Il suit cette belle pensée de Linné, *que c'est le genre qui fait le caractère, et non le caractère le genre.* Les seuls caractères constants dans toutes les espèces d'un genre, deviennent *caractères de genre;* les seuls constants dans tous les genres d'une famille, deviennent *caractères de famille;* les seuls constants dans toutes les familles d'une classe, deviennent *caractères de classe.* Sa marche est toute expérimentale; tout s'y traduit en expérience, en observation, en fait.

P. xviii... *L'objet propre de cet ouvrage est la distribution des genres en familles....*

Le titre est : GENERA PLANTARUM SECUNDUM ORDINES NATURALES DISPOSITA, JUXTA METHODUM IN HORTO REGIO PARISIENSI EXARATAM, ANNO 1774. Parisiis 1789.

P. xix... *Le caractère des familles n'est donc pas* UNIQUE, *comme dans les systèmes artificiels; ce caractère*, UN *mais* MULTIPLE...

C'est encore ici l'un des traits distinctifs de la marche de M. de Jussieu. On n'assignait qu'un seul caractère aux groupes du premier ordre, et l'on multipliait les caractères des genres. Il fait tout le contraire; il multiplie les caractères des premiers groupes, et simplifie les caractères des genres. Par là, il obtient deux avantages à la fois : d'abord les *vrais caractères* des premiers groupes, caractères qui n'ont de force que par leur *réunion;* et, ensuite, comme il le dit lui-même, une grande commodité pour l'étude des genres, « dont les caractères principaux sont toujours compris dans « celui de la famille en général. »

P. xx... *Dès* 1672, *Morison saisissait les principaux traits de celle des ombellifères...*

Roberti Morison Plantarum umbelliferarum distributio nova, etc. 1672.

P. *id... Rai signalait la grande division des plantes* en DICOTYLÉDONES *et* MONOCOTYLÉDONES, *et déjà il rangeait le* PALMIER *parmi ces dernières...*

Voici la phrase curieuse de Rai : « *Hæc divisio* (celle des *dicotylédones* « et des *monocotylédones*) *ad arbores etiam extendi potest : siquidem palmæ* « *et congeneres hoc respectu eodem modo à reliquis arboribus differunt* « *quo* MONOCOTYLEDONES *à reliquis herbis.* »

Joannis Raii Methodus plantarum nova, etc.; 1682.

P. *id... Magnol publiait son livre sur les* FAMILLES DES PLANTES...

Petri Magnol Prodromus historiæ generalis plantarum, in quo familiæ plantarum per tabulas disponuntur; 1689.

P. *id... Un ouvrage plus complet est celui d'Adanson...*

Familles des plantes; 1763.

P. XX... *Mais ni Magnol, ni Morison, ni Rai n'avaient pu suivre ces vues générales dans le détail...*

En même temps que Morison, Magnol, Rai publiaient ces vues générales, et devançaient ainsi les deux Jussieu pour les affinités botaniques, Rivin, par quelques pages pleines des considérations les plus élevées, devançait Linné sur plusieurs points de la réforme à opérer dans la nomenclature (*Introductio generalis in rem herbariam*, 1690).

L'*Histoire des Ombellifères* (*Plantarum umbelliferarum distributio nova*) de Morison est de 1672; son *Histoire générale des plantes* (*Plantarum historia universalis, etc.*) est de 1680; l'ouvrage de Rai (*Methodus plantarum nova, etc.*) est de 1682; celui de Magnol est de 1689; celui de Rivin, dont je viens de citer le titre, est de 1690; et les *Éléments de botanique*, de Tournefort, sont de 1694.

En tout genre, c'est de la fin de ce XVII^e^ siècle que datent les premiers progrès du grand mouvement philosophique du XVIII^e^.

P. XXIJ... *Mais les principes qui guidaient Bernard dans son* CATALOGUE, *soit pour la formation des familles, soit pour la réduction des familles en classes, nous ont été fidèlement conservés par son neveu...*

« Il existe, dit M. de Jussieu (Mémoire de 1774), dans les végé« taux, comme dans les animaux, des classes primitives qui renferment « d'autres classes secondaires; les unes et les autres sont fondées sur des

« caractères généraux et invariables qui ne peuvent être tirés que des or-« ganes les plus essentiels à la vie, à la reproduction de l'espèce; tous « les êtres qui diffèrent par la structure, la situation et l'usage « de ces organes principaux, doivent être séparés; de là les premières « divisions du règne animal, d'après l'inspection du cœur, du nom-« bre de ses ventricules et de ses oreillettes. Les organes qui tiennent « après lui le premier rang dans l'économie animale, donnent les secondes « divisions, et ainsi de suite. Ce principe, dont on ne s'écartera jamais sans « tomber dans l'erreur, est le fondement de toutes les recherches à faire « dans les corps organisés; dès lors on ne peut se contenter de l'exa-« men des parties externes, de ces parties qui fournissent tout au plus des « caractères du troisième ou du quatrième ordre; les méthodes, fondées « sur ces caractères, s'écartent toujours de la nature, dans l'un et l'au-« tre règne.

« Ces vérités, continue-t-il, n'ont pas échappé à mon oncle, et la dispo-« sition des familles, dans le jardin du *Petit Trianon*, prouve qu'il en était « bien pénétré; son ordre est plus naturel que les méthodes publiées jusqu'à « présent, parce qu'il est simple dans ses divisions générales, et conserve « les familles dans leur intégrité. On y retrouve les trois classes primitives, « caractérisées par l'embryon; les *acotylédones* sont disposées suivant l'ap-« parence plus ou moins marquée des parties de la fructification; dans les « *monocotylédones*, l'auteur se règle sur l'insertion des étamines, et passe « successivement en revue les étamines portées sur le pistil, celles qui « adhèrent au calice, celles qui sont attachées au support. Les *dicotylédones* « sont divisées de même, en observant que, lorsque la corolle porte les « étamines, c'est son insertion qui devient le caractère décisif, pour « rapporter les plantes à l'une des trois autres insertions des étamines. »

Il dit ailleurs (Introduction du *Genera plantarum*) : « Les *Ordres* tra-« cés par Bernard de Jussieu, dans le jardin de Trianon, sont au nombre « de soixante-deux, dont plus de la moitié est entièrement conforme aux « familles actuelles. Plusieurs autres, également conformes, diffèrent seu-« lement par l'addition de genres étrangers, qui ont dû en être séparés. « D'autres sont une réunion de plusieurs familles, qui doivent tantôt res-« ter voisines, tantôt être plus ou moins éloignées. L'auteur n'ayant donné

« qu'un simple catalogue manuscrit, sans aucune autre addition, n'a point « caractérisé ses ordres, et de même il n'a pas motivé leur disposition res- « pective. Mais, si on étudie avec soin cette disposition, l'on reconnaît « d'abord que, sans indiquer les classes, il a adopté les trois grandes divi- « sions caractérisées par l'embryon. Les premiers ordres appartiennent aux « *acotylédones*, excepté néanmoins les *naïades*, qui en ont été séparées « plus récemment, et les *aristoloches*, qui doivent être reportées très-loin. « Dans les *monocotylédones*, qui suivent, on voit paraître successivement « les ordres à étamines *épigynes*, ceux à étamines *périgynes*, et ceux à « étamines *hypogynes* : ce qui prouve qu'il appréciait les caractères tirés « des insertions. Dans les *dicotylédones* il suit la même marche, la même « distinction, en terminant seulement par la *périgynie*, et rapportant à « chacune les plantes *monopétales*, *polypétales* et *apétales* qui ont la même « insertion, tantôt entremêlées, tantôt se suivant séparément. Il termine « sa série par les *amentacées* réunies aux *urticées*, les *euphorbiacées* et les « *conifères*. On voit que, sans avoir proclamé les lois naturelles, il leur a « presque toujours obéi tacitement. »

(Voyez la traduction donnée par M. de Jussieu lui-même, aux mots *Méthode naturelle* du *Dictionnaire des sciences naturelles*, de l'*Introduction* du *Genera plantarum*).

P. XXIV... *On a reproché à M. de Jussieu la disposition de quelques-unes de ses classes, fondées sur les formes de la corolle...*

Ces *formes de la corolle*, rattachées, bien entendu, à *l'insertion des étamines*, comme on l'a vu dans une *Note* précédente. Ici même, les reproches qu'on peut adresser à M. de Jussieu ne portent que sur quelques points. Ainsi, l'insertion *médiate* est commune à toutes les *monopétales*; l'insertion *immédiate* l'est à toutes les plantes *apétales* et *polypétales*; et, jusqu'ici, ce n'est que dans cette dernière division, dans la division des *polypétales*, qu'ont paru quelques exceptions.

P. *id*... *C'est là le point vulnérable de sa méthode...*

Ou, plutôt, de la *clef* de sa méthode, de ce qu'il s'est vu contraint d'admettre encore de *systématique* dans sa méthode.

« Cet arrangement, dit-il, a un défaut *dont aucune méthode n'est exempte*, « celui de ne pouvoir subsister sans admettre des exceptions. » Il ajoute que c'est uniquement « pour l'instruction publique, pour les élèves et non « pour les gens consommés, qu'il a cherché à établir une méthode qui « eût des classes plus nombreuses, plus précises et conséquemment plus « faciles à saisir... On a cru remplir cet objet, continue-t-il, en joignant « aux caractères essentiels des caractères accessoires, qui indiquent l'exis- « tence des premiers, en associant la corolle aux étamines pour désigner « les classes. »

P. XXV... *Le problème actuel, dit M. Brown, est de combiner les familles en groupes plus considérables, et également naturels...*

Voici à peu près les paroles de M. Robert Brown. « Un arrangement « méthodique, et en même temps naturel, des familles est peut-être im- « praticable, dans l'état actuel de nos connaissances. Ce serait probable- « ment en hâter l'exécution, que de tourner toute son attention vers la « combinaison des familles en classes (c'est-à-dire en groupes plus consi- « dérables) également naturelles. »

General remarks geographical and systematical on the botany of terra australis. 1814; p. 7.

M. de Candolle dit : « On ne connaît aujourd'hui que trois grandes « classes..... Il est hors de doute que chacune de ces classes pourra un « jour se subdiviser, de manière à grouper entre elles les familles qui se « ressemblent; mais cette sous-division des classes, cette institution de « groupes supérieurs aux familles et inférieurs aux classes, n'a pas encore été « faite d'une manière naturelle..... C'est là le problème le plus important à « résoudre qui se présente aujourd'hui dans l'étude des rapports naturels. »

Théorie élémentaire de la botanique, 1813; p. 195.

P. XXVIIJ... *Le principe de la subordination des organes y devient le principe même des conditions de l'existence des êtres...*

La *subordination des caractères* est la méthode naturelle empiriquement vue; les *conditions d'existence* sont la méthode naturelle, vue rationnellement.

P. xxviij... *La marche rationnelle à laquelle* SE PRÊTAIT MIEUX *la zoologie...*

Je dis *se prêtait mieux.* En effet, on est loin encore de pouvoir tout réduire, en zoologie, à la marche rationnelle.

Pour l'évaluation des organes *intérieurs*, des organes *centraux*, on a une règle sûre, savoir, que plus un organe est important, c'est-à-dire essentiel par l'ordre de ses fonctions, plus ses modifications en entraînent de correspondantes dans tous les autres. Ainsi, les centres nerveux (la moelle épinière, le cerveau), par lesquels l'animal est essentiellement, donnent les premiers caractères et les plus généraux; les centres circulatoires et respiratoires (le cœur, les poumons), par lesquels l'animal vit de sa vie présente, donnent les seconds; les centres digestifs, par lesquels il entretient cette vie, donnent les troisièmes; et ainsi de suite.

Mais quand on en vient à l'évaluation des organes *extérieurs*, des organes subordonnés, secondaires, cette règle ne suffit plus, ou du moins ne s'applique plus d'une manière immédiate et directe.

Le meilleur *caractère extérieur* est celui qui répond à un plus grand nombre de ressemblances internes ou cachées : malheureusement la physiologie n'a point pénétré encore assez avant dans l'étude de ces *concordances;* la *raison* de ces rapports de détail lui échappe; et, dès lors, c'est à l'*expérience* seule de prononcer.

L'*expérience* découvre donc seule au zoologiste, du moins jusqu'ici, et dans la plupart des cas, l'importance relative des *caractères extérieurs*, signes visibles des rapports cachés.

P. xxix... *Dans ces temps difficiles, M. de Jussieu se dévoua tout entier à l'administration de ce bel établissement...*

Le Muséum lui doit sa bibliothèque. Pour réunir les éléments de cette bibliothèque, aujourd'hui si riche, il fallut choisir dans celles des corps religieux, qui venaient d'être supprimés, tout ce qui avait trait à l'histoire naturelle; M. de Jussieu fit lui-même tout ce travail. Il l'avait formée; et il est resté, pendant toute sa vie, chargé du soin de la surveiller.

A cette même époque, les galeries d'histoire naturelle, et, en général, toutes les parties du Jardin prirent une nouvelle extension. Cependant on manquait d'argent, les caisses de l'État étaient vides. A force de sagesse et d'activité, l'Administration parvint à suffire à tout. Et dans un moment où il était si difficile de conserver, non-seulement tout fut conservé, mais tout fut augmenté.

P. XXIX... *En* 1804, *la chaire de matière médicale de la Faculté de médecine étant devenue vacante, il se présenta, et tous les concurrents se retirèrent.*

Il avait pris plusieurs années auparavant, en 1776, une part très-active à la formation de la Société royale de médecine. Il en fut le trésorier. Il seconda, de tout son zèle, les efforts de son ami Vicq-d'Azyr, pour fonder et pour soutenir un corps, alors si fortement combattu par l'ancienne Faculté, et devenu plus tard, du moins en partie, le noyau de la Faculté nouvelle.

P. XXX... *Il prit, pour base de ses leçons, le principe fécond de l'accord des propriétés des plantes avec les affinités botaniques.*

Le développement de ce principe fait le fond du *Discours* qu'il lut à la *séance publique de l'École de médecine*, en 1806.

Il est curieux de voir ce principe important déjà clairement énoncé dans cette phrase de Morison : *Plantæ quæ generis societate junguntur, plerumque et similes possident facultates.* (*Plantarum historia*, etc.) Mais il est à remarquer que ce principe n'est devenu fécond pour la matière médicale, que quand il a pu s'appliquer à des groupes plus vastes que les *genres*, que quand il a pu s'appliquer aux *familles*.

« Le raisonnement, appuyé de l'expérience, dit M. de Jussieu dans son « mémoire de 1774, démontre que les plantes conformes dans leurs ca« ractères, jouissent aussi des mêmes propriétés, de sorte que, l'ordre « naturel une fois donné, on pourrait *déterminer leurs vertus par des si« gnes extérieurs.* »

Ce beau problème de la détermination des propriétés des plantes par leur classification, est devenu, en 1804, le sujet de l'ouvrage de M. de Candolle, intitulé : *Essai sur les propriétés médicales des plantes*, etc. — La seconde édition de cet ouvrage est de 1816.

P. xxx.... *Il fut nommé au Conseil de l'Université* en 1808.

Il le fut sur un billet de lui à l'Empereur, qui n'avait oublié ni ce bureau de l'Académie où il avait siégé, ni, dans M. de Jussieu, l'un des collègues particuliers qu'il y avait eus, et qui, d'ailleurs, se faisait rendre compte des progrès des sciences et des travaux de l'Institut.

P. xxx.... *Ces fragments forment une suite de mémoires...*

Voyez, pour les titres de ces mémoires, la *Liste des ouvrages de M. de Jussieu*, placée à la fin de ces *Notes*.

P. xxxij... *Je voudrais n'oublier aucun des écrits sortis de la main de M. de Jussieu.*

Ses nombreux articles, répandus dans le *Dictionnaire des sciences naturelles*, sont des travaux importants. Les uns ont pour objet les *familles* mêmes; et, réunis en un corps d'ouvrage, ils seraient un des livres les plus utiles de la botanique. Les autres ont pour objet la détermination des *noms de plantes*, rapportés par les voyageurs. Ici, sa sagacité brille sous un nouvel aspect. Ces *noms*, accompagnés à peine de quelques renseignements vagues et incomplets, sont en effet autant d'énigmes qui piquaient sa curiosité, et dont lui seul peut-être était capable de trouver le mot.

L'article *méthode naturelle* est la traduction précieuse (car notre langue a le don d'éclaircir beaucoup les choses) de l'*Introduction* du *Genera plantarum*. Il en est, sous un autre rapport, une seconde édition revue et augmentée. L'article *familles*, beaucoup plus court, puisque les mêmes idées principales auraient dû s'y reproduire, est un modèle en son genre.

Les articles relatifs à chaque *famille* en particulier, offrent tous, et chacun dans les proportions requises par la matière, la même brièveté, la même précision, la même vue nette des faits dont ils se composent. Je viens de dire que la réunion de ces articles en un corps d'ouvrage serait un des livres les plus utiles. On peut objecter, sans doute, qu'il ne serait pas partout au niveau des derniers progrès. Mais ce n'est là qu'un côté de la question, et le côté purement pratique. Je demande si, supposé que l'ouvrage que j'indique existât, il y en aurait aucun autre où l'on pût recueillir, à moins de frais, plus d'idées botaniques.

P. xxxiv... *On vient de publier ce dernier écrit de M. de Jussieu* (la seconde édition de l'Introduction du *Genera plantarum*)....

M. Adrien de Jussieu y a joint le *Tableau des familles et des classes* établies par M. de Jussieu en 1774. La comparaison de ce *Tableau* avec celui des *familles* de Bernard, mis en tête du *Genera plantarum*, est pleine d'intérêt. On y voit toutes les modifications que le *Catalogue* ou le *Tableau* de Bernard avait déjà éprouvées entre les mains de M. de Jussieu, soit pour la place de certaines *familles*, soit pour la coordination des *familles* entre elles, c'est-à-dire, pour la formation des *classes*.

Page xxxvj... *Il avait appelé auprès de lui, par une sorte d'adoption, deux neveux et une nièce....*

De ces deux neveux, l'un est M. Laurent de Jussieu, secrétaire général de la préfecture de la Seine, et membre de la chambre des députés; l'autre est M. Alexis de Jussieu, successivement préfet des départements de l'Ain, de la Mayenne, de la Vendée et de la Vienne, aujourd'hui directeur général de la police du royaume.

Page *id... Cette nièce devint plus tard l'épouse de son fils...*

On eut le malheur de la perdre en 1831.

Page xxxvj... *Au milieu de tant de rapports qu'il avait avec son oncle Bernard...*

Quelques faits encore mettront ces nombreux rapports dans un nouveau jour.

A la mort d'Antoine, Bernard refusa la chaire de botanique, pour conserver la place de démonstrateur, à laquelle il était habitué : peu touché d'ailleurs, dit M. de Jussieu (*Mémoires sur le Muséum*), de la *supériorité apparente* de l'autre place.

Lui-même, lors de la démission de Lemonnier, et quoique déjà suppléant de Lemonnier, aima mieux aussi conserver la place de démonstrateur, si longtemps occupée par Bernard.

En 1830, ses collègues le pressaient de reprendre sa chaire à la Faculté de médecine; il leur répondit qu'il était trop vieux, et *qu'un jeune homme serait plus utile à la science.*

De pareilles choses, faites avec tant de simplicité, supposent beaucoup de philosophie; et peut-être même d'autant plus que, d'abord, on y en soupçonne moins.

P. XXXVIII... *Carrière qui s'étend un nombre d'années à peu près égal dans le* XVIII^e^ *et dans le* XIX^e^ *siècle...*

Pendant la première moitié de cette longue carrière, il avait connu la plupart des hommes célèbres du dernier siècle. Il avait vu Voltaire, lequel marqua de sa présence la lecture de l'*Eloge de Bernard* par Condorcet, dans la séance publique de 1778. Il avait fourni des notes à Raynal pour les détails d'histoire naturelle que renferme l'*Histoire des deux Indes*. Il avait eu des relations plus particulières avec J. J. Rousseau. J. J. Rousseau aimait la botanique, il se plaisait à suivre les herborisations de M. de Jussieu («il les suivit régulièrement, dit M. de Jussieu: *Mémoires sur le Muséum*, pendant les cinq dernières années de sa vie»); et, dans ses *Lettres sur la botanique*, il parle souvent de l'oncle et du neveu, et toujours de tous les deux, avec l'estime la plus profonde.

Il dit dans une de ces *Lettres* : « J'ai parlé à M. de Jussieu (Bernard) « du *papyrus* que vous avez apporté de Naples; il doute que ce soit le vrai « papier *nilotica*. Si vous pouviez lui en envoyer....., j'ai vu que cela « lui ferait plaisir, et ce serait peut-être un excellent moyen d'obtenir de « lui beaucoup de choses qu'alors nous aurions bonne grâce à demander, « quoique je sache bien par expérience qu'il est charmé d'obliger gratui« tement..... — Mais (et ces mots-ci sont bien de Jean-Jacques) j'ai besoin de quelque chose pour m'enhardir, quand il faut demander. »

Il dit ailleurs : « M. de Jussieu vient de l'établir (la nomenclature de « Linné) au Jardin du Roi, préférant ainsi l'utilité publique à la gloire « d'une nouvelle refonte, que semblait demander la méthode des familles « naturelles, dont son illustre oncle est l'auteur. »

M. de Jussieu avait été présenté à Louis XV, et il s'était entretenu longtemps avec lui, dans le jardin du Petit-Trianon, la veille même du jour où ce roi fut pris de la maladie dont il mourut.

En terminant ces *Notes*, je sens le besoin de remercier M. Adrien de Jussieu des détails qu'il m'a fournis, soit sur la vie intérieure de son oncle Bernard, soit sur la vie et les travaux de son illustre père. Je puis dire de lui, par rapport à M. de Jussieu, ce que Condorcet a dit de M. de Jussieu, par rapport à Bernard : « Sans lui, il m'eût été bien « plus difficile encore de tracer, de cet homme célèbre, la faible esquisse « que j'ai essayé d'offrir à l'Académie, dans cet Éloge. »

LISTE DES OUVRAGES

DE M. ANTOINE-LAURENT DE JUSSIEU.

An œconomiam animalem inter et vegetalem analogia? (C'est sa thèse, soutenue en 1770.)

Examen de la famille des RENONCULES. Mémoires de l'Académie des sciences, 1773.

Exposition d'un nouvel ORDRE DE PLANTES *adopté dans les démonstrations du Jardin royal.* Ibid., 1774.

GENERA PLANTARUM SECUNDUM ORDINES NATURALES DISPOSITA, JUXTA METHODUM IN HORTO REGIO PARISIENSI EXARATAM, ANNO M. DCC. LXXIV. Parisiis, 1789 (1).

Principes de la MÉTHODE NATURELLE *des vegétaux* (Article extrait du *Dictionnaire des sciences naturelles*). Paris, 1824.

INTRODUCTIO IN HISTORIAM PLANTARUM (*Introductionis olim generibus plantaram præmissæ editio altera posthuma, aucta et maxima parte nova; accedunt ordines naturales in horto Parisiensi primum dispositi post annum* 1774). C'est la seconde édition de l'INTRODUCTION du *Genera plantarum*, publiée par M. Adrien de Jussieu, dans les *Annales des sciences naturelles*, 1838.

Note sur le CALICE *et sur la* COROLLE. Ann. du Mus., T. XIX, 1812.

Mémoire sur les rapports existant entre les caractères des plantes et leurs vertus. Mém. de la Soc. roy. de médecine, 1786.

Tous les ARTICLES *sur les familles des plantes, contenant, à la suite des caractères des familles, l'énumération de leurs genres: articles disséminés dans les* 60 *volumes du Dictionnaire des sciences naturelles*, 1816 — 1830.

---

(1) Il en a paru en 1791, à Zurich, une autre édition, ou plutôt une contrefaçon, publiée par M. Usteri, lequel a ajouté seulement un petit nombre de notes.

D'un autre côté, l'ouvrage de Ventenat, intitulé : *Tableau du règne végétal selon la méthode de Jussieu*, peut en être considéré, pour la plus grande partie, comme une traduction française.

Mémoires sur les CARACTÈRES GÉNÉRAUX DE FAMILLE *tirés des graines et confirmés ou rectifiés par les observations de Gærtner.*

1er *Mémoire sur les* Aristolochiées-Plumbaginées. Ann. du Mus., T. V, 1804.

Supplément à ce mémoire. T. VII, 1806.

2e *Mémoire sur les* Monopétales hypogynes. T. V, 1804.

3e *Mémoire sur les* Monopétales périgynes. T. V, 1804.

4e *Mémoire sur les* Monopétales épigynes a anthères réunies. 1re partie, T. VI, 1805.

5e *Mémoire.* 2e partie, T. VII, 1806.

6e *Mémoire.* 3e partie, T. VIII, 1806.

7e *Mémoire sur les* Monopétales épigynes a anthères distinctes. T. X, 1807.

8e *Mémoire sur les* Caprifoliées-Loranthées. T. XII, 1808.

9e *Mémoire sur les* Araliacées-Ombellifères. T. XVI, 1810.

10e *Mémoire sur les* Renonculacées-Malpighiacées. T. XVIII, 1811.

11e *Mémoire sur les* Hypéricées-Guttifères. T. XX, 1813.

12e *Mémoire sur les* Aurantiacées-Théacées. Mém. du Muséum. T. II, 1815.

13e *Mémoire sur les* Méliacées-Géraniacées. T. III, 1817.

14e *Mémoire sur les* Méliacées-Tiliacées. T. V, 1819.

Mémoires sur différentes FAMILLES *de plantes.*

Observations sur la famille des Amarantacées. Ann. du Muséum. T. II, 1803.

Observations sur la famille des Nyctaginées. T. II, 1803.

Observations sur la famille des Onagraires. T. III, 1804.

Mémoire sur le Loasa, *genre de plantes qui devra constituer, avec le* Mentzelia, *une nouvelle famille.* T. V, 1804.

1er *Mémoire sur quelques espèces nouvelles du genre* Passiflora, *et sur la necessité d'établir une famille des* Passiflorées. T. VI, 1805.

2e *Mémoire sur les* PASSIFLORÉES *et particulièrement sur quelques espèces nouvelles du genre* TACSONIA. T. VI, 1805.

Observations sur la famille des VERBÉNACÉES. T. VII, 1806.

Mémoire sur les MONIMIÉES, *nouvel ordre de plantes.* T. XIV, 1809.

Mémoire sur les LOBÉLIACÉES *et les* STYLIDIÉES, *nouvelles familles de plantes.* T. XVIII, 1811.

Mémoire sur la famille nouvelle des POLYGALÉES. Mém. du Mus., T. I, 1815.

Mémoire sur la nouvelle famille des PARONYCHIÉES. T. II, 1815.

Mémoire sur la famille des RUBIACÉES. T. VI, 1820.

Extrait d'un mémoire de M. CUSSON, *sur les plantes* OMBELLIFÈRES. Mém. de la Soc. roy. de médecine, 1782.

Mémoires sur les genres de plantes à ajouter ou à retrancher aux familles des PRIMULACÉES, RHINANTHÉES, ACANTHÉES, JASMINÉES, LABIÉES *et* PERSONÉES. Ann. du Mus. T. XIV, 1809.

Mémoire sur les genres de plantes à ajouter ou à retrancher aux familles des SOLANÉES, BORRAGINÉES, CONVOLVULACÉES, POLÉMONIACÉES, BIGNONIÉES, GENTIANÉES, SAPOTÉES *et* ARDISIACÉES. T. XV, 1810.

Mémoire sur quelques genres anciens de plantes non classées antérieurement et maintenant rapportées à leurs familles. Mém. du Mus. T. V., 1819.

Mémoires sur différents GENRES *de plantes.*

Mémoire sur la plante nommée par les botanistes ERICA DABOECI, *et sur la nécessité de la rapporter à un autre genre et à une autre famille.* Ann. du Mus., T. I, 1802.

Mémoire sur le PÉTUNIA, *genre nouveau de la famille des* SOLANÉES. T. II, 1803.

*Mémoire sur l'*ACICARPHA *et le* BOOPIS, *deux nouveaux genres de la famille des* CINAROCÉPHALES. T. II, 1803.

Mémoire sur le CANTUA, *genre de plantes de la famille des* POLÉMONIÉES. T. III, 1804.

Sur le SOLANUM CORNUTUM *du Mexique.* T. III, 1804.

Sur quelques espèces du genre HYPERICUM. T. III, 1804.

*Sur quelques espèces nouvelles d'*ANÉMONES. T. III, 1804.

Mémoire sur le GREWIA, *genre de plantes de la famille des* TILIACÉES. T. IV, 1804.

Sur le GYMNOSTYLES, *genre nouveau de la famille des* CORYMBIFÈRES. T. IV, 1804.

Sur le PAULLINIA, *genre de plantes de la famille des* SAPINDACÉES. T. IV, 1804.

*Sur l'*OPERCULARIA, *genre de plantes voisin de la famille des* DIPSACÉES. T. IV, 1804.

Mémoire sur la réunion de plusieurs genres de plantes en un seul dans la famille des LAURINÉES. T. VI, 1805.

Sur le DICLIPTERA *et le* BLECHUM, *genres nouveaux de plantes composés de plusieurs espèces auparavant réunies au* JUSTICIA. T. IX, 1807.

Sur le genre HYDROPITION *de Gærtner fils, et sur ses affinités avec d'autres genres.* T. X, 1807.

Sur le genre PHELIPÆA *de Thunberg, et sur d'autres plantes qui portent le même nom.* T. XII, 1808.

Sur quelques genres de la flore de Cochinchine de Loureiro. T. XI, XII, XVI, 1808 — 1810.

Sur une nouvelle espèce de MARCGRAVIA, *et sur les affinités botaniques de ce genre.* T. XIV, 1809.

Sur le MELICOCCA, *et quelques espèces nouvelles de ce genre de plantes.* Mém. du Muséum, T. III, 1817.

Suite de nombreux articles sur les noms vulgaires (ou de pays) des plantes, dans les volumes du Dictionnaire des sciences naturelles. 1816 — 1830.

Mémoires sur le MUSÉUM D'HISTOIRE NATURELLE *de Paris, depuis sa fondation en* 1635. Annales du Muséum, T. I, II, III, IV, VI, XI. 1802 — 1808).

Rapport de l'un des commissaires chargés par le roi de l'examen du magnétisme animal. Paris, 1784.

Compte rendu à la Commune par le département des hôpitaux. Paris, 1790.

Discours lu à la séance publique de l'École de médecine. Paris, 1806.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

JAMES WATT,

UN DES HUIT ASSOCIÉS ÉTRANGERS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PAR M. ARAGO, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Lu à la séance publique du 8 décembre 1834.

MESSIEURS,

Après avoir parcouru la longue liste de batailles, d'assassinats, de pestes, de famines, de catastrophes de tout genre qu'offraient les annales de je ne sais quel pays, un philosophe s'écria : « Heureuse la nation dont l'histoire est ennuyeuse! » Pourquoi faut-il que l'on doive ajouter, au moins sous le point de vue littéraire : « Malheur à qui échoit l'obligation « de raconter l'histoire d'un peuple heureux! »

Si l'exclamation du philosophe ne perd rien de son à-propos quand on l'applique à de simples individus, sa contre-partie caractérise avec une égale vérité la position de quelques biographes.

Telles étaient les réflexions qui se présentaient à moi, pendant que j'étudiais la vie de James Watt, pendant que je recueillais les communications bienveillantes des parents, des amis, des confrères de l'illustre mécanicien. Cette vie, toute patriarcale, vouée au travail, à l'étude, à la méditation, ne nous offrira aucun de ces événements piquants dont le récit, jeté avec un peu d'art au milieu des détails de la science, en tempère la gravité. Je la raconterai, cependant, ne fût-ce que pour montrer dans quelle humble condition s'élaboraient des projets destinés à porter la nation britannique à un degré de puissance inouï; j'essayerai surtout de caractériser avec une minutieuse exactitude, les inventions fécondes qui lient, à jamais, le nom de Watt à celui de machine à vapeur. Je connais parfaitement les écueils de ce plan; je prévois qu'on pourra dire, en sortant d'ici : Nous attendions un éloge historique, et nous venons d'assister à une leçon sèche et aride. Le reproche, au surplus, me paraîtrait peu grave si la leçon avait été comprise. Je ferai donc tous mes efforts pour ne pas fatiguer votre attention; je me rappellerai que la clarté est la politesse de ceux qui parlent en public.

Enfance et jeunesse de James Watt; sa promotion aux fonctions d'ingénieur de l'université de Glasgow.

James Watt, un des huit associés étrangers de l'Académie des sciences, naquit à Greenock, en Écosse, le 19 janvier 1736. Nos voisins de l'autre côté de la Manche ont le bon esprit de penser que la généalogie d'une famille honnête et industrieuse est tout aussi bonne à conserver que les parchemins de certaines maisons titrées, devenues seulement célèbres par l'énormité de leurs crimes ou de leurs vices. Aussi, je puis dire avec certitude que le bisaïeul de James Watt était un cultivateur établi dans le comté d'Aberdeen; qu'il périt dans l'une des batailles de Montrose; que le parti vainqueur, comme c'était, (j'allais ajouter, comme c'est encore l'usage dans les discordes civiles), ne trouva pas que la mort fût une expiation suffisante des opinions pour lesquelles le pauvre fermier avait combattu; qu'il le punit, dans la personne de son fils, en confisquant sa petite propriété; que ce malheureux enfant, Thomas Watt, fut recueilli par des parents éloignés; que dans l'isolement absolu auquel sa position difficile le condamnait, il se livra à des études sérieuses et assidues; qu'en des temps plus tranquilles il s'établit à Greenock où il enseigna les mathématiques et les éléments de la navigation; qu'il demeura au bourg de Crawfords-dyke, dont il fut magistrat; qu'enfin il s'éteignit en 1734, âgé de 92 ans.

Thomas Watt eut deux fils. L'aîné, John, suivait à Glasgow la profession de son père. Il mourut à 50 ans (en 1737), laissant une carte du cours de la Clyde, qui a été publiée par les soins de son frère *James*. Celui-ci, père du célèbre ingénieur, longtemps membre trésorier du conseil municipal de Greenock et magistrat de la ville, se fit remarquer dans ces fonctions, par un zèle ardent et un esprit d'amélioration éclairé. Il *cumulait*, (n'ayez point de crainte: ces trois syllabes devenues aujourd'hui en France une cause générale d'anathème, ne feront pas de tort à la mémoire de James Watt); il *cumulait* trois natures d'occupations : il était à la fois fournisseur d'appareils, d'ustensiles et d'instruments nécessaires à la navigation, entrepreneur de bâtisses et négociant, ce qui, malheureusement, n'empêcha pas qu'à la fin de sa vie, certaines entreprises commerciales ne lui fissent perdre une partie de la fortune honorable qu'il avait précédemment gagnée. Il mourut à l'âge de 84 ans, en 1782.

James Watt, le sujet de cet éloge, naquit avec une complexion extrêmement délicate. Sa mère, dont le nom de famille était *Muirhead*, lui donna les premières leçons de lecture. Il apprit de son père à écrire et à compter. Il suivit aussi l'école publique primaire de Greenock. Les humbles *grammar schools* écossaises auront ainsi le droit d'inscrire avec un juste orgueil le nom du célèbre ingénieur parmi ceux des élèves qu'elles ont formés, comme le collége de la Flèche citait jadis Descartes, comme l'université de Cambridge cite encore aujourd'hui Newton.

Pour être exact, je dois dire que de continuelles indispositions ne permettaient pas au jeune Watt de se rendre assidûment à l'école publique de Greenock; qu'une grande partie de l'année il était retenu dans sa chambre, et s'y livrait à l'étude sans aucun secours étranger. Comme c'est l'ordinaire, de hautes facultés intellectuelles destinées à produire de si heureux fruits, commencèrent à se développer dans la retraite et le recueillement.

Watt était trop maladif pour que ses parents eussent la pensée de lui imposer des occupations assidues. Ils lui laissaient même le libre choix de ses distractions. On va voir s'il en abusait.

Un ami de M. Watt rencontra un jour le petit James étendu sur le parquet et traçant avec de la craie toute sorte de lignes entre-croisées. « Pourquoi permettez-vous, s'écria-t-il,

« que cet enfant gaspille ainsi son temps ? envoyez-le donc à « l'école publique ! » M. Watt repartit : « Vous pourriez bien, « Monsieur, avoir porté un jugement précipité ; avant de nous « condamner, examinez attentivement ce qui occupe mon fils. » La réparation ne se fit pas attendre : l'enfant de *six ans* cherchait la solution d'un problème de géométrie.

Guidé par sa tendresse éclairée, le vieux James Watt avait mis de bonne heure un certain nombre d'outils à la disposition du jeune écolier. Celui-ci s'en servait avec la plus grande adresse ; il démontait et remontait les jouets d'enfant qui tombaient sous sa main ; il en exécutait sans cesse de nouveaux. Plus tard, il les appliqua à la construction d'une petite machine électrique dont les brillantes étincelles devinrent un vif sujet d'amusement et de surprise pour tous les camarades du pauvre valétudinaire.

Watt, avec une mémoire excellente, n'eût peut-être pas figuré parmi les petits prodiges des écoles ordinaires. Il aurait refusé d'apprendre les leçons comme un perroquet, parce qu'il sentait le besoin d'élaborer soigneusement les éléments intellectuels qu'on présentait à son esprit ; parce que la nature l'avait surtout créé pour la méditation. James Watt, au surplus, augurait très-favorablement des facultés naissantes de son fils. Des parents plus éloignés et moins perspicaces ne partageaient pas les mêmes espérances. « James, dit un jour M^me^ Muirhead à son neveu, je n'ai ja-« mais vu un jeune homme plus paresseux que vous. Prenez « donc un livre et occupez-vous utilement. Il s'est écoulé plus « d'une heure sans que vous ayez articulé un seul mot. Savez-« vous ce que vous avez fait pendant ce long intervalle ? vous « avez ôté, remis et ôté encore le couvercle de la théière ;

« vous avez placé dans le courant qui en sort, tantôt une « soucoupe, tantôt une cuiller d'argent; vous vous êtes éver« tué à examiner, à réunir entre elles et à saisir les gouttelettes « que la condensation de la vapeur formait à la surface de « la porcelaine ou du métal poli; n'est-ce pas une honte que « d'employer ainsi son temps! »

En 1750, chacun de nous, à la place de Mme Muirhead, eût peut-être tenu le même langage; mais le monde a marché, mais nos connaissances se sont accrues; aussi, lorsque bientôt j'expliquerai que la principale découverte de notre confrère a consisté dans un moyen particulier de transformer la vapeur en eau, les reproches de Mme Muirhead s'offriront à notre esprit sous un tout autre jour; et le petit James, devant la théière, sera le grand ingénieur préludant aux découvertes qui devaient l'immortaliser; et chacun trouvera sans doute remarquable que les mots : *condensation de vapeur,* soient venus se placer naturellement dans l'histoire de la première enfance de Watt. Au reste, je me serais fait illusion sur la singularité de l'anecdote, qu'elle n'en mériterait pas moins d'être conservée. Quand l'occasion s'en présente, prouvons à la jeunesse que Newton ne fut pas seulement modeste le jour où, pour satisfaire la curiosité d'un grand personnage qui désirait savoir comment l'attraction avait été découverte, il répondit : *C'est en y pensant toujours!* Montrons à tous les yeux, dans ces simples paroles de l'immortel auteur des *Principes*, le véritable secret des hommes de génie.

L'esprit anecdotique que notre confrère répandit avec tant de grâce, pendant plus d'un demi-siècle, parmi tous ceux dont il était entouré, se développa de très-bonne heure. On en trouvera la preuve dans ces quelques lignes que j'extrais, en les traduisant, d'une note inédite, rédigée en 1798 par Mme Marion Campbell, cousine et compagne d'enfance du célèbre ingénieur (1).

« Dans un voyage à Glasgow, Mme Watt confia son jeune « fils James à une de ses amies. Peu de semaines après elle « revint le voir, mais sans se douter assurément de la sin- « gulière réception qui l'attendait. Madame, lui dit cette amie « dès qu'elle l'aperçut, il faut vous hâter de ramener James à « Greenock. Je ne puis plus endurer l'état d'excitation dans « lequel il me met : je suis harassée par le manque de som- « meil. Chaque nuit, quand l'heure ordinaire du coucher de « ma famille approche, votre fils parvient adroitement à « soulever une discussion dans laquelle il trouve toujours le « moyen d'introduire quelque conte ; celui-ci, au besoin, en « enfante un second, un troisième, etc. Ces contes, qu'ils « soient pathétiques ou burlesques, ont tant de charme, tant « d'intérêt ; ma famille, tout entière, les écoute avec une si « grande attention qu'on entendrait une mouche voler. Les « heures, ainsi, succèdent aux heures sans que nous nous en « apercevions, mais le lendemain je tombe de fatigue ; Ma- « dame, remmenez votre fils chez vous. »

---

(1) Je suis redevable de ce curieux document à mon ami, M. James Watt, de Soho. Grâce à la vénération profonde qu'il a conservée pour la mémoire de son illustre père ; grâce à l'inépuisable complaisance avec laquelle il a accueilli toutes mes demandes, j'ai pu éviter diverses inexactitudes qui se sont glissées dans les biographies les plus estimées, et dont moi-même, trompé par des renseignements verbaux acceptés trop légèrement, je n'avais pas su d'abord me garantir.

James Watt avait un frère cadet, John (1), qui en se décidant à embrasser la carrière de son père, lui laissa, d'après les coutumes écossaises, la liberté de suivre sa vocation; mais cette vocation était difficile à découvrir, car le jeune étudiant s'occupait de tout avec un égal succès.

Les rives du *Loch Lomond*, déjà si célèbres par les souvenirs de l'historien Buchanan et de l'illustre inventeur des logarithmes, développaient son goût pour les beautés de la nature et la botanique. Des courses sur diverses montagnes d'Écosse lui faisaient sentir que la croûte inerte du globe n'est pas moins digne d'attention, et il devenait minéralogiste. James profitait aussi de ses fréquents rapports avec les pauvres habitants de ces contrées pittoresques, pour déchiffrer leurs traditions locales, leurs ballades populaires, leurs sauvages préjugés. Quand la mauvaise santé le retenait sous le toit paternel, c'était principalement la chimie qui devenait l'objet de ses expériences. Les *Elements of natural philosophy* de s'Gravesande l'initiaient aussi aux mille et mille merveilles de la physique générale; enfin, comme toutes les personnes malades, il dévorait les ouvrages de médecine et de chirurgie qu'il pouvait se procurer. Ces dernières sciences avaient excité chez l'écolier une telle passion, qu'on le surprit un jour emportant dans sa chambre, pour la disséquer, la tête d'un enfant, mort d'une maladie inconnue.

Watt, toutefois, ne se destina ni à la botanique, ni à la minéralogie, ni à l'érudition, ni à la poésie, ni à la chimie,

(1) Il périt, en 1762, sur un des navires de son père, dans la traversée de Greenock en Amérique, à l'âge de 23 ans.

ni à la physique, ni à la médecine, ni à la chirurgie, quoiqu'il fût si bien préparé pour chacun de ces genres d'études. En 1755, il alla à Londres se placer chez M. *John Morgan*, constructeur d'instruments de mathématiques et de marine, dans *Finch-Lane, Cornhill.* L'homme qui devait couvrir l'Angleterre de moteurs à côté desquels, du moins quant aux effets, l'antique et colossale machine de Marly ne serait qu'un pygmée, entra dans la carrière industrielle en construisant, de ses mains, des instruments subtils, délicats, fragiles; ces petits, mais admirables sextants à réflexion, auxquels l'art nautique est redevable de ses progrès.

Watt ne resta guère qu'un an chez M. Morgan, et retourna à Glasgow, où d'assez graves difficultés l'attendaient. Appuyées sur leurs antiques priviléges, les corporations d'arts et métiers regardèrent le jeune artiste de Londres comme un intrus, et lui dénièrent obstinément le droit d'ouvrir le plus humble atelier. Tout moyen de conciliation ayant échoué, l'université de Glasgow intervint, disposa en faveur du jeune Watt, d'un petit local dans ses propres bâtiments, lui permit d'établir une boutique, et l'honora du titre de son ingénieur. Il existe encore de petits instruments de cette époque, d'un travail exquis, exécutés tout entiers de la main de Watt. J'ajouterai que son fils a mis récemment sous mes yeux, les premières épures de la machine à vapeur, et qu'elles sont vraiment remarquables par la finesse, par la fermeté, par la précision du trait. Ce n'était donc pas sans raison, quoi qu'on en ait pu dire, que Watt parlait avec complaisance de son adresse manuelle.

Peut-être aurez-vous quelque raison de penser que je porte le scrupule bien loin en réclamant, pour notre confrère, un mérite qui ne peut guère ajouter à sa gloire. Mais, je l'avouerai, je n'entends jamais faire l'énumération pédantesque des qualités dont les hommes supérieurs ont été dépourvus, sans me rappeler ce mauvais général du siècle de Louis XIV, qui portait toujours son épaule droite très-haute, parce que le prince Eugène de Savoie était un peu bossu, et crut que cela le dispensait d'essayer de pousser la ressemblance plus loin.

Watt atteignait à peine sa vingt-unième année, lorsque l'Université de Glasgow se l'attacha. Il avait eu pour protecteurs, Adam Smith, l'auteur du fameux ouvrage sur la Richesse des nations; Black, que ses découvertes touchant la chaleur latente et le carbonate de chaux devaient placer dans un rang distingué parmi les premiers chimistes du XVIII^e siècle; Robert Simson, le célèbre restaurateur des plus importants traités des anciens géomètres. Ces personnages éminents croyaient d'abord n'avoir arraché aux tracasseries des corporations, qu'un ouvrier adroit, zélé, de mœurs douces; mais ils ne tardèrent pas à reconnaître l'homme d'élite, et lui vouèrent la plus vive amitié. Les élèves de l'université tenaient aussi à honneur d'être admis dans l'intimité de Watt. Enfin, *sa boutique;* oui, Messieurs, une boutique! devint une sorte d'académie où toutes les illustrations de Glasgow allaient discuter les questions les plus délicates d'art, de science, de littérature. Je n'oserais pas, en vérité, vous dire quel était, au milieu de ces réunions savantes, le rôle du jeune ouvrier de vingt-un ans, si je ne pouvais m'appuyer sur une pièce inédite du plus illustre des rédacteurs de l'Encyclopédie britannique.

« Quoique élève encore, j'avais, dit Robison, la vanité de « me croire assez avancé dans mes études favorites de méca-

« nique et de physique, lorsqu'on me présenta à Watt; aussi,
« je l'avoue, je ne fus pas médiocrement mortifié en voyant
« à quel point le jeune ouvrier m'était supérieur...... Dès
« que, dans l'université, une difficulté nous arrêtait, et cela
« quelle qu'en fût la nature, nous courions chez notre ar-
« tiste. Une fois provoqué, chaque sujet devenait pour lui
« un texte d'études sérieuses et de découvertes. Jamais il ne
« lâchait prise qu'après avoir entièrement éclairci la ques-
« tion proposée, soit qu'il la réduisît à rien, soit qu'il en tirât
« quelque résultat net et substantiel...... Un jour, la solu-
« tion désirée sembla nécessiter la lecture de l'ouvrage de
« Leupold sur les machines : Watt apprit aussitôt l'allemand.
« Dans une autre circonstance et pour un motif semblable,
« il se rendit maître de la langue italienne...... La simpli-
« cité naïve du jeune ingénieur lui conciliait, sur-le-champ,
« la bienveillance de tous ceux qui l'accostaient. Quoique
« j'aie assez vécu dans le monde, je suis obligé de déclarer
« qu'il me serait impossible de citer un second exemple d'un
« attachement aussi sincère et aussi général, accordé à quel-
« que personne d'une supériorité incontestée. Il est vrai que
« cette supériorité était voilée par la plus aimable candeur,
« et qu'elle s'alliait à la ferme volonté de reconnaître libéra-
« lement le mérite de chacun. Watt se complaisait même à
« doter l'esprit inventif de ses amis, de choses qui n'étaient
« souvent que ses propres idées présentées sous une autre
« forme. J'ai d'autant plus le droit, ajoute Robison, d'insis-
« ter sur cette rare disposition d'esprit, que j'en ai person-
« nellement éprouvé les effets. »

Vous aurez à décider, Messieurs, s'il n'était pas aussi honorable de prononcer ces dernières paroles, que de les avoir inspirées.

Les études si sérieuses, si variées dans lesquelles les circonstances de sa singulière position jetaient sans cesse le jeune artiste de Glasgow, ne nuisirent jamais aux travaux de l'atelier. Ceux-ci, il les exécutait de jour; la nuit était consacrée aux recherches théoriques. Confiant dans les ressources de son imagination, Watt paraissait se complaire dans les entreprises les plus difficiles, et auxquelles on devait le supposer le moins propre. Croira-t-on qu'il se chargea d'exécuter un orgue, lui totalement insensible au charme de la musique; lui qui, même, n'était jamais parvenu à distinguer une note d'une autre : par exemple, l'*ut* du *fa*? Cependant, ce travail fut mené à bon port. Il va sans dire que le nouvel instrument présentait des améliorations capitales dans sa partie mécanique, dans les régulateurs, dans la manière d'apprécier la force du vent; mais on s'étonnera d'apprendre que ses qualités harmoniques n'étaient pas moins remarquables et qu'elles charmèrent des musiciens de profession. Watt résolut une partie importante du problème; il arriva au *tempérament* assigné par un homme de l'art, à l'aide du phénomène des battements, alors assez mal apprécié, et dont il n'avait pu prendre connaissance que dans l'ouvrage profond, mais très-obscur, du docteur Robert Smith, de Cambridge.

Histoire de la machine à vapeur.

Me voici arrivé à la période la plus brillante de la vie de Watt, et aussi, je le crains, à la partie la plus difficile de ma tâche. L'immense importance des inventions dont j'ai à vous entretenir, ne saurait être l'objet d'un doute; mais je ne parviendrai peut-être pas à les faire convenablement apprécier, sans me jeter dans de minutieuses comparaisons numériques. Afin que ces comparaisons, si elles deviennent indispensables, soient faciles à saisir, je vais présenter, le plus brièvement possible, les notions délicates de physique sur lesquelles nous aurons à les appuyer.

Par l'effet de simples changements de température, l'eau peut exister dans trois états parfaitement distincts : à l'état solide, à l'état liquide, à l'état aérien ou gazeux. Au-dessous de zéro de l'échelle du thermomètre centigrade, l'eau devient de la glace ; à 100° elle se transforme rapidement en gaz ; dans tous les degrés intermédiaires elle est liquide.

L'observation scrupuleuse des points de passage d'un de ces états à l'autre, conduit à des découvertes du premier ordre, qui sont la clef des appréciations économiques des machines à vapeur.

L'eau n'est pas nécessairement plus chaude que toute espèce de glace ; l'eau peut se maintenir à zéro de température sans se geler ; la glace peut rester à zéro sans se fondre ; mais cette eau et cette glace, toutes les deux au même degré de température, toutes les deux à zéro, il semble bien difficile de croire qu'elles ne diffèrent que par leurs propriétés physiques ; qu'aucun élément, étranger à l'eau proprement dite, ne distingue l'eau solide de l'eau liquide. Une expérience fort simple va éclairer ce mystère.

Mêlez un kilogramme d'eau à zéro, avec un kilogramme d'eau à 75° centigrades ; les deux kilogrammes du mélange seront à 37° $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à la température moyenne des deux liquides composants. L'eau chaude se trouve ainsi avoir conservé 37° $\frac{1}{2}$ de son ancienne température ; elle a cédé les

$37^\circ \frac{1}{2}$ autres degrés à l'eau froide ; tout cela était naturel ; tout cela pouvait être prévu.

Répétons maintenant l'expérience avec une seule modification : au lieu du kilogramme d'eau à zéro, prenons un kilogramme de glace à la même température de zéro. Du mélange de ce kilogramme de glace avec le kilogramme d'eau à 75°, résulteront deux kilogrammes d'eau liquide, puisque la glace, baignée dans l'eau chaude, ne pourra manquer de se fondre et qu'elle conservera son ancien poids ; mais ne vous hâtez pas d'attribuer au mélange, comme tout à l'heure, une température de $37^\circ \frac{1}{2}$, car vous vous tromperiez; cette température sera seulement de zéro; il ne restera aucune trace des 75° de chaleur que le kilogramme d'eau possédait; ces 75° auront désagrégé les molécules de glace, ils se seront combinés avec elles, mais sans les échauffer en aucune manière.

Je n'hésite pas à présenter cette expérience de Black, comme une des plus remarquables de la physique moderne. Voyez, en effet, ses conséquences :

L'eau à zéro et la glace à zéro diffèrent dans leur composition intime. Le liquide renferme, de plus que le solide, 75° d'un corps impondéré qu'on appelle *la chaleur*. Ces 75° sont si bien cachés dans le composé, j'allais presque dire dans l'alliage aqueux, que le thermomètre le plus sensible n'en dévoile pas l'existence. De la chaleur, non sensible à nos sens, non sensible aux instruments les plus délicats ; de *la chaleur* LATENTE, enfin, car c'est le nom qu'on lui a donné, est donc un des principes constituants des corps.

La comparaison de l'eau bouillante, de l'eau à 100°, avec la vapeur qui s'en dégage et dont la température est aussi de

100°, conduit, mais sur une bien plus grande échelle, à des résultats analogues. Au moment de se constituer à l'état de vapeur à 100°, l'eau à la même température de 100°, s'imprègne *sous forme latente,* sous forme non sensible au thermomètre, d'une quantité énorme de chaleur. Quand la vapeur reprend l'état liquide, cette chaleur de composition se dégage, et elle va échauffer tout ce qui sur son chemin est susceptible de l'absorber. Si on fait traverser, par exemple, 5,35 kilogrammes d'eau à zéro, par un seul kilogramme de vapeur à 100°, cette vapeur se liquéfie entièrement. Les 6,35 kilogrammes résultant du mélange, sont à 100° de température. Dans la composition intime d'un kilogramme de vapeur, il entre donc une quantité de chaleur latente qui pourrait porter un kilogramme d'eau, dont on empêcherait l'évaporation, de o à 535 degrés centigrades. Ce résultat paraîtra sans doute énorme, mais il est certain; la vapeur d'eau n'existe qu'à cette condition; partout où un kilogramme d'eau à zéro se vaporise naturellement ou artificiellement, il doit se saisir, pour éprouver la transformation, et il se saisit, en effet, sur les corps environnants, de 535° de chaleur. Ces degrés, on ne saurait assez le répéter, la vapeur les restitue intégralement aux surfaces de toute nature sur lesquelles sa liquéfaction ultérieure s'opère. Voilà, pour le dire en passant, tout l'artifice du chauffage à la vapeur. On comprend bien mal cet ingénieux procédé, lorsqu'on s'imagine que le gaz aqueux ne va porter au loin, dans les tuyaux où il circule, que la chaleur sensible ou thermométrique : les principaux effets sont dus à la chaleur de composition, à la chaleur cachée, à la chaleur latente qui se dégage au moment où le contact de surfaces froides ramène la vapeur de l'état gazeux à l'état liquide.

Désormais, nous devrons donc ranger la chaleur parmi les principes constituants de la vapeur d'eau. La chaleur, on ne l'obtient qu'en brûlant du bois ou du charbon; la vapeur a donc une valeur commerciale supérieure à celle du liquide, de tout le prix du combustible employé dans l'acte de la vaporisation. Si la différence de ces deux valeurs est fort grande, attribuez-le surtout à la chaleur latente : la chaleur thermométrique, la chaleur sensible n'y entre que pour une faible part.

J'aurai peut-être besoin de m'étayer, plus tard, de quelques autres propriétés de la vapeur d'eau. Si je n'en fais point mention dès ce moment, ce n'est pas que j'attribue à cette assemblée la disposition d'esprit de certains écoliers qui disaient un jour à leur professeur de géométrie : « Pourquoi prenez-« vous la peine de démontrer ces théorèmes? Nous avons en « vous la plus entière confiance; donnez-nous votre *parole* « *d'honneur* qu'ils sont vrais et tout sera dit! » Mais j'ai dû songer à ne pas abuser de votre patience; j'ai dû me rappeler aussi qu'en recourant à des traités spéciaux, vous comblerez aisément les lacunes que je n'aurai pas su éviter.

Essayons, maintenant, de faire la part des nations et des personnes qui semblent devoir être citées dans l'histoire de la machine à vapeur. Traçons la série chronologique d'améliorations que cette machine a reçues, depuis ses premiers germes, déjà fort anciens, jusqu'aux découvertes de Watt. J'aborde ce sujet avec la ferme volonté d'être impartial; avec le vif désir de rendre à chaque inventeur la justice qui lui est due; avec la certitude de rester étranger à toute considération, indigne de la mission que vous m'avez donnée, indigne de la majesté de la science, qui prendrait sa source dans des préjugés nationaux. J'avoue, d'un autre côté, que je ferai peu de compte des nombreux arrêts déjà rendus sous la dictée de pareils préjugés; que je me préoccuperai encore moins, s'il est possible, des critiques acerbes qui m'attendent sans doute, car le passé est le miroir de l'avenir.

Question bien posée est à moitié résolue. Si l'on s'était rappelé ce dicton plein de sens, les débats relatifs à l'invention de la machine à vapeur, n'auraient certainement pas présenté le caractère d'acrimonie, de violence, dont ils ont été empreints jusqu'ici. Mais on s'était étourdiment jeté dans un défilé sans issue, en voulant trouver un inventeur unique, là où il y avait nécessité d'en distinguer plusieurs. L'horloger le plus instruit de l'histoire de son art, resterait muet devant celui qui demanderait, en termes généraux, quel est l'inventeur des montres. La question, au contraire, l'embarrasserait peu, si elle portait, séparément, sur le moteur, sur les diverses formes d'échappement, sur le balancier. Ainsi en est-il de la machine à vapeur : elle présente aujourd'hui la réalisation de plusieurs idées capitales, mais entièrement distinctes, qui peuvent ne pas être sorties d'une même source et dont notre devoir est de chercher soigneusement l'origine et la date.

Si avoir fait un usage quelconque de la vapeur d'eau, donnait, comme on l'a prétendu, des droits à figurer dans cette histoire, il faudrait citer les Arabes en première ligne, puisque, de temps immémorial, leur principal aliment, la semoule, qu'ils nomment *couscoussou*, se cuit, par l'action de la vapeur, dans des passoires placées au-dessus de marmites rustiques. Une semblable conséquence suffit pour faire ressortir tout le ridicule du principe dont elle découle.

Gerbert, notre compatriote, celui-là même qui porta la tiare sous le nom de Sylvestre II, acquiert-il des titres plus réels lorsque, vers le milieu du IX^{e} siècle, il fait résonner les tuyaux de l'orgue de la cathédrale de Reims, à l'aide de la vapeur d'eau? Je ne le pense pas : dans l'instrument du futur pape, j'aperçois un courant de vapeur substitué au courant d'air ordinaire, la production du phénomène musical des tuyaux d'orgue, mais nullement un effet mécanique proprement dit.

Le premier exemple de mouvement engendré par la vapeur, je le trouve dans un joujou, encore plus ancien que l'orgue de Gerbert; dans un éolipyle d'Héron d'Alexandrie, dont la date remonte à cent vingt ans avant notre ère. Peut-être sera-t-il difficile, sans le secours d'aucune figure, de donner une idée claire du mode d'action de ce petit appareil ; je vais toutefois le tenter.

Quand un gaz s'échappe, dans un certain sens, du vase qui le renferme, ce vase, par voie de réaction, tend à se mouvoir dans le sens diamétralement contraire. Le recul d'un fusil chargé à poudre n'est pas autre chose : les gaz qu'engendre l'inflammation du salpêtre, du charbon et du soufre, s'élancent dans l'air suivant la direction du canon; la direction du canon, prolongée en arrière, aboutit à l'épaule de la personne qui a tiré ; c'est donc sur l'épaule que la crosse doit réagir avec force. Pour changer le sens du recul, il suffirait de faire sortir le jet de gaz dans une autre direction. Si le canon, bouché à son extrémité, était percé seulement d'une ouverture latérale perpendiculaire à sa direction et horizontale, c'est latéralement et horizontalement que le gaz de la poudre s'échapperait; c'est perpendiculairement au canon que s'opérerait le recul; c'est sur les bras et non sur l'épaule qu'il s'exercerait. Dans le premier cas, le recul poussait le tireur de l'avant à l'arrière, comme pour le renverser; dans le second, il tendrait à le faire pirouetter sur lui-même. Qu'on attache donc le canon, invariablement et dans le sens horizontal, à un axe vertical mobile, et au moment du tir il changera plus ou moins de direction, et il fera tourner cet axe.

En conservant la même disposition, supposons que l'axe vertical rotatif soit creux, mais fermé à la partie supérieure; qu'il aboutisse, par le bas, comme une sorte de cheminée, à une chaudière où s'engendre de la vapeur; qu'il existe, de plus, une libre communication latérale entre l'intérieur de cet axe et l'intérieur du canon de fusil, de manière qu'après avoir rempli l'axe la vapeur pénètre dans le canon et en sorte de côté par son ouverture horizontale. Sauf l'intensité, cette vapeur, en s'échappant, agira à la manière des gaz dégagés de la poudre dans le canon de fusil bouché à son extrémité et percé latéralement; seulement, on n'aura pas ici une simple secousse, ainsi que cela arrivait dans le cas de l'explosion brusque et instantanée du fusil; au contraire, le mouvement de rotation sera uniforme et continu, comme la cause qui l'engendre.

Au lieu d'un seul fusil ou, plutôt au lieu d'un seul tuyau horizontal, qu'on en adapte plusieurs au tube vertical rotatif, et nous aurons, à cela près de quelques différences peu essentielles, l'ingénieux appareil d'Héron d'Alexandrie.

Voilà, sans contredit, une machine dans laquelle la vapeur d'eau engendre du mouvement et peut produire des effets mécaniques de quelque importance, voilà une véritable machine à vapeur. Hâtons-nous d'ajouter qu'elle n'a aucun point de contact réel, ni par sa forme, ni par le mode d'action de la force motrice, avec les machines de cette espèce actuellement en usage. Si jamais la réaction d'un courant de vapeur devient utile dans la pratique, il faudra, incontestablement, en faire remonter l'idée jusqu'à Héron; aujourd'hui l'éolipyle rotatif pourrait seulement être cité ici, comme la gravure en bois dans l'histoire de l'imprimerie (1).

Dans les machines de nos usines, de nos paquebots, de nos chemins en fer, le mouvement est le résultat immédiat de l'élasticité de la vapeur. Il importe donc de chercher où et comment l'idée de cette force a pris naissance.

Les Grecs et les Romains n'ignoraient pas que la vapeur d'eau peut acquérir une puissance mécanique prodigieuse. Ils expliquaient déjà, à l'aide de la vaporisation subite d'une certaine masse de ce liquide, les effroyables tremblements de terre qui, en quelques secondes, lancent l'Océan hors de ses limites naturelles; qui renversent jusque dans leurs fonde-

(1) Ces réflexions s'appliquent aussi au projet que Branca, architecte italien, publia à Rome, en 1629, dans un ouvrage intitulé : *Le Machine*, et qui consistait à engendrer un mouvement de rotation en dirigeant la vapeur sortant d'un éolipyle, sous forme de souffle, sous forme de vent, sur les ailettes d'une roue. Si, contre toute probabilité, la vapeur est un jour employée utilement à l'état de souffle direct, Branca, ou l'auteur actuellement inconnu à qui il a pu emprunter cette idée, prendra le premier rang dans l'histoire de ce nouveau genre de machines. A l'égard des machines actuelles, les titres de Branca sont complétement nuls.

ments les monuments les plus solides de l'industrie humaine; qui créent subitement, au milieu des mers profondes, des écueils redoutables; qui font surgir aussi de hautes montagnes au centre même des continents.

Quoi qu'on en ait dit, cette théorie des tremblements de terre ne suppose pas que leurs auteurs s'étaient livrés à des appréciations, à des expériences, à des mesures exactes. Personne n'ignore aujourd'hui qu'au moment où le métal incandescent pénètre dans les moules en terre ou en plâtre des fondeurs, il suffit que ces moules renferment quelques gouttes de liquide, pour qu'il en résulte de dangereuses explosions. Malgré les progrès des sciences, les fondeurs modernes n'évitent pas toujours ces accidents; comment donc les anciens s'en seraient-ils entièrement garantis? Pendant qu'ils coulaient les milliers de statues, splendides ornements des temples, des places publiques, des jardins, des habitations particulières d'Athènes et de Rome, il dut arriver des malheurs; les hommes de l'art en trouvèrent la cause immédiate; les philosophes, d'autre part, obéissant à l'esprit de généralisation qui était le trait caractéristique de leurs écoles, y virent des miniatures, de véritables images des éruptions de l'Etna.

Tout cela peut être vrai, sans avoir la moindre importance dans l'histoire qui nous occupe. Je n'ai même tant insisté, je l'avoue, sur ces légers linéaments de la science antique au sujet de la force de la vapeur d'eau, qu'afin de vivre en paix, s'il est possible, avec les Dacier des deux sexes, avec les Dutens de notre époque (1).

---

(1) Par le même motif, je ne puis guère me dispenser de rapporter ici

Les forces naturelles ou artificielles, avant de devenir vraiment utiles aux hommes, ont presque toujours été exploitées au profit de la superstition. La vapeur d'eau ne sera pas une exception à la règle générale.

Les chroniques nous avaient appris que sur les bords du Weser, le dieu des anciens Teutons leur marquait quelquefois son mécontentement, par une sorte de coup de tonnerre auquel succédait, immédiatement après, un nuage qui remplissait l'enceinte sacrée. L'image du dieu *Bustérich*, trouvée, dit-on, dans des fouilles, montre clairement la manière dont s'opérait le prétendu prodige.

Le dieu était en métal. La tête creuse renfermait une amphore d'eau. Des tampons de bois fermaient la bouche et un autre trou situé au-dessus du front. Des charbons, adroitement placés dans une cavité du crâne, échauffaient graduellement le liquide. Bientôt la vapeur engendrée faisait sauter les tampons avec fracas : alors, elle s'échappait violemment en deux jets et formait un épais nuage entre le

---

une anecdote qui, à travers ce qu'elle offre de romanesque et de contraire à ce que nous savons aujourd'hui sur le mode d'action de la vapeur d'eau, laisse voir la haute idée que les anciens se formaient de la puissance de cet agent mécanique. On raconte qu'Anthémius, l'architecte de Justinien, avait une habitation contiguë à celle de Zénon, et que pour faire pièce à cet orateur, son ennemi déclaré, il plaça dans le rez-de-chaussée de sa propre maison plusieurs chaudrons remplis d'eau ; que de l'ouverture pratiquée sur le couvercle de chacun de ces chaudrons, partait un tube flexible qui allait s'appliquer dans le mur mitoyen, sous les poutres qui soutenaient les plafonds de la maison de Zénon ; enfin, que ces plafonds dansaient comme s'il y avait eu de violents tremblements de terre, dès que le feu était allumé sous les chaudrons.

dieu et ses adorateurs stupéfaits. Il paraîtrait que dans le moyen âge des moines trouvèrent l'invention de bonne prise, et que la tête de Bustérich n'a pas seulement fonctionné devant des assemblées teutonnes (1).

Pour rencontrer, après les premiers aperçus des philosophes grecs, quelques notions utiles sur les propriétés de la vapeur d'eau, on se voit obligé de franchir un intervalle de près de vingt siècles. Il est vrai qu'alors des expériences précises, concluantes, irrésistibles, succèdent à des conjectures dénuées de preuves.

En 1605, Flurence Rivault, gentilhomme de la chambre d'Henri IV et précepteur de Louis XIII, découvre, par exemple, qu'une bombe à parois épaisses et contenant de l'eau, fait tôt ou tard explosion quand on la place sur le feu *après l'avoir bouchée,* c'est-à-dire, lorsqu'on empêche la vapeur d'eau de se répandre librement dans l'air à mesure qu'elle s'engendre. La puissance de la vapeur d'eau se trouve ici caractérisée par une épreuve nette et susceptible, jusqu'à un certain point, d'appréciations numériques (2); mais elle

(1) Héron d'Alexandrie attribuait les sons, objets de tant de controverses, que la statue de Memnon faisait entendre quand les rayons du soleil levant l'avaient frappée, au passage, par certaines ouvertures, d'un courant de vapeur que la chaleur solaire était censé avoir produit aux dépens du liquide dont les prêtres égyptiens garnissaient, dit-on, l'intérieur du piédestal du colosse. Salomon de Caus, Kircher, etc., ont été jusqu'à vouloir découvrir les dispositions particulières à l'aide desquelles la fraude théocratique s'emparait ainsi des imaginations crédules; mais tout porte à croire qu'ils n'ont pas deviné juste, si même, en ce genre, quelque chose était à deviner.

(2) Si quelque érudit trouvait que je n'ai pas remonté assez haut en

se présente encore à nous comme un terrible moyen de destruction.

Des esprits éminents ne s'arrêtèrent pas à cette réflexion chagrine. Ils conçurent que les forces mécaniques doivent devenir, ainsi que les passions humaines, utiles ou nuisibles, suivant qu'elles sont bien ou mal dirigées. Dans le cas particulier de la vapeur, il suffit, en effet, de l'artifice le plus simple, pour appliquer à un travail productif la force élastique redoutable qui, suivant toute apparence, ébranle la terre jusque dans ses fondements, qui entoure l'art du statuaire de dangers réels, qui brise en cent éclats les parois épaisses d'une bombe!

Dans quel état se trouve ce projectile avant son explosion? Le bas renferme de l'eau très-chaude, *mais encore liquide;* le reste de la capacité est rempli de vapeur; celle-ci, car c'est le trait caractéristique des substances gazeuses, exerce également son action dans tous les sens : elle presse avec la même intensité, l'eau et les parois métalliques qui la contiennent. Plaçons un robinet à la partie inférieure de ces parois. Lors-

---

m'arrêtant à Flurence Rivault; s'il empruntait une citation à Alberti, qui écrivait en 1411; si d'après cet auteur il nous disait que dès le commencement du XV^e siècle, les chaufourniers craignaient extrêmement, pour eux et pour leurs fours, les explosions des pierres à chaux dans l'intérieur desquelles il y a fortuitement quelque cavité, je répondrais qu'Alberti ignorait lui-même la cause réelle de ces terribles explosions; qu'il les attribuait à la transformation *en vapeur* de l'air renfermé dans la cavité, opérée par l'action de la flamme; je remarquerais, enfin, qu'une pierre à chaux, accidentellement creuse, n'aurait donné aucun des moyens d'appréciations numériques dont l'expérience de Rivault paraît susceptible.

qu'il sera ouvert, l'eau poussée par la vapeur en jaillira avec une vitesse extrême. Si le robinet aboutit à un tuyau qui, après s'être recourbé en dehors autour de la bombe se dirige verticalement de bas en haut, l'eau refoulée y montera d'autant plus que la vapeur aura plus d'élasticité; ou bien, car c'est la même chose en d'autres termes, l'eau s'élèvera d'autant plus que sa température sera plus forte. Ce mouvement ascensionnel ne trouvera de limites que dans la résistance des parois de l'appareil.

A notre bombe substituons une chaudière métallique épaisse d'une vaste capacité, et rien ne nous empêchera de porter de grandes masses de liquide à des hauteurs indéfinies par la seule action de la vapeur d'eau; et nous aurons créé, dans toute l'acception de ce mot, une machine à vapeur pouvant servir aux épuisements.

Vous connaissez maintenant l'invention que la France et l'Angleterre se sont disputée, comme jadis sept villes de la Grèce s'attribuèrent, tour à tour, l'honneur d'avoir été le berceau d'Homère. Sur l'autre rive de la Manche on en gratifie unanimement le marquis de Worcester, de l'illustre maison de Somerset. De ce côté-ci du détroit nous soutenons qu'elle appartient à un humble ingénieur presque totalement oublié des biographes : à Salomon de Caus, qui naquit à Dieppe ou dans ses environs. Jetons un coup d'œil impartial sur les titres des deux compétiteurs.

Worcester, gravement impliqué dans les intrigues des dernières années du règne des Stuarts, fut enfermé dans la Tour de Londres. Un jour, suivant la tradition, le couvercle de la marmite où cuisait son dîner se souleva subitement.

Que faire en pareil gîte, à moins que l'on n'y songe? Worcester songea donc à ce que présentait d'étrange le phénomène dont il venait d'être témoin. Alors s'offrit à lui la pensée que la même force qui avait soulevé le couvercle, pourrait devenir, en certaines circonstances, un moteur utile et commode. Après avoir recouvré la liberté, il exposa, en 1663, dans un livre intitulé *Century of inventions*, les moyens par lesquels il entendait réaliser son idée. Ces moyens, dans ce qu'ils renferment d'essentiel, sont, autant du moins qu'on peut les comprendre, la bombe à demi-remplie de liquide, et le tuyau ascensionnel vertical que nous décrivions tout à l'heure.

Cette bombe, ce même tuyau sont dessinés dans *La raison des forces mouvantes*, ouvrage de Salomon de Caus. Là, l'idée est présentée nettement, simplement, sans aucune prétention. Son origine n'a rien de romanesque; elle ne se rattache ni à des événements de guerre civile, ni à une prison d'État célèbre, ni même au soulèvement du couvercle de la marmite d'un détenu; mais, ce qui vaut infiniment mieux dans une question de priorité, elle est, par sa publication, de quarante-huit ans plus ancienne que la *Century of inventions*, et de quarante-un ans antérieure à l'emprisonnement de Worcester.

Ainsi ramené à une comparaison de dates, le débat semblait devoir être à son terme. Comment soutenir, en effet, que 1615 n'avait pas précédé 1663? Mais ceux dont la principale pensée paraît avoir été d'écarter tout nom français de cet important chapitre de l'histoire des sciences, changèrent subitement de terrain, dès qu'on eut fait sortir *La raison des* *forces mouvantes* des bibliothèques poudreuses où elle restait ensevelie. Ils brisèrent, sans hésiter, leur ancienne idole; le marquis de Worcester fut sacrifié au désir d'annuler les titres de Salomon de Caus; la bombe placée sur un brasier ardent et son tuyau ascensionnel cessèrent enfin d'être les véritables germes des machines à vapeur actuelles!

Quant à moi je ne saurais accorder que celui-là n'ait rien fait d'utile, qui, réfléchissant sur l'énorme ressort de la vapeur d'eau fortement échauffée, vit le premier qu'elle pourrait servir à élever de grandes masses de ce liquide à toutes les hauteurs imaginables. Je ne puis admettre qu'il ne soit dû aucun souvenir à l'ingénieur qui, le premier aussi, décrivit une machine propre à réaliser de pareils effets. N'oublions pas qu'on ne peut juger sainement du mérite d'une invention, qu'en se transportant, par la pensée, au temps où elle naquit; qu'en écartant momentanément de son esprit, toutes les connaissances que les siècles postérieurs à la date de cette invention y ont versées. Imaginons un ancien mécanicien : Archimède, par exemple, consulté sur les moyens d'élever à une grande hauteur l'eau contenue dans un vaste récipient métallique fermé. Il parlerait certainement de grands leviers, de poulies simples ou moufflées, de treuils, peut-être de son ingénieuse vis; mais quelle ne serait pas sa surprise, si, pour résoudre le problème, quelqu'un se contentait d'un fagot et d'une allumette! eh bien! je le demande, oserait-on refuser le titre d'invention, à un procédé dont l'immortel auteur des premiers et vrais principes de la statique et de l'hydrostatique, aurait été étonné? L'appareil de Salomon de Caus, cette enveloppe métallique où l'on crée une force motrice presque indéfinie à l'aide d'un fagot et d'une allumette, figurera toujours noblement dans l'histoire de la machine à vapeur (1).

Il est fort douteux que Salomon de Caus et Worcester aient jamais fait exécuter leur appareil. Cet honneur appartient à un Anglais, au capitaine Savery. J'assimile la machine que cet ingénieur construisit en 1698, à celle de ses deux devanciers, quoiqu'il y ait introduit quelques modifications essentielles : celle, entre autres, de créer la vapeur dans un vase particulier. S'il importe peu, quant au principe, que la vapeur motrice soit engendrée aux dépens de l'eau à élever et au sein même de la chaudière où elle doit agir, ou qu'elle naisse dans un vase séparé pour se rendre à volonté, à l'aide

---

(1) On a imprimé que J.-B. Porta avait donné, en 1606, dans ses *Spiritali*, neuf ou dix ans avant la publication de l'ouvrage de Salomon de Caus, la description d'une machine destinée à élever de l'eau au moyen de la force élastique de la vapeur. J'ai montré ailleurs que le savant napolitain *ne parlait, ni directement ni indirectement de machine*, dans le passage auquel l'on a fait allusion ; que son but, son but unique était de déterminer expérimentalement les volumes relatifs de l'eau et de la vapeur ; que dans le petit appareil de physique employé à cet effet, la vapeur d'eau ne pouvait élever le liquide, d'après les propres paroles de l'auteur, que d'un petit nombre de centimètres (quelques pouces); que dans toute la description de l'expérience, il n'y a pas un seul mot impliquant l'idée que Porta connût la puisssance de cet agent et la possibilité de l'appliquer à la production d'une machine efficace.

Pense-t-on que j'aurais dû citer Porta, ne fût-ce qu'à raison de ses recherches sur la transformation de l'eau en vapeur? Mais je dirai alors que le phénomène avait été déjà étudié avec attention par le professeur Besson, d'Orléans, vers le milieu du XVI^e siècle, et qu'un des Traités de ce mécanicien, en 1569, renferme notamment un essai de détermination des volumes relatifs de l'eau et de la vapeur.

d'un tuyau de communication portant un robinet, au-dessus du liquide qu'il faut refouler, il n'en est certainement pas de même sous le point de vue de la pratique. Un autre changement encore plus capital, bien digne d'une mention spéciale et dû également à Savery, trouvera mieux sa place dans l'article que nous consacrerons tout à l'heure aux travaux de Papin et de Newcomen.

Savery avait intitulé son ouvrage l'*Ami des mineurs* (*Miner's friend*). Les mineurs se montrèrent peu sensibles à la politesse. Avec une seule exception, aucun ne lui commanda de machines. Elles n'ont été employées que pour distribuer de l'eau dans les diverses parties des palais, des maisons de plaisance, des parcs et des jardins; on n'y a eu recours que pour franchir des différences de niveau de 12 à 15 mètres. Il faut reconnaître, au reste, que les dangers d'explosion auraient été redoutables, si on avait donné aux appareils l'immense puissance à laquelle leur inventeur prétendait atteindre.

Malgré ce que le succès pratique de Savery présente d'incomplet, le nom de cet ingénieur mérite d'occuper une place très-distinguée dans l'histoire de la machine à vapeur. Les personnes dont toute la vie a été consacrée à des travaux spéculatifs, ignorent combien il y a loin du projet en apparence le mieux étudié à sa réalisation. Ce n'est pas que je prétende, avec un célèbre savant allemand, que *la nature s'écrie toujours non! non!* quand on veut soulever quelque coin du voile qui la recouvre; mais en suivant la même métaphore, il est permis du moins d'affirmer que l'entreprise devient d'autant plus difficile, d'autant plus délicate, d'un succès d'autant plus douteux, qu'elle exige et le concours de plus d'artistes et l'emploi d'un plus grand nombre d'éléments matériels; sous ces divers rapports et en faisant la part des époques, personne s'est-il trouvé dans des conditions plus défavorables que Savery?

J'ai parlé jusqu'ici de machines à vapeur, dont la ressemblance avec celles qui portent aujourd'hui ce nom pourrait être plus ou moins contestée. Maintenant il sera question de la *machine à vapeur moderne*, de celle qui fonctionne dans nos manufactures, sur nos bateaux, à l'entrée de presque tous les puits de mines. Nous la verrons naître, grandir, se développer, tantôt d'après les inspirations de quelques hommes d'élite, tantôt sous l'aiguillon de la nécessité, car la nécessité est mère du génie.

Le premier nom que nous rencontrerons dans cette nouvelle période, est celui de Denis Papin. C'est à Papin que la France devra le rang honorable qu'elle peut réclamer dans l'histoire de la machine à vapeur. Toutefois, l'orgueil bien légitime que ses succès nous inspireront, ne sera pas sans mélange. Les titres de notre compatriote, nous ne les trouverons que dans des collections étrangères; ses principaux ouvrages, il les publiera au delà du Rhin; sa liberté sera menacée par la révocation de l'édit de Nantes; c'est dans un douloureux exil qu'il jouira, momentanément, du bien dont les hommes d'étude sont le plus jaloux : la tranquillité d'esprit! Hâtons-nous de jeter un voile sur ces déplorables résultats de nos discordes civiles; oublions que le fanatisme s'attaqua aux opinions religieuses du physicien de Blois et rentrons dans la mécanique : à cet égard, du moins, l'orthodoxie de Papin n'a jamais été contestée.

Il y a dans toute machine deux choses à considérer : d'une part, le moteur; de l'autre, le dispositif, plus ou moins compliqué, de pièces fixes et mobiles à l'aide duquel ce moteur transmet son action à la résistance. Au point où les connaissances mécaniques sont aujourd'hui parvenues, le succès d'une machine destinée à produire de très-grands effets, dépend principalement de la nature du moteur, de la manière de l'appliquer, de ménager sa force. Aussi, est-ce à produire un moteur économique, susceptible de faire osciller sans cesse et avec une grande puissance le piston d'un large cylindre, que Papin a consacré sa vie. Emprunter ensuite aux oscillations du piston, la force nécessaire pour faire tourner les meules d'un moulin à blé, les cylindres d'un laminoir, les roues à palettes d'un bateau à vapeur, les bobines d'une filature; pour soulever le lourd marteau qui frappe à coups redoublés d'énormes loupes de fer incandescent, à leur sortie du four à réverbère; pour trancher, avec les deux mâchoires de la cisaille, d'épaisses barres métalliques, comme on coupe un ruban avec des ciseaux bien affilés; ce sont là, je le répète, autant de problèmes d'un ordre très-secondaire et qui n'embarrasseraient pas le plus médiocre ingénieur. Nous pourrons donc nous occuper exclusivement, des moyens à l'aide desquels Papin a proposé d'engendrer son mouvement oscillatoire.

Concevons un large cylindre vertical, ouvert dans le haut, et reposant, par sa base, sur une table métallique percée d'un trou qu'un robinet pourra boucher et laisser libre à volonté.

Introduisons dans ce cylindre un piston, c'est-à-dire, une plaque circulaire pleine et mobile qui le ferme exactement. L'atmosphère pèsera de tout son poids sur la face supérieure de cette espèce de diaphragme; elle le poussera de haut en bas.

La partie de l'atmosphère qui occupera le bas du cylindre, tendra, par sa réaction, à produire le mouvement inverse. Cette seconde force sera égale à la première si le robinet est ouvert, puisqu'un gaz presse également dans tous les sens. Le piston se trouvera ainsi sollicité par deux forces opposées qui se feront équilibre. Il descendra, néanmoins, mais seulement en vertu de sa propre gravité. Un contre-poids légèrement plus lourd que le piston, suffira pour le pousser, au contraire, jusqu'au sommet du cylindre et pour l'y maintenir. Supposons le piston arrivé à cette position extrême. Cherchons des moyens de l'en faire descendre *avec beaucoup de force* et de l'y ramener ensuite.

Concevons qu'après avoir fermé le robinet inférieur, on parvienne à anéantir *subitement* tout l'air contenu dans le cylindre; à y faire, en un mot, le vide. Le vide une fois opéré, le piston ne recevant d'action que de l'atmosphère extérieure qui le presse par dessus, *descendra rapidement*. Ce mouvement achevé, on ouvrira le robinet. L'air reviendra aussitôt, par dessous, contre-balancer l'action de l'atmosphère supérieure. Comme au début, le contre-poids remontera le piston jusqu'au sommet du cylindre, et toutes les parties de l'appareil se retrouveront dans leur état initial. Une seconde évacuation, ou, si on l'aime mieux, un second anéantissement de l'air intérieur, fera de nouveau descendre le piston et ainsi de suite.

Le véritable moteur du système serait ici le poids de l'atmosphère. Hâtons-nous de détromper ceux qui croiraient trouver dans la facilité que nous avons de marcher et même de courir à travers l'air, un indice de la faiblesse d'un pareil moteur. Avec un cylindre de deux mètres de diamètre, l'effort que ferait le piston de la pompe en descendant; le poids qu'il pourrait soulever de toute la hauteur du cylindre, à chacune de ses oscillations, seraient de 31000 kilogrammes ou de 600 quintaux, anciennes mesures. Cette énorme puissance, fréquemment renouvelée, on l'obtiendra à l'aide d'un appareil très-simple, si nous découvrons un moyen, prompt et économique, d'engendrer et de détruire à volonté une pression atmosphérique dans un cylindre de métal.

Ce problème, Papin l'a résolu. Sa belle, sa grande solution, consiste dans la substitution d'une atmosphère de vapeur d'eau à l'atmosphère ordinaire; dans le remplacement de celle-ci par un gaz qui, à 100° centigrades, a précisément la même force élastique, mais avec l'important avantage dont l'atmosphère ordinaire ne jouit pas, que la force du gaz aqueux s'affaiblit très-vite quand la température s'abaisse, qu'elle finit même par disparaître presque entièrement si le refroidissement est suffisant. Je caractériserais aussi bien et en moins de mots la découverte de Papin, si je disais qu'il a proposé de se servir de la vapeur d'eau pour faire le vide dans de grands espaces; que ce moyen est, d'ailleurs, prompt et économique (1).

La machine dans laquelle notre illustre compatriote com-

(1) Un ingénieur anglais, trompé sans doute par quelque traduction infidèle, prétendit, naguère, que l'idée d'employer la vapeur d'eau dans une même machine, comme force élastique et comme moyen rapide d'engendrer le vide, appartenait à Héron. De mon côté j'ai prouvé, sans réplique, que le mécanicien d'Alexandrie n'avait nullement songé à la vapeur; que dans son appareil le mouvement alternatif devait uniquement résulter de la dilatation et de la condensation de l'air, provenant de l'action intermittente des rayons solaires.

bina ainsi le premier, la force élastique de la vapeur d'eau avec la propriété dont cette vapeur jouit de s'anéantir par voie de refroidissement, il ne l'exécuta jamais en grand. Ses expériences furent toujours faites sur de simples modèles. L'eau destinée à engendrer la vapeur n'occupait pas même une chaudière séparée: renfermée dans le cylindre, elle reposait sur la plaque métallique qui le bouchait par le bas. C'était cette plaque que Papin échauffait directement pour transformer l'eau en vapeur; c'était de la même plaque qu'il éloignait le feu quand il voulait opérer la condensation. Un pareil procédé, à peine tolérable dans une expérience destinée à vérifier l'exactitude d'un principe, ne serait évidemment pas admissible s'il fallait faire marcher le piston avec quelque vitesse. Papin, tout en disant qu'on peut arriver au but « par « différentes constructions faciles à imaginer, » n'indique aucune de ces différentes constructions. Il laisse à ses successeurs, et le mérite de l'application de son idée féconde, et celui des inventions de détail qui, seules, peuvent assurer le succès d'une machine.

Dans nos premières recherches touchant l'emploi de la vapeur d'eau, nous avons eu à citer d'anciens philosophes de la Grèce et de Rome; un des mécaniciens les plus célèbres de l'École d'Alexandrie; un pape; un gentilhomme de la cour d'Henri IV; un hydraulicien né en Normandie, dans la province féconde en grands hommes, qui a doté la pléïade nationale, de Malherbe, de Corneille, du Poussin, de Fontenelle, de Laplace, de Fresnel; un membre de la Chambre des lords; un ingénieur anglais; enfin, un médecin français, de la Société royale de Londres, car, il faut bien l'avouer, Papin, presque toujours exilé, ne fut que correspondant de notre Académie. Maintenant, de simples artisans, de simples ouvriers vont entrer en lice. Toutes les classes de la société se trouveront ainsi avoir concouru à la création d'une machine dont le monde entier devait profiter.

En 1705, quinze années après la publication du premier mémoire de Papin dans les actes de Leipzic, Newcomen et Cawley, l'un quincaillier, l'autre vitrier à Dartmouth, en Devonshire, construisirent (veuillez bien remarquer que je ne dis pas projetèrent, car la différence est grande); construisirent une machine destinée à opérer des épuisements et dans laquelle il y avait une chaudière à part où naissait la vapeur. Cette machine, ainsi que le petit modèle de Papin, offre un cylindre métallique vertical, fermé par le bas, ouvert par le haut, et un piston, bien ajusté, destiné à le parcourir sur toute sa longueur en montant et en descendant. Dans l'un comme dans l'autre appareil, lorsque la vapeur d'eau peut arriver librement dans le bas du cylindre, le remplir et contre-balancer ainsi la pression de l'atmosphère extérieure, le mouvement ascensionnel du piston s'opère par l'effet d'un contre-poids. Dans la machine anglaise, enfin, à l'imitation de celle de Papin, dès que le piston est arrivé au terme de son excursion ascendante, on refroidit la vapeur qui avait contribué à l'y pousser; on fait ainsi le vide dans toute la capacité qu'il vient de parcourir, et l'atmosphère extérieure le force aussitôt à descendre.

Pour opérer le refroidissement convenable, Papin, on le sait déjà, se contentait d'ôter le brasier qui échauffait la base de son petit cylindre métallique. Newcomen et Cawley employèrent un procédé beaucoup préférable sous tous les rapports : ils firent couler une abondante quantité d'eau froide, dans l'espace annulaire compris entre les parois extérieures du cylindre de leur machine, et un second cylindre, un peu plus grand, qui lui servait d'enveloppe. Le froid se communiquait, peu à peu, à toute l'epaisseur du métal et atteignait enfin la vapeur d'eau elle-même (1).

La machine de Papin, perfectionnée ainsi quant à la manière de refroidir la vapeur ou de la condenser, excita au plus haut point l'attention des propriétaires des mines. Elle se répandit rapidement dans certains comtés de l'Angleterre et y rendit d'assez grands services. Le peu de rapidité de ses mouvements, conséquence nécessaire de la lenteur avec laquelle la vapeur se refroidissait et perdait son élasticité, était cependant un vif sujet de regrets. Le hasard indiqua, heureusement, un moyen très-simple de parer à cet inconvénient.

Au commencement du XVIII^{e} siècle, l'art d'aléser de grands cylindres métalliques et de les fermer hermétiquement à l'aide de pistons mobiles, était encore dans son enfance. Aussi, dans les premières machines de Newcomen, recouvrait-on le piston d'une couche d'eau destinée à remplir les vides compris entre le contour circulaire de cette pièce mobile et la surface du cylindre. A la très-grande surprise des constructeurs, une de leurs machines se mit un jour à osciller beaucoup plus vite que de coutume. Après maintes vérifications, il demeura constant que, ce jour-là, le piston était percé; que de l'eau froide tombait dans le cylindre par

(1) Savery avait déjà eu recours à un courant d'eau froide qu'il jetait sur *les parois extérieures* d'un vase métallique, pour condenser la vapeur que ce vase renfermait. Telle fut l'origine de son association avec Newcomen et Cawley; mais, il ne faut pas l'oublier, la patente de Savery, ses machines et l'ouvrage où il les décrit, sont postérieurs de plusieurs années aux mémoires de Papin.

petites gouttelettes, et qu'en traversant la vapeur elles l'anéantissaient rapidement. De cette observation fortuite date la suppression complète du refroidissement extérieur, et l'adoption de la pomme d'arrosoir destinée à porter *une pluie d'eau froide dans* toute la capacité du cylindre, au moment marqué pour la descente du piston. Les va-et-vient acquirent ainsi toute la vitesse désirable.

Voyons si le hasard n'a pas eu, de même, quelque part à une autre amélioration également importante.

La première machine de Newcomen exigeait l'attention la plus soutenue, de la part de la personne qui fermait ou ouvrait sans cesse certains robinets, soit pour introduire la vapeur aqueuse dans le cylindre, soit pour y jeter la pluie froide destinée à la condenser. Il arrive, dans un certain moment, que cette personne est le jeune Henri Potter. Les camarades de cet enfant, alors en récréation, font entendre des cris de joie qui le mettent au supplice. Il brûle d'aller les rejoindre, mais le travail qu'on lui a confié ne permettrait même pas une demi-minute d'absence. Sa tête s'exalte; la passion lui donne du génie; il découvre des relations dont jusque-là il ne s'était pas douté. Des deux robinets, l'un doit être ouvert au moment où le balancier que Newcomen introduisit le premier et si utilement dans ses machines, a terminé l'oscillation descendante, et il faut le fermer, tout juste, à la fin de l'oscillation opposée. La manœuvre du second est précisément le contraire. Les positions du balancier et celles des robinets sont dans une dépendance nécessaire. Potter s'empare de cette remarque; il reconnaît que le balancier peut servir à imprimer aux autres pièces, tous les mouvements que le jeu de la machine exige, et réalise à l'instant sa conception. Les extrémités de plusieurs cordons vont s'attacher aux manivelles des robinets ; les extrémités opposées, Potter les lie à des points convenablement choisis sur le balancier; les tractions que celui-ci engendre, sur certains cordons, en montant; les tractions qu'il produit sur les autres en descendant, remplacent les efforts de la main ; pour la première fois la machine à vapeur marche d'elle-même ; pour la première fois on ne voit auprès d'elle d'autre ouvrier que le chauffeur qui, de temps en temps, va raviver et entretenir le feu sous la chaudière.

Aux ficelles du jeune Potter, les constructeurs substituèrent bientôt des tringles rigides verticales, fixées au balancier et armées de plusieurs chevilles qui allaient presser, de haut en bas ou de bas en haut, les têtes des différents robinets ou soupapes. Les tringles, elles-mêmes, ont été remplacées par d'autres combinaisons; mais, quelque humiliant que soit un pareil aveu, toutes ces inventions sont de simples modifications du mécanisme que suggéra à un enfant, le besoin d'aller jouer avec ses petits camarades.

Il existe dans les cabinets de physique, un bon nombre de machines sur lesquelles l'industrie avait fondé de grandes espérances; la cherté de leur manœuvre ou de leur entretien les a réduites à de simples instruments de démonstration. Tel eût été aussi le sort final de la machine de Newcomen, du moins dans les localités peu riches en combustible, si les travaux de Watt dont il me reste à vous présenter l'analyse, n'étaient venus lui donner une perfection inespérée. Cette perfection, il ne faudrait pas la considérer comme le résultat de quelque observation fortuite, ou d'une seule inspiration ingénieuse : l'auteur y est arrivé par un travail assidu, par des expériences d'une finesse, d'une délicatesse extrêmes. On dirait que Watt avait pris pour guide cette célèbre maxime de Bacon : « Écrire, parler, méditer, agir quand on n'est pas « bien pourvu de *faits* qui jalonnent la pensée, c'est navi- « guer sans pilote le long d'une côte hérissée de dangers; « c'est s'élancer dans l'immensité de l'Océan, sans boussole « et sans gouvernail. »

Il y avait dans la collection de l'université de Glasgow, un petit modèle de la machine à vapeur de Newcomen, qui jamais n'avait pu fonctionner convenablement. Le professeur de physique Anderson chargea Watt de le réparer. Sous la main puissante de l'artiste, les vices de construction disparurent; dès lors, chaque année, l'appareil manœuvra dans les amphithéâtres, aux yeux des étudiants émerveillés. Un homme ordinaire se fût contenté de ce succès. Watt, au contraire, suivant sa coutume, y vit l'occasion des plus sérieuses études. Ses recherches portèrent successivement sur tous les points qui semblaient pouvoir éclairer la théorie de la machine. Il détermina la quantité dont l'eau se dilate quand elle passe de l'état liquide à celui de vapeur; la quantité d'eau qu'un poids donné de charbon peut vaporiser; la quantité de vapeur, en poids, que dépense, à chaque oscillation, une machine de Newcomen de dimensions connues; la quantité d'eau froide qu'il faut injecter dans le cylindre, pour donner à l'oscillation descendante du piston une certaine force; enfin, l'élasticité de la vapeur à différentes températures.

Il y avait là de quoi remplir la vie d'un physicien laborieux; Watt, cependant, trouva le moyen de mener à bon port de si nombreuses, de si difficiles recherches, sans que les travaux de l'atelier en souffrissent. Le docteur Cleland voulut bien, naguère, me conduire à la maison, voisine du port de Glasgow, où notre confrère se retirait en quittant les outils et devenait expérimentateur. Elle était rasée! Notre dépit fut vif, mais de courte durée. Dans l'enceinte, encore visible, des fondations, dix à douze ouvriers vigoureux semblaient occupés à sanctifier le berceau des machines à vapeur modernes: ils frappaient à coups redoublés les diverses pièces de bouilleurs, dont les dimensions réunies égalaient, certainement, celles de l'humble demeure qui venait de disparaître. Sur cette place et dans une pareille circonstance, le plus élégant hôtel, le plus somptueux monument, la plus belle statue eussent réveillé moins d'idées que les colossales chaudières!

Si les propriétés de la vapeur d'eau sont encore présentes à votre esprit, vous apercevrez d'un coup d'œil que le jeu économique de la machine de Newcomen semble exiger deux conditions inconciliables. Quand le piston descend, il faut que le cylindre soit froid : sans cela il y rencontre une vapeur, encore fort élastique, qui retarde beaucoup sa marche et diminue l'effet de l'atmosphère extérieure. Lorsque, ensuite, de la vapeur à 100° afflue dans ce même cylindre, si les parois sont froides, cette vapeur les réchauffe en se liquéfiant partiellement, et jusqu'au moment où leur température est aussi de 100°, son élasticité se trouve notablement atténuée; de là, lenteur dans les mouvements, car le contre-poids n'enlève pas le piston avant qu'il existe dans le cylindre un ressort capable de contre-balancer l'action de l'atmosphère; de là, aussi, augmentation de dépense, puisque la vapeur a un prix très-élevé, comme je l'ai déjà expliqué. On ne conservera aucun doute sur l'immense importance de cette considération économique, quand j'aurai dit que le modèle de Glasgow usait, à chaque oscillation, un volume de vapeur plusieurs fois plus grand que celui du cylindre. La dépense de vapeur, ou, ce qui revient au même, la dépense de combustible, ou, si on l'aime mieux encore, la dépense pécuniaire indispensable pour entretenir le mouvement de la machine, serait plusieurs fois moindre si l'on parvenait à faire disparaître les échauffements et les refroidissements successifs dont je viens de signaler les inconvénients.

Ce problème, en apparence insoluble, Watt l'a résolu par la méthode la plus simple. Il lui a suffi d'ajouter à l'ancien dispositif de la machine, un vase totalement distinct du cylindre et ne communiquant avec lui qu'à l'aide d'un tube étroit armé d'un robinet. Ce vase, qui porte aujourd'hui le nom de *condenseur,* est la principale des inventions de Watt. Malgré tout mon désir d'abréger, je ne puis pas me dispenser d'expliquer son mode d'action.

S'il existe une communication libre entre un cylindre rempli de vapeur et un vase vide de vapeur et d'air, la vapeur du cylindre passera en partie et très-rapidement dans le vase : l'écoulement ne cessera qu'au moment où l'élasticité sera la même partout. Supposons qu'à l'aide d'une injection d'eau, abondante et continuelle, le vase soit maintenu constamment froid dans toute sa capacité et dans ses parois; alors la vapeur s'y condensera dès qu'elle y arrivera : toute la vapeur dont le cylindre était primitivement rempli, viendra s'y anéantir successivement; ce cylindre se trouvera ainsi purgé de vapeur, sans que ses parois aient été le moins du monde refroidies; la vapeur nouvelle dont il pourra devenir nécessaire de le remplir, ni perdra rien de son ressort.

Le *condenseur* appelle entièrement à lui la vapeur du cylindre, d'une part, à cause qu'il contient de l'eau froide; de l'autre, parce que le reste de sa capacité ne renferme pas de fluides élastiques; mais, dès qu'une première condensation de vapeur s'y est opérée, ces deux conditions de réussite ont disparu : l'eau condensante s'est échauffée en absorbant le calorique latent de la vapeur; une quantité notable de vapeur s'est formée aux dépens de cette eau chaude; l'eau froide contenait d'ailleurs de l'air atmosphérique qui a dû se dégager pendant son échauffement. Si après chaque opération on n'enlevait pas cette eau chaude, cette vapeur, cet air que le condenseur renferme, il finirait par ne plus produire d'effet. Watt opère cette triple évacuation à l'aide d'une pompe ordinaire qu'on appelle la pompe à air, et dont le piston porte une tige convenablement attachée au balancier que la machine met en jeu. La force destinée à maintenir la pompe à air en mouvement, diminue d'autant la puissance de la machine; mais elle n'est qu'une petite partie de la perte qu'occasionnait, dans l'ancienne méthode, la condensation de la vapeur sur les parois refroidies du corps de pompe.

Un mot encore, et les avantages d'une autre invention de Watt deviendront évidents pour tout le monde.

Quand le piston descend dans la machine de Newcomen, c'est que l'atmosphère le pousse. Cette atmosphère est froide; elle doit donc refroidir les parois du cylindre métallique, ouvert par le haut, qu'elle va successivement couvrir sur toute leur étendue. Ce refroidissement n'est racheté, pendant la course ascensionnelle du piston, qu'au prix d'une certaine quantité de vapeur. Il n'existe aucune perte de ce genre dans les *machines modifiées* de Watt. L'action atmosphérique en est totalement éliminée, et voici comment :

Le cylindre est fermé dans le haut par un couvercle métallique, percé seulement à son centre d'une ouverture garnie d'étoupe grasse et bien serrée, à travers laquelle la tige cylindrique du piston se meut librement, sans pourtant donner passage à l'air ou à la vapeur. Le piston partage ainsi le cylindre en deux capacités distinctes et fermées. Quand il doit descendre, la vapeur de la chaudière arrive librement à la capacité supérieure par un tube convenablement disposé, et le pousse de haut en bas comme le faisait l'atmosphère dans la machine de Newcomen. Ce mouvement n'éprouve pas d'obstacle, attendu que, pendant qu'il s'opère, le bas du cylindre tout seul est en communication avec le condenseur où toute la vapeur inférieure va se liquéfier. Dès que le piston est entièrement descendu, il suffit de la simple rotation d'un robinet, pour que les deux parties du cylindre situées au-dessus et au-dessous du piston, communiquent entre elles; pour que ces deux parties se remplissent de vapeur au même degré d'élasticité; pour que le piston soit tout autant poussé de haut en bas que de bas en haut; pour qu'il remonte à l'extrémité du cylindre, comme dans la machine atmosphérique de Newcomen, par la seule action d'un léger contre-poids.

En poursuivant ses recherches sur les moyens d'économiser la vapeur, Watt réduisit encore presque à rien, la perte qui résultait du refroidissement par la paroi extérieure du cylindre où joue le piston. A cet effet, il enferma ce cylindre métallique dans un cylindre de bois d'un plus grand diamètre, et remplit de vapeur l'intervalle annulaire qui les séparait.

Voilà la machine à vapeur complétée. Les perfectionnements qu'elle vient de recevoir des mains de Watt sont évidents; leur immense utilité ne saurait soulever un doute. Vous vous attendez donc à la voir remplacer, sans retard, comme appareil d'épuisement, les machines comparativement ruineuses de Newcomen. Détrompez-vous : l'auteur d'une découverte a toujours à combattre ceux dont elle peut blesser les intérêts, les partisans obstinés de tout ce qui a vieilli, enfin les envieux. Les trois classes réunies, faut-il l'avouer? forment la grande majorité du public. Encore, dans mon calcul je défalque les doubles emplois pour éviter un résultat paradoxal. Cette masse compacte d'opposants, le temps peut seul la désunir et la dissiper; mais le temps ne suffit pas : il faut l'attaquer vivement, l'attaquer sans relâche; il faut varier ses moyens d'action, imitant, en cela, le chimiste à qui l'expérience enseigne que l'entière dissolution de certains alliages exige l'emploi successif de plusieurs acides. La force de caractère, la persistance de volonté qui déjouent à la longue les intrigues les mieux ourdies, peuvent ne pas se trouver réunies au génie créateur. Watt, au besoin, en serait une preuve convaincante. Son invention capitale, son heureuse idée sur la possibilité de condenser la vapeur d'eau dans un vase entièrement séparé du cylindre où l'action mécanique s'exerce, est de 1765. Deux années s'écoulent et à peine fait-il quelques démarches pour essayer de l'appliquer en grand. Ses amis, enfin, le mettent en rapport avec le docteur Roëbuck, fondateur de la vaste usine de Carron encore célèbre aujourd'hui. L'ingénieur et l'homme à projets s'associent; Watt lui cède les deux tiers de sa patente; une machine est exécutée d'après les nouveaux principes; elle confirme toutes les prévisions de la théorie; son succès est complet; mais, sur ces entrefaites, la fortune du docteur Roëbuck reçoit divers échecs. L'invention de Watt les eût réparés, sans aucun doute : il suffisait de chercher quelques bailleurs de fonds; notre confrère trouva plus simple de renoncer à sa découverte et de changer de carrière. En 1767, pendant que Smeaton exécutait entre les deux rivières Forth et Clyde, les triangulations et les nivellements, avant-coureurs des gigantesques travaux dont cette partie de l'Écosse devait devenir le théâtre, nous trouvons Watt faisant des opérations analogues, le long d'une ligne rivale traversant le passage du Lomond. Plus tard, il trace les plans d'un canal destiné à porter à Glasgow les produits des houillères de Monkland, et en dirige l'exécution. Plusieurs projets du même genre, celui, entre autres, du canal navigable à travers l'isthme de Crinan que M. Rennie a depuis achevé; des études approfondies relatives à certaines améliorations des ports d'Ayr, de Glasgow, de Greenock; la construction des ponts d'Hamilton et de Rutherglen; des explorations du terrain à travers lequel devait passer le célèbre canal Calédonien, occupèrent notre confrère jusqu'à la fin de 1773. Sans atténuer en rien le mérite de ces travaux, il me sera permis de ne pas étendre leur importance au delà de simples intérêts de localité; d'affirmer qu'il n'était nullement nécessaire, pour les concevoir, les diriger, les exécuter, de s'appeler James Watt.

Si oubliant les devoirs d'organe de l'Académie, je songeais à vous faire sourire plutôt qu'à dire d'utiles vérités, je trouverais ici matière à un frappant contraste. Je pourrais citer tel ou tel auteur qui dans nos séances hebdomadaires, demande, à cor et à cris, à communiquer la petite remarque, la petite réflexion, la petite note conçue et rédigée la veille; je vous le représenterais maudissant sa destinée, lorsque les prescriptions du règlement, lorsque l'ordre d'inscription de quelque auteur plus matinal, fait renvoyer sa lecture à huitaine, en lui laissant, toutefois, pour garantie, pendant cette cruelle semaine, le dépôt dans nos archives du *paquet cacheté*. De l'autre côté, nous verrions le créateur d'une machine destinée à faire époque dans les annales du monde, subir, sans murmurer, les stupides dédains des capitalistes et plier, pendant huit années, son génie supérieur à des levés de plans, à des nivellements minutieux, à de fastidieux calculs de déblais, de remblais, à des toisés de maçonnerie. Bornons-nous à remarquer tout ce que la philosophie de Watt supposait de sérénité de caractère, de modération de désirs, de véritable modestie. Tant d'indifférence, quelque nobles qu'en aient été les causes, avait son côté blâmable. Ce n'est pas sans motif que la société poursuit d'une réprobation sévère, ceux de ses membres qui dérobent à la circulation l'or entassé dans leurs coffres-forts; serait-on moins coupable en privant sa patrie, ses concitoyens, son siècle, des trésors mille fois plus précieux qu'enfante la pensée; en gardant pour soi seul des créations immortelles, source des plus nobles, des plus pures jouissances de l'esprit; en ne dotant pas les travailleurs de combinaisons mécaniques qui multiplieraient à l'infini les produits de l'industrie; qui affaibliraient, au profit de la civilisation, de l'humanité, l'effet de l'inégalité des conditions; qui permettraient un jour de parcourir les plus rudes ateliers, sans y trouver nulle part le déchirant spectacle de pères de famille, de malheureux enfants des deux sexes, assimilés à des brutes et marchant à pas précipités vers la tombe?

Dans les premiers mois de 1774, après avoir vaincu l'indifférence de Watt, on le mit en relation avec M. Boulton, de Soho, près de Birmingham, homme d'entreprise, d'activité, de talents variés (1). Les deux amis demandèrent

---

(1) Dans les notes dont il accompagna la dernière édition de l'essai du professeur Robison sur la machine à vapeur, Watt s'exprimait en ces termes au sujet de M. Boulton :

« L'amitié qu'il me portait n'a fini qu'avec sa vie. Celle que je lui avais
« vouée, m'impose le devoir de profiter de cette occasion, la dernière,
« probablement, qui s'offrira à moi, de dire combien je lui fus redevable.
« C'est à l'encouragement empressé de M. Boulton, à son goût pour les dé-
« couvertes scientifiques, et à la sagacité avec laquelle il savait les faire
« tourner aux progrès des arts; c'est, aussi, à la connaissance intime qu'il
« avait des affaires manufacturières et commerciales, que j'attribue, en
« grande partie, les succès dont mes efforts ont été couronnés. »

Une manufacture de M. Boulton existait déjà depuis quelques années à Soho, lorsque naquit l'association dont il est parlé dans le texte. Cet établissement, le premier sur une aussi grande échelle qui ait été formé en Angleterre, est encore cité aujourd'hui pour l'élégance de son architecture. Boulton y faisait toute sorte d'excellents ouvrages d'acier, de plaqué, d'argenterie, d'or moulu; voire même, des horloges astronomiques et des peintures sur verre. Pendant les vingt dernières années de sa vie, Boulton s'occupa d'améliorations dans la fabrication des monnaies. Par la combinaison de quelques procédés, nés en France, avec de nouvelles presses et une ingénieuse application de la machine à vapeur, il sut allier une excessive rapidité d'exécution à la perfection des produits. C'est Boulton qui opéra, pour le compte du gouvernement anglais, la refonte de toutes les espèces en cuivre du royaume-uni. L'économie et la netteté de ce grand travail rendirent la contre-façon presque impossible. Les exécutions nom-au parlement une prolongation de privilége, car la patente de Watt datait de 1769, et n'avait plus que quelques années à courir. Le bill donna lieu à la plus vive discussion. « Cette « affaire, écrivait le célèbre mécanicien à son vieux père, n'a « pu marcher qu'avec beaucoup de dépenses et d'anxiété. « Sans l'aide de quelques amis au cœur chaud, nous n'aurions « pas réussi, car plusieurs des plus puissants personnages de « la chambre des communes nous étaient opposés. » Il m'a semblé curieux de rechercher à quelle classe de la société appartenaient ces personnages parlementaires dont parle Watt, et qui refusaient à l'homme de génie une faible partie des richesses qu'il allait créer. Jugez de ma surprise lorsque j'ai trouvé à leur tête le célèbre Burke! Serait-il donc vrai qu'on peut s'être livré à de profondes études, être un homme de savoir et de probité, posséder à un degré éminent les qualités oratoires qui émeuvent, qui entraînent les assemblées politiques, et manquer quelquefois du plus simple bon sens? Au surplus, depuis les sages et importantes modifications que lord Brougham a fait introduire dans les lois relatives aux brevets, les inventeurs n'auront plus à subir la longue série de dégoûts dont Watt fut abreuvé.

Aussitôt que le parlement eut accordé une nouvelle durée

---

breuses dont les villes de Londres et de Birmingham étaient jusque-là annuellement affligées, cessèrent entièrement. Ce fut à cette occasion que le D[r] Darwin s'écria, dans son *Botanical Garden :* « Si à Rome on décer- « nait une couronne civique à celui qui sauvait la vie d'un seul de ses « concitoyens, M. Boulton n'a-t-il pas mérité d'être couvert chez nous de « guirlandes de chêne? »

M. Boulton mourut en 1809, à l'âge de 81 ans.

de vingt-cinq ans à la patente de Watt, cet ingénieur et Boulton réunis commencèrent à *Soho* les établissements qui ont été pour toute l'Angleterre l'école la plus utile de mécanique pratique. On y dirigea bientôt la construction de pompes d'épuisement de très-grandes dimensions, et des expériences répétées montrèrent qu'à égalité d'effet, elles économisaient les trois quarts du combustible que consumaient précédemment celles de Newcomen. Dès ce moment, les nouvelles pompes se répandirent dans tous les pays de mines, et surtout dans le Cornouailles. Boulton et Watt recevaient, pour redevance, la valeur du tiers de la quantité de charbon dont chacune de leurs machines procurait l'économie. On jugera de l'importance commerciale de l'invention, par un fait authentique : dans la seule mine de *Chace-Water*, où trois pompes étaient en action, les propriétaires trouvèrent de l'avantage à racheter les droits des inventeurs pour une somme annuelle de 60000 francs. Ainsi, dans un seul établissement, la substitution du *condenseur* à l'injection intérieure avait procuré, en combustible, une économie de plus de 180000 fr. par an.

Les hommes se résignent volontiers à payer le loyer d'une maison, le prix d'un fermage. Cette bonne volonté les abandonne quand il s'agit d'une idée, quelque avantage, quelque profit qu'elle ait procuré. Des idées! mais ne les conçoit-on pas sans fatigue et sans peine? Qui prouve d'ailleurs qu'avec le temps elles ne seraient pas venues à tout le monde? En ce genre, des jours, des mois, des années d'antériorité ne sauraient donner droit à un privilége!

Ces opinions, dont je n'ai sans doute pas besoin de faire ici la critique, la routine leur avait presque donné l'autorité de la chose jugée. Les hommes de génie, les *fabricants d'idées* semblaient devoir rester étrangers aux jouissances matérielles; il était naturel que leur histoire continuât à ressembler à une légende de martyrs!

Quoi qu'on vienne à penser de ces réflexions, il est certain que les mineurs du Cornouailles payaient d'année en année avec plus de répugnance, la rente qu'ils devaient aux ingénieurs de Soho. Ils profitèrent des premières difficultés soulevées par des plagiaires, pour se prétendre déliés de tout engagement. La discussion était grave; elle pouvait compromettre la position sociale de notre confrère; il lui donna donc toute son attention et devint légiste. Les incidents des longs et dispendieux procès que Boulton et Watt eurent à soutenir et qu'en définitive ils gagnèrent, ne mériteraient guère aujourd'hui d'être exhumés; mais puisque tout à l'heure j'ai cité Burke parmi les adversaires du grand mécanicien, il semble juste de rappeler que, par compensation, les Roy, les Mylne, les Herschel, les Deluc, les Ramsden, les Robison, les Murdock, les Rennie, les Cumming, les More, les Southern allèrent avec empressement soutenir devant les magistrats, les droits du génie persécuté. Peut-être, aussi, sera-t-il bon d'ajouter comme un trait curieux dans l'histoire de l'esprit humain, que les avocats; (j'aurai la prudence de faire remarquer qu'il ne s'agit ici que d'avocats d'un pays voisin); que les avocats à qui la malignité impute un luxe surabondant de paroles, reprochaient à Watt, contre lequel ils s'étaient ligués en grand nombre, de n'avoir inventé que des idées. Ceci, pour le dire en passant, leur attira, devant le tribunal, cette apostrophe de M. Rous : « Allez, Messieurs, « allez vous frotter à ces combinaisons intangibles, ainsi qu'il

« vous plaît d'appeler les machines de Watt; à ces préten-
« dues idées abstraites; elles vous écraseront comme des mou-
« cherons; elles vous lanceront dans les airs à perte de vue! »

Les persécutions que rencontre un homme de cœur, là où la plus stricte justice lui permettait d'espérer des témoignages unanimes de reconnaissance, manquent rarement de le décourager et d'aigrir son caractère. L'heureux naturel de Watt ne résista pas à de telles épreuves. Sept longues années de procès avaient excité en lui un sentiment de dépit qui se faisait jour, quelquefois, dans des termes acerbes. « Ce que je redoute le plus au monde, écrivait-il à un de
« ses amis, ce sont les plagiaires. Les plagiaires! Ils m'ont
« déjà cruellement assailli; et si je n'avais pas une excellente
« mémoire, leurs impudentes assertions auraient fini par me
« persuader que je n'ai apporté aucune amélioration à la
« machine à vapeur. Les mauvaises passions de ceux à qui
« j'ai été le plus utile, vont, le croiriez-vous? jusqu'à leur
« faire soutenir que ces améliorations, loin de mériter une
« pareille qualification, ont été très-préjudiciables à la ri-
« chesse publique. »

Watt, quoique vivement irrité, ne se découragea pas. Ses machines n'étaient d'abord, comme celles de Newcomen, que de simples pompes, que de simples moyens d'épuisement. En peu d'années il les transforma en moteurs universels et d'une puissance indéfinie. Son premier pas, dans cette voie, fut la création de la *machine à double effet*.

Pour en concevoir le principe, qu'on se rapporte à la *machine modifiée* dont nous avons déjà parlé (page xcix). Le cylindre est fermé; l'air extérieur n'y a aucun accès; c'est la pression de la vapeur, et non celle de l'atmosphère qui fait descendre le piston; c'est à un simple contre-poids qu'est dû le mouvement ascensionnel, car à l'époque où ce mouvement s'opère la vapeur pouvant circuler librement entre le haut et le bas du cylindre, presse également le piston dans les deux sens opposés. Chacun voit ainsi que la *machine modifiée*, comme celle de Newcomen, n'a de force réelle que pendant l'oscillation descendante du piston.

Un changement très-simple remédiera à ce grave défaut et nous donnera la *machine à double effet.*

Dans la machine connue sous ce nom, comme dans celle que nous avons appelée machine modifiée, la vapeur de la chaudière, quand le mécanicien le veut, va librement au-dessus du piston et le pousse sans rencontrer d'obstacle, puisqu'au même moment la capacité inférieure du cylindre est en communication avec le condenseur. Ce mouvement une fois achevé et un certain robinet ayant été ouvert, la vapeur provenant de la chaudière ne peut se rendre qu'au-dessous du piston et elle le soulève, la vapeur supérieure qui avait produit le mouvement descendant, allant alors se liquéfier dans le condenseur, avec lequel elle est, à son tour, en libre communication. Le mouvement contraire des robinets replace toutes les pièces dans l'état primitif, dès que le piston est au haut de sa course. De la sorte, les mêmes effets se reproduisent indéfiniment.

Le moteur, comme on le voit, est ici exclusivement la vapeur d'eau, et la machine, à cela près d'une inégalité dépendante du poids du piston, a la même puissance soit que ce piston monte, soit qu'il descende. Voilà pourquoi, dès son apparition, elle fut justement appelée *machine à double effet.*

Pour rendre son nouveau moteur d'une application commode et facile, Watt eut à vaincre d'autres difficultés : il fallut d'abord chercher les moyens d'établir une *communication rigide*, entre la tige inflexible du piston oscillant en ligne droite, et un balancier oscillant circulairement. La solution qu'il a donnée de cet important problème, est peut-être sa plus ingénieuse invention.

Parmi les parties constituantes de la machine à vapeur, vous avez sans doute remarqué certain parallélogramme articulé. A chaque double oscillation il se développe et se resserre, avec le moelleux, j'ai presque dit avec la grâce qui vous charme dans les gestes d'un acteur consommé. Suivez attentivement de l'œil le progrès de ses diverses transformations, et vous les trouverez assujetties aux conditions géométriques les plus curieuses; et vous verrez que *trois* des angles du parallélogramme décrivent dans l'espace des arcs de cercle, tandis que *le quatrième*, tandis que l'angle qui soulève et abaisse la tige du piston, se meut à très-peu près en ligne droite. L'immense utilité du résultat frappe encore moins les mécaniciens, que la simplicité des moyens à l'aide desquels Watt l'a obtenu (1).

---

(1) Voici en quels termes Watt rendait compte de l'essai de ce parallélogramme articulé :

« J'ai été moi-même surpris de la régularité de son action. Quand je « l'ai vu marcher pour la première fois, j'ai eu véritablement tout le « plaisir de la nouveauté, comme si j'avais examiné *l'invention d'une* « *autre personne*. »

Smeaton, grand admirateur de l'invention de Watt, ne croyait pas, cependant, que dans la pratique elle pût devenir un moyen usuel et économique d'imprimer *directement* des mouvements de rotation à des axes. Il soutenait que les machines à vapeur serviraient toujours avec plus d'avantage à pomper directement de l'eau. Ce liquide, parvenu à

De la force n'est pas le seul élément de réussite dans les travaux industriels. La régularité d'action n'importe pas moins; mais, quelle régularité attendre d'un moteur qui s'engendre par le feu, à coup de pelletées de charbon, et même de charbon de différentes qualités; sous la surveillance d'un ouvrier, quelquefois peu intelligent, presque toujours inattentif? La vapeur motrice sera d'autant plus abondante, elle affluera dans le cylindre avec d'autant plus de rapidité, elle fera marcher le piston d'autant plus vite que le feu aura plus d'intensité. De grandes inégalités de mouvement semblent donc inévitables. Le génie de Watt a dû pourvoir à ce défaut capital. Les soupapes par lesquelles la vapeur débouche de la chaudière pour entrer dans le cylindre, n'ont pas une ouverture constante. Quand la marche de la machine s'accélère, ces soupapes se ferment en partie; un volume déterminé de vapeur doit employer, dès lors, plus de temps à les traverser, et l'accélération s'arrête. Les ouvertures des soupapes se dilatent, au contraire, lorsque le mouvement se ralentit. Les pièces nécessaires à la réalisation de ces divers changements, lient les soupapes avec les axes que la machine met en jeu, par l'intermédiaire d'un appareil dont Watt trouva le principe dans le régulateur des vannes de quelques moulins à farine, qu'il appela le *gouverneur* (governor), et qu'on

---

des hauteurs convenables, devait ensuite être jeté dans les augets ou sur les palettes des roues hydrauliques ordinaires. A cet égard les prévisions de Smeaton ne se sont pas réalisées. J'ai vu cependant, en 1834, en visitant les établissements de M. Boulton, à Soho, une vieille machine à vapeur qui est encore employée à élever l'eau d'une large mare et à la verser dans les augets d'une grande roue hydraulique, lorsque la saison étant très-sèche l'eau motrice ordinaire ne suffit pas.

nomme aujourd'hui *régulateur à force centrifuge*. Son efficacité est telle qu'on voyait, il y a peu d'années, à Manchester, dans la filature de coton d'un mécanicien de grand talent, M. Lee, une pendule mise en action par la machine à vapeur de l'établissement, et qui marchait sans trop de désavantage à côté d'une pendule ordinaire à ressort.

Le régulateur de Watt et un emploi bien entendu des volants, voilà le secret, le secret véritable de l'étonnante perfection des produits industriels de notre époque; voilà ce qui donne aujourd'hui à la machine à vapeur une marche totalement exempte de saccades; voilà pourquoi elle peut, avec le même succès, broder des mousselines et forger des ancres; tisser les étoffes les plus délicates et communiquer un mouvement rapide aux pesantes meules d'un moulin à farine. Ceci explique encore comment Watt avait dit, sans craindre le reproche d'exagération, que pour éviter les allées et les venues des domestiques, il se ferait servir, il se ferait apporter les tisanes en cas de maladie, par des engins dépendant de sa machine à vapeur. Je n'ignore pas que suivant les gens du monde, cette suavité de mouvements s'obtient aux dépens de la force; mais c'est une erreur, une erreur grossière; le dicton : « Faire beaucoup de bruit et peu de besogne, » n'est pas seulement vrai dans le monde moral; c'est aussi un axiome de mécanique.

Encore quelques mots, et nous arrivons au terme de ces détails techniques.

Depuis peu d'années on a trouvé un grand avantage à ne pas laisser une libre communication entre la chaudière et le cylindre, pendant toute la durée de chaque oscillation de la machine. Cette communication est interrompue quand le piston, par exemple, arrive au tiers de sa course. Les deux tiers restants de la longueur du cylindre sont alors parcourus en vertu de la vitesse acquise, et surtout par l'effet de la *détente* de la vapeur. Watt avait déjà indiqué ce procédé (1). De très-bons juges placent la détente, quant à l'importance économique, sur la ligne du condenseur. Il paraît certain que depuis son adoption les machines du Cornouailles donnent des résultats inespérés; qu'avec un boisseau (*bushel*) de charbon, elles réalisent l'ouvrage de vingt hommes travaillant dix heures. Rappelons-nous que dans les districts houillers, un boisseau de charbon de terre coûte seulement *nine pence* (environ 18 sous de France), et il sera démontré que Watt a réduit, pour la plus grande partie de l'Angleterre, le prix d'une rude journée d'homme, d'une journée de dix heures de travail, à *moins d'un sou* de notre monnaie (2).

---

(1) Le principe de la détente de la vapeur, déjà nettement indiqué dans une lettre de Watt au Dr Small, portant la date de 1769, fut mis en pratique en 1776 à Soho, et en 1778 aux *Shadwell Water Works'* d'après des considérations économiques. L'invention, et les avantages qu'elle faisait espérer, sont pleinement décrits dans la patente de 1782.

(2) Dans un moment où tant de personnes s'occupent de machines à vapeur à rotation immédiate, je commettrais un oubli impardonnable si je ne disais pas que Watt y avait non-seulement songé, ainsi qu'on en trouve la preuve dans ses brevets, mais encore qu'il en exécuta. Ces machines, Watt les abandonna, non qu'elles ne marchassent point, mais parce qu'elles lui parurent, sous le rapport économique, notablement inférieures aux machines à double effet et à oscillations rectilignes.

Il est peu d'inventions, grandes ou petites, parmi celles dont les machines à vapeur actuelles offrent l'admirable réunion, qui ne soient le développement d'une des premières idées de Watt. Suivez ses travaux, Des évaluations numériques font trop bien apprécier l'importance des inventions de notre confrère, pour que je puisse résister au désir de présenter encore deux autres rapprochements. Je les emprunte à un des plus célèbres correspondants de l'Académie, à M. John Herschel.

L'ascension du Mont-Blanc, à partir de la vallée de Chamouni, est considérée, à juste titre, comme l'œuvre la plus pénible qu'un homme puisse exécuter en deux jours. Ainsi, le maximum de travail mécanique dont nous soyons capables

---

et outre les points capitaux énumérés minutieusement dans le texte, nous le verrons proposer des machines sans condensation, des machines où après avoir agi, la vapeur se perd dans l'atmosphère, pour les localités où l'on se procurerait difficilement d'abondantes quantités d'eau froide. La détente à opérer dans des machines à plusieurs cylindres, figurera aussi parmi les projets de l'ingénieur de Soho. Il suggérera l'idée des pistons parfaitement étanches, quoique composés exclusivement de pièces métalliques. C'est encore Watt qui recourra le premier à des manomètres à mercure pour apprécier l'élasticité de la vapeur dans la chaudière et dans le condenseur; qui imaginera une jauge simple et permanente à l'aide de laquelle on connaîtra toujours, et d'un coup d'œil, le niveau de l'eau dans la chaudière; qui, pour empêcher que ce niveau puisse varier d'une manière fâcheuse, liera les mouvements de la pompe alimentaire à ceux d'un flotteur; qui, au besoin, établira sur une ouverture du couvercle du principal cylindre de la machine, un petit appareil (*l'indicateur*) combiné de telle sorte qu'il fera exactement connaître la loi de l'évacuation de la vapeur, dans ses rapports avec la position du piston; etc., etc. Si le temps me le permettait, je montrerais Watt non moins habile et non moins heureux dans ses essais pour améliorer les chaudières, pour atténuer les pertes de chaleur, pour brûler complétement les torrents de fumée noire qui s'échappent des cheminées ordinaires quelque élevées qu'elles soient.

en deux fois vingt-quatre heures, est mesuré par le transport du poids de notre corps à la hauteur du Mont-Blanc. Ce travail, ou l'équivalent, une machine à vapeur l'exécute en brûlant deux livres de charbon de terre. Watt a donc établi que la force journalière d'un homme ne dépasse pas celle qui est renfermée dans une livre de houille.

Hérodote rapporte que la construction de la grande pyramide d'Égypte occupa cent mille hommes pendant vingt ans. La pyramide est de pierre calcaire ; son volume peut être facilement calculé ; de là on déduit que son poids est d'environ 13 millions de millions de *pounds* (livres). Pour élever ce poids à 125 pieds anglais, hauteur du centre de gravité de la pyramide, il faudrait brûler sous la chaudière d'une machine à vapeur, 630 chaldrons de charbon. Il est, chez nos voisins, telle fonderie qu'on pourrait citer, qui consume une plus grande quantité de combustible chaque semaine.

Des machines considérées dans leurs rapports avec le bien-être des classes ouvrières (1).

Beaucoup de personnes, sans mettre en question le génie

---

(1) En écrivant ce chapitre, il m'a semblé que je pouvais user sans scrupule de beaucoup de documents que j'ai recueillis, soit dans divers entretiens avec mon illustre ami lord Brougham, soit dans les ouvrages qu'il a publiés lui-même ou qui ont paru sous son patronage.

Si je m'en rapportais aux critiques que plusieurs personnes ont imprimées depuis la lecture de cet éloge, en essayant de combattre l'opinion que les machines sont nuisibles aux classes ouvrières, je me serais attaqué à un vieux préjugé sans consistance actuelle, à de Watt, regardent les inventions dont le monde lui est redevable et l'impulsion qu'elles ont donnée aux travaux industriels, comme un malheur social. A les en croire, l'adoption de chaque nouvelle machine ajoute inévitablement au malaise, à la misère des artisans. Ces merveilleuses combinaisons mécaniques, que nous sommes habitués à admirer dans la régularité et l'harmonie de leurs mouvements, dans la puissance et la délicatesse de leurs effets, ne seraient que des instruments de dommage; le législateur devrait les proscrire avec une juste et implacable rigueur.

Les opinions consciencieuses, alors surtout qu'elles se rattachent à de louables sentiments de philanthropie, ont droit à un examen attentif. J'ajoute que de ma part cet examen est un devoir impérieux. J'aurais négligé, en effet, le côté par lequel les travaux de notre illustre confrère sont le plus dignes de l'estime publique, si, loin de souscrire aux critiques de la préoccupation, je ne signalais de tels travaux à l'attention des hommes de bien, comme le moyen le plus puissant,

---

un véritable fantôme. Je ne demanderais pas mieux que de le croire et, alors, je supprimerais très-volontiers tous mes raisonnements, bons ou mauvais. Malheureusement, des lettres que de braves ouvriers m'adressent fréquemment, soit comme académicien, soit comme député; malheureusement, les dissertations *ex professo* et assez récentes de divers économistes, ne me laissent aucun doute sur la nécessité de dire encore aujourd'hui, de répéter sous toutes les formes, que les machines n'ont jamais été la cause réelle et permanente des souffrances d'une des classes les plus nombreuses et les plus intéressantes de la société; que leur destruction aggraverait l'état présent des choses ; que ce n'est nullement de ce côté qu'on trouverait le remède à des maux auxquels je compatis de toute mon âme.

le plus direct, le plus efficace de soustraire les ouvriers à de cruelles souffrances, et de les appeler au partage d'une foule de biens qui semblaient devoir rester l'apanage exclusif de la richesse.

Lorsqu'ils ont à opter entre deux propositions diamétralement opposées; lorsque l'une étant vraie, l'autre est nécessairement fausse, et que rien, de prime abord, ne semble pouvoir dicter un choix rationnel, les géomètres se saisissent de ces propositions contraires; ils les suivent minutieusement de ramifications en ramifications; ils en font surgir leurs dernières conséquences logiques; or, la proposition mal assise et celle-là seulement, manque rarement de conduire par cette filière, à quelques résultats qu'un esprit lucide ne saurait admettre. Essayons, un moment, de ce mode d'examen dont Euclide a fait un fréquent usage et qu'on désigne, si justement, par le nom de *méthode de réduction à l'absurde.*

Les adversaires des machines voudraient les anéantir, ou, du moins, en restreindre la propagation, pour conserver, disent-ils, plus de travail à la classe ouvrière. Plaçons-nous un moment à ce point de vue, et l'anathème s'étendra bien au delà des machines proprement dites.

Dès le début nous serons amenés, par exemple, à taxer nos ancêtres d'une profonde imprévoyance. Si au lieu de fonder, si au lieu de s'obstiner à étendre la ville de Paris sur les deux rives de la Seine, ils s'étaient établis au milieu du plateau de Villejuif, depuis des siècles les porteurs d'eau formeraient la corporation la plus occupée, la plus nécessaire, la plus nombreuse. Eh bien! messieurs les économistes, mettez-vous à l'œuvre en faveur des porteurs d'eau. Dévier la Seine de son cours n'est pas une chose impossible; proposez ce tra vail; ouvrez sans retard une souscription pour mettre Paris à sec, et la risée générale vous apprendra que la méthode de la réduction à l'absurde a du bon, même en économie politique; et, dans leur sens droit, les ouvriers vous diront eux-mêmes que la rivière a créé l'immense capitale où ils trouvent tant de ressources; que, sans elle, Paris serait peut-être encore un Villejuif.

Les bons Parisiens s'étaient félicités jusqu'ici du voisinage de ces inépuisables carrières où les générations vont arracher les matériaux qui servent à la construction de leurs temples, de leurs palais, de leurs habitations particulières. Pure illusion! La nouvelle économie politique vous prouvera qu'il eût été éminemment avantageux que le plâtre, que les pierres de taille, que les moellons ne se fussent trouvés qu'aux environs de Bourges, par exemple. Dans cette hypothèse, supputez en effet sur vos doigts le nombre d'ouvriers qu'il eût été nécessaire d'employer pour amener sur les chantiers de la capitale toutes les pierres que, depuis cinq siècles, les architectes y ont manipulées, et vous trouverez un résultat vraiment prodigieux; et, pour peu que les nouvelles idées vous sourient, vous pourrez vous extasier à votre aise sur le bonheur qu'un pareil état de choses aurait répandu parmi les prolétaires!

Hasardons quelques doutes, quoique je sache très-bien que les Vertot de notre époque ressemblent parfaitement à l'historien de Rhodes, *quand leur siége est fait.*

La capitale d'un puissant royaume peu éloigné de la France est traversée par un fleuve majestueux que les vaisseaux de guerre eux-mêmes remontent à pleines voiles. Des canaux sillonnent, dans toutes sortes de directions, les contrées environnantes et transportent à peu de frais les plus lourds fardeaux. Un véritable réseau de routes admirablement entretenues conduit aux parties les plus reculées du territoire. A ces dons de la nature et de l'art, la capitale, que tout le monde a déjà nommée, joint *un avantage* dont la ville de Paris est privée : les carrières de pierre à bâtir ne sont pas à sa porte, elles n'existent qu'au loin. Voilà donc l'utopie des nouveaux économistes réalisée. Ils vont compter, n'est-ce pas? par centaines de mille, peut-être par millions, les carriers, les bateliers, les charretiers, les appareilleurs employés sans cesse à extraire, à transporter, à préparer les moellons, les pierres de taille nécessaires à la construction de l'immense quantité d'édifices dont cette capitale s'enrichit chaque année. Laissons-les compter à leur aise. Il arrive dans cette ville ce qui serait arrivé à Paris privé de ses riches carrières : la pierre étant très-chère, on n'en fait pas usage; la brique la remplace presque partout.

Des millions d'ouvriers exécutent aujourd'hui à la surface et dans les entrailles de la terre, d'immenses travaux auxquels il faudrait totalement renoncer si certaines machines étaient abandonnées. Il suffira de deux ou trois exemples pour rendre cette vérité palpable.

L'enlèvement journalier des eaux qui surgissent dans les galeries des seules mines de Cornouailles, exige une force de cinquante mille chevaux ou de trois cent mille hommes. Je vous le demande, le salaire de trois cent mille ouvriers n'absorberait-il pas tous les bénéfices de l'exploitation?

La question des salaires et des bénéfices paraît-elle trop délicate? D'autres considérations nous conduiront à la même conséquence.

Le service d'une seule mine de cuivre de Cornouailles, comprise dans les *Consolidated-Mines,* exige une machine à vapeur de la force de plus de trois cents chevaux constamment attelés, et réalise, chaque vingt-quatre heures, le travail d'un millier de chevaux. Puis-je craindre d'être démenti en affirmant qu'il n'existe aucun moyen de faire agir plus de trois cents chevaux, ou deux à trois mille hommes, simultanément et d'une manière utile, sur l'ouverture bornée d'un puits de mine? Proscrire la machine des *Consolidated-Mines,* ce serait donc réduire à l'inaction le grand nombre d'ouvriers dont elle rend le travail possible; ce serait déclarer que le cuivre et l'étain du Cornouailles y resteront éternellement ensevelis sous une masse de terre, de roches et de liquide de plusieurs centaines de mètres d'épaisseur. La thèse, ramenée à cette dernière forme, aura certainement peu de défenseurs; mais qu'importe la forme lorsque le fond est évidemment le même?

Si, des travaux qui exigent un immense développement de forces, nous passions à l'examen de divers produits industriels que la délicatesse de leurs éléments, que la régularité de leurs formes ont fait ranger parmi les merveilles de l'art, l'insuffisance, l'infériorité de nos organes, comparés aux combinaisons ingénieuses de la mécanique, frapperaient également tous les esprits. Quelle est, par exemple, l'habile fileuse qui pourrait tirer d'une seule livre de coton brut, un fil de cinquante-trois lieues de long, comme le fait la machine nommée *Mule-Jenny?*

Je n'ignore pas tout ce que certains moralistes ont débité touchant l'inutilité des mousselines, des dentelles, des tulles que ces fils déliés servent à fabriquer; mais qu'il me suffise de remarquer que les *Mule-Jenny* les plus parfaites marchent sous la surveillance continuelle d'un grand nombre d'ouvriers; que toute la question, pour eux, est de fabriquer des produits qui se vendent; qu'enfin, si le luxe est un mal, un vice, un crime même, on doit s'en prendre aux acheteurs et non à ces pauvres prolétaires dont l'existence serait, je crois, fort aventurée, s'ils usaient leurs forces à fabriquer à l'usage des dames, au lieu du tulle mondain, des étoffes de bure.

Quittons maintenant toutes ces remarques de détail et pénétrons dans le fond même de la question.

« Il ne faut pas, disait Marc-Aurèle, recevoir les opinions de nos pères, comme le feraient des enfants, par la seule raison que nos pères les ont eues. » Cette maxime, assurément très-juste, ne doit pas nous empêcher de penser, de présumer du moins, que les opinions contre lesquelles aucune critique ne s'est jamais élevée depuis l'origine des sociétés, ne soient conformes à la raison et à l'intérêt général. Eh bien! sur la question tant débattue de l'utilité des machines, quelle était l'opinion unanime de l'antiquité? Son ingénieuse mythologie va nous l'apprendre : les fondateurs des empires, les grands législateurs, les vainqueurs des tyrans qui opprimaient leur patrie, recevaient seulement le titre de *demi-dieux;* c'était parmi les dieux mêmes qu'était placé l'inventeur de la bêche, de la faucille, de la charrue.

J'entends déjà nos adversaires se récrier sur l'extrême simplicité des instruments que je cite, leur refuser hardiment le nom de machines, ne vouloir les qualifier que d'*outils*, et se retrancher obstinément derrière cette distinction.

Je pourrais répondre qu'une semblable distinction est puérile; qu'il serait impossible de dire avec précision où l'outil finit, où la machine commence; mais il vaut mieux remarquer que, dans les plaidoyers contre les machines, il n'a jamais été parlé de leur plus ou moins grande complication. Si on les repousse, c'est parce qu'avec leur secours un ouvrier fait le travail de plusieurs ouvriers; or, oserait-on soutenir qu'un couteau, qu'une vrille, qu'une lime, qu'une scie, ne donnent pas une merveilleuse facilité d'action à la main qui les emploie; que cette main, ainsi fortifiée, ne puisse faire le travail d'un grand nombre de mains armées seulement de leurs ongles?

Ils ne s'arrêtèrent pas devant la sophistique distinction d'outils et de machines, les ouvriers qui, séduits par les détestables théories de quelques-uns de leurs prétendus amis, parcouraient en 1830 certains comtés de l'Angleterre, en vociférant le cri de *mort aux machines!* Logiciens rigoureux, ils brisaient dans les fermes la faucille destinée à moissonner, le fléau qui sert à battre le blé, le crible à l'aide duquel on vanne le grain. La faucille, le fléau et le crible ne sont-ils pas, en effet, des moyens de travail abrégés? La bêche, la pioche, la charrue, le semoir ne pouvaient trouver grâce devant cette horde aveuglée, et si quelque chose m'étonne, c'est que, dans sa fureur, elle ait épargné les chevaux, espèces de machines d'un entretien comparativement économique et dont chacune peut exécuter, par jour, le travail de six ou sept ouvriers.

L'économie politique a heureusement pris place parmi les sciences d'observation. L'expérience de la substitution des machines aux êtres animés s'est trop souvent renouvelée depuis quelques années, pour qu'on ne puisse pas, dès à présent, en saisir les résultats généraux au milieu de quelques irrégularités accidentelles. Ces résultats, les voici :

En épargnant la main-d'œuvre, les machines permettent de fabriquer à meilleur marché ; l'effet de ce meilleur marché est une augmentation de demande : une si grande augmentation, tant notre désir de bien-être a de vivacité, que, malgré le plus inconcevable abaissement dans les prix, la valeur vénale de la totalité de la marchandise produite surpasse chaque année ce qu'elle était avant le perfectionnement; le nombre des ouvriers qu'emploie chaque industrie, *s'augmente* avec l'introduction des moyens de fabrication expéditifs.

Ce dernier résultat est précisément l'opposé de celui que les adversaires des machines invoquent. De prime abord, il pourrait sembler paradoxal; cependant, nous allons le voir ressortir d'un examen rapide des faits industriels les mieux constatés.

Lorsque, il y a trois siècles et demi, la machine à imprimer fut inventée, des copistes pourvoyaient de livres le très-petit nombre d'hommes riches qui se permettaient cette dispendieuse fantaisie. Un seul de ces copistes, à l'aide du nouveau procédé, pouvant faire l'ouvrage de deux cents, on ne manqua pas, dès cette époque, de qualifier d'*infernale* une invention qui, dans une certaine classe de la société, devait réduire à l'inaction neuf cent quatre-vingt-quinze personnes sur mille. Plaçons le résultat réel à côté de la sinistre prédiction.

Les livres manuscrits étaient très-peu demandés ; les livres imprimés, au contraire, à cause de leur bas prix, furent recherchés avec le plus vif empressement. On se vit obligé de reproduire sans cesse les écrivains de la Grèce et de Rome. De nouvelles idées, de nouvelles opinions firent surgir une multitude d'ouvrages, les uns d'un intérêt éternel, les autres inspirés par des circonstances passagères. On a calculé, enfin, qu'à Londres, avant l'invention de l'imprimerie, le commerce des livres n'occupait que deux cents personnes; aujourd'hui, c'est par des vingtaines de milliers qu'on les compte.

Et que serait-ce encore si laissant de côté le point de vue restreint et pour ainsi dire matériel qu'il m'a fallu choisir, nous étudiions l'imprimerie par ses faces morales et intellectuelles; si nous examinions l'influence qu'elle a exercée sur les mœurs publiques, sur la diffusion des lumières, sur les progrès de la raison humaine; si nous opérions le dénombrement de tant de livres dont on lui est redevable, que les copistes auraient certainement dédaignés, et dans lesquels le génie va journellement puiser les éléments de ses conceptions fécondes! Mais je me rappelle qu'il ne doit être question dans ce moment, que du nombre d'ouvriers employés par chaque industrie.

Celle du coton offre des résultats plus démonstratifs encore que l'imprimerie. Lorsqu'un ingénieux barbier de Preston, Arkwright, lequel, par parenthèse, a laissé à ses enfants deux à trois millions de francs de revenu, rendit la substitution des cylindres tournants aux doigts des fileuses, utile et profitable, le produit annuel de la manufacture de coton en Angleterre ne s'élevait qu'à cinquante millions de francs; maintenant ce produit dépasse neuf cents millions. Dans le seul comté de Lancastre, on livre, tous les ans, aux manufactures de calicot, une quantité de fil que vingt-un millions de fileuses habiles ne pourraient pas fabriquer avec le seul secours de la quenouille et du fuseau. Aussi, quoique dans l'art du filateur les moyens mécaniques aient été poussés à leur terme, un million et demi d'ouvriers trouvent aujourd'hui de l'emploi, là où, avant les inventions d'Arkwright et de Watt, on en comptait seulement cinquante mille (1).

Certain philosophe s'écria, dans un profond accès de découragement : Il ne se publie aujourd'hui rien de neuf, à moins qu'on n'appelle ainsi ce qui a été oublié. S'il entendait seulement parler d'erreurs et de préjugés, le philosophe disait vrai. Les siècles ont été tellement féconds en ce genre, qu'ils ne peuvent plus guère laisser à personne les avantages de la priorité. Par exemple, les prétendus philanthropes modernes n'ont pas même le mérite (si toutefois mérite il y a) d'avoir inventé les systèmes que j'examine. Voyez plutôt ce pauvre William Lea faisant manœuvrer le premier métier à bas devant le roi Jacques I^{er}! Le mécanisme parut admirable; pourquoi le repoussa-t-on? Ce fut sous le prétexte que la classe ouvrière allait en souffrir. La France se montra tout aussi peu prévoyante : William Lea n'y trouva aucun encouragement, et il alla mourir à l'hôpital, comme tant d'autres hommes de génie qui ont eu le malheur de marcher trop en avant de leur siècle!

Au surplus, on se tromperait beaucoup en imaginant que la corporation des tricoteurs, dont William Lea devint ainsi la victime, fût bien nombreuse. En 1583, les personnes de haut rang et de grande fortune portaient seules des bas. La

---

(1) M. Edward Baines, auteur d'une histoire très-estimée des manufactures de coton britanniques, a eu la bizarre curiosité de chercher quelle longueur de fil est annuellement employée dans la fabrication des étoffes de coton. Cette longueur totale, il la trouve égale à *cinquante-une fois la distance du soleil à la terre!* (cinquante-une fois trente-neuf millions de lieues de poste, ou environ deux mille millions de ces mêmes lieues).

classe moyenne remplaçait cette partie de nos vêtements par des bandelettes étroites de diverses étoffes. Le restant de la population (neuf cent quatre-vingt-dix-neuf sur mille) marchait jambes nues. Sur mille individus, il n'en est pas plus d'un aujourd'hui à qui l'excessif bon marché ne permette d'acheter des bas. Aussi, un nombre immense d'ouvriers est-il dans tous les pays du monde occupé de ce genre de fabrication.

Si on le juge nécessaire, j'ajouterai qu'à Stock-port, la substitution de la vapeur à la force des bras, dans la manœuvre des métiers à tisser, n'a pas empêché le nombre des ouvriers de s'y accroître d'un tiers en très-peu d'années.

Il faut ôter, enfin, à nos adversaires leur dernière ressource; il faut qu'ils ne puissent pas dire que nous avons seulement cité d'anciennes industries. Je ferai donc remarquer combien ils se sont trompés, naguère, dans leurs lugubres prévisions touchant l'influence de la gravure sur acier. Une planche de cuivre, disaient-ils, ne peut pas donner plus de deux mille épreuves. Une planche en acier qui en fournit cent mille sans s'user, remplacera cinquante planches de cuivre. Ces chiffres n'établissent-ils pas que le plus grand nombre des graveurs (que quarante-neuf sur cinquante) se verront forcés de déserter les ateliers, de changer leur burin contre la truelle et la pioche, ou d'implorer dans la rue la pitié publique?

Pour la vingtième fois, prophètes de malheur, veuillez ne pas oublier dans vos élucubrations, le principal élément du problème que vous prétendez résoudre! Songez au désir insatiable de bien-être que la nature a déposé dans le cœur de l'homme; songez qu'un besoin satisfait appelle sur-le-champ un autre besoin; que nos appétits de toute espèce s'augmentent avec le bon marché des objets qui peuvent les alimenter, et de manière à défier les facultés créatrices des machines les plus puissantes.

Ainsi, pour revenir aux gravures, l'immense majorité du public s'en passait quand elles étaient chères ; leur prix diminue et tout le monde les recherche. Elles sont devenues l'ornement nécessaire des meilleurs livres ; elles donnent aux livres médiocres quelques chances de débit. Il n'est pas jusqu'aux almanachs où les antiques et hideuses figures de Nostradamus, de Mathieu Laensberg, ne soient aujourd'hui remplacées par des vues pittoresques qui transportent, en quelques secondes, nos immobiles citadins, des rives du Gange à celles de l'Amazone, de l'Himalaya aux Cordillères, de Pékin à New-York. Voyez aussi ces graveurs dont on nous annonçait si piteusement la ruine : jamais ils ne furent ni plus nombreux, ni plus occupés.

Je viens de rapporter des faits irrécusables. Ils ne permettront pas, je crois, de soutenir que sur cette terre, que parmi ses habitants, tels du moins que la nature les a créés, l'emploi des machines doive avoir pour conséquence la diminution du nombre d'ouvriers employés dans chaque genre d'industrie. D'autres habitudes, d'autres mœurs, d'autres passions auraient peut-être conduit à un résultat tout différent ; mais ce texte, je l'abandonne à ceux qui seraient tentés de composer des traités d'économie industrielle à l'usage des habitants de la lune, de Jupiter ou de Saturne.

Placé sur un théâtre beaucoup plus restreint, je me demande si après avoir sapé par sa base le système des adversaires des machines, il peut être encore nécessaire de jeter un coup d'œil sur quelques critiques de détail. Faut-il remarquer, par exemple, que la taxe des pauvres, cette plaie toujours saignante de la nation britannique, cette plaie que l'on s'efforce de faire dériver de l'abus des machines, date du règne d'Élisabeth; d'une époque antérieure de deux siècles aux travaux des Arkwright et des Watt.

Vous avouerez du moins, nous dit-on, que les machines à feu, que les Mule-Jenny, que les métiers dont on fait usage pour carder, pour imprimer, etc., objets de vos prédilections, n'ont pas empêché le paupérisme de grandir et de se propager? Ce nouvel aveu me coûtera peu. Quelqu'un présenta-t-il les machines comme une panacée universelle? Prétendit-on jamais qu'elles auraient le privilége inouï d'écarter l'erreur et la passion des assemblées politiques; qu'elles dirigeraient les conseillers des princes dans les voies de la modération, de la sagesse, de l'humanité; qu'elles détourneraient Pitt de s'immiscer sans relâche dans les affaires des pays voisins; de susciter chaque année, et sur tous les points de l'Europe, des ennemis à la France; de leur payer de riches subsides, de grever enfin l'Angleterre d'une dette de plusieurs milliards? Voilà, voilà pourquoi la taxe des pauvres s'est si vite et si prodigieusement accrue. Les machines n'ont pas produit, n'ont pas pu produire ce mal. J'ose même affirmer qu'elles l'ont beaucoup atténué, et je le prouve en deux mots : Le comté de Lancastre est le plus manufacturier de toute l'Angleterre. C'est là que se trouvent les villes de Manchester, de Preston, de Bolton, de Warrington, de Liverpool; c'est dans ce comté que les machines ont été le plus brusquement, le plus généralement introduites. Eh bien! répartissons la totalité de la valeur annuelle de la taxe des pauvres du Lancashire, sur l'ensemble de la population;

cherchons, en d'autres termes, la quote-part de chaque individu, et nous trouverons un résultat près de trois fois plus petit que dans la moyenne de tous les autres comtés! Vous le voyez, les chiffres traitent sans pitié les faiseurs de systèmes.

Au reste, que ces grands mots de taxe des pauvres ne nous fassent pas croire, sur la foi de quelques déclamateurs, que chez nos voisins les classes laborieuses sont entièrement dépourvues de ressources et de prévoyance. Un travail de fraîche date a montré que dans l'Angleterre seule (l'Irlande et l'Écosse étant ainsi laissées de côté), le capital appartenant à de simples ouvriers, qui se trouve en dépôt dans les caisses d'épargne, approche de 400 millions de francs. Les recensements opérés dans les principales villes ne sont pas moins instructifs.

Un seul principe est resté incontesté au milieu des débats animés que l'économie politique a fait naître : c'est que la population s'accroît avec l'aisance générale, et qu'elle diminue rapidement dans les temps de misère (1). Plaçons des faits à côté du principe. Tandis que la population moyenne de l'Angleterre s'augmentait, pendant les trente dernières années, de 50 pour 100, Nottingham et Birmingham, deux des villes les plus industrielles, présentaient des accroissements de 25 et de 40 pour 100 plus considérables encore. Manchester et Glasgow, enfin, qui occupent le premier rang dans tout l'empire britannique, par le nombre, la grandeur et l'importance des

(1) L'Irlande est une exception à cette règle, dont la cause est bien connue, et sur laquelle j'aurai occasion de revenir.

machines qu'elles emploient, voyaient, dans le même intervalle des trente dernières années, leur population s'augmenter de 150 et de 160 pour 100. C'était trois ou quatre fois plus que dans les comtés agricoles et les villes non manufacturières.

De pareils chiffres parlent assez d'eux-mêmes. Il n'est pas de sophisme, de fausse philanthropie, de mouvements d'éloquence qui puissent leur résister.

Les machines ont soulevé un genre particulier d'objections que je ne dois point passer sous silence. Au moment de leur introduction, au moment où elles commencent à remplacer le travail manuel, certaines classes d'ouvriers souffrent de ce changement. Leur honorable, leur laborieuse industrie se trouve anéantie presque tout à coup. Ceux-là même qui, dans l'ancienne méthode, étaient les plus habiles, manquant quelquefois des qualités que le nouveau procédé exige, restent sans ouvrage. Il est rare qu'ils parviennent tout de suite à se rattacher à d'autres genres de travaux.

Ces réflexions sont justes et vraies. J'ajouterai que les tristes conséquences qu'elles signalent, doivent se reproduire fréquemment; qu'il suffit de quelques caprices de la mode pour engendrer de profondes misères. Si je ne conclus pas de là que le monde doive rester stationnaire, à Dieu ne plaise qu'en voulant le progrès dans l'intérêt général de la société, je prétende qu'elle puisse rester sourde aux souffrances individuelles dont ce progrès est momentanément la cause! L'autorité, toujours aux aguets des nouvelles inventions, manque rarement de les atteindre par des mesures fiscales; serait-ce trop exiger d'elle, si l'on demandait que les premières contributions levées sur le génie, servissent à ouvrir des ateliers spéciaux où les ouvriers brusquement dépossédés trouveraient, pendant quelque temps, un emploi en harmonie avec leurs forces et leur intelligence! Cette marche a quelquefois été suivie avec succès; il resterait donc à la généraliser. L'humanité en fait un devoir; une saine politique la conseille; au besoin, des événements terribles dont l'histoire a conservé le souvenir, la recommanderaient aussi par son côté économique.

Aux objections des théoriciens qui craignaient de voir les progrès de la mécanique réduire les classes ouvrières à une inaction complète, ont succédé des difficultés tout opposées, sur lesquelles il semble indispensable de s'arrêter quelques instants.

En supprimant dans les manufactures toutes les manœuvres de force, les machines permettent d'y appeler en grand nombre les enfants des deux sexes. Des industriels, des parents cupides abusent souvent de cette faculté. Le temps consacré au travail dépasse toute mesure raisonnable. Pour l'appât journalier de huit à dix centimes, on voue à un abrutissement éternel des intelligences que quelques heures d'étude eussent fécondées; on condamne à un douloureux rachitisme des organes qui auraient besoin, pour se développer, du grand air et de l'action bienfaisante des rayons solaires.

Demander au législateur de mettre un terme à cette hideuse exploitation du pauvre par le riche; solliciter des mesures pour combattre la démoralisation qui est la conséquence ordinaire des nombreuses réunions des jeunes ouvriers; essayer d'introduire, de disséminer certaines machines dans les chaumières, afin que suivant les saisons les travaux agricoles puissent s'y marier à ceux de l'industrie, c'est faire acte de patriotisme, d'humanité; c'est bien connaître les besoins actuels des classes ouvrières. Mais s'obstiner à exécuter de main d'homme, laborieusement, chèrement, des travaux que les machines réalisent en un clin d'œil et à bon marché; mais assimiler les prolétaires à des brutes; leur demander des efforts journaliers qui ruinent leur santé et que la science peut tirer, au centuple, de l'action du vent, de l'eau, de la vapeur, ce serait marcher en sens contraire du but qu'on veut atteindre; ce serait vouer les pauvres à la nudité; réserver exclusivement aux riches une foule de jouissances qui sont maintenant le partage de tout le monde; ce serait, enfin, revenir de gaîté de cœur, aux siècles d'ignorance, de barbarie et de misère.

Il est temps de quitter ce sujet, quoique je sois loin de l'avoir épuisé. Je n'aurai certainement pas triomphé d'une foule de préventions invétérées, systématiques. Du moins, je puis espérer que mon plaidoyer obtiendra l'assentiment de ces mille et mille oisifs de la capitale, dont la vie se passe à coordonner le goût des plaisirs avec les exigences de leur mauvaise santé. Dans quelques années, grâce aux découvertes de Watt, tous ces sybarites, incessamment poussés par la vapeur sur des chemins de fer, pourront visiter rapidement les différentes régions du royaume. Ils iront, dans le même jour, voir appareiller notre escadre à Toulon; déjeuner à Marseille avec les succulents rougets de la Méditerranée; plonger à midi leurs membres énervés dans l'eau minérale de Bagnères, et ils reviendront le soir, par Bordeaux, au bal de l'opéra! Se récrie-t-on? je dirai que mon itinéraire suppose seulement une marche de vingt-six lieues à l'heure; que divers essais de voitures à vapeur ont déjà réalisé des vitesses de quinze lieues; que M. Stephenson, enfin, le célèbre ingénieur de Newcastle, offre de construire des machines deux fois et demie plus rapides : des machines qui franchiront quarante lieues à l'heure!

Presse à copier les lettres. Chauffage à la vapeur. Composition de l'eau. Blanchissage à l'aide du chlore. Essais sur les effets physiologiques qui peuvent résulter de la respiration de divers gaz.

Birmingham, lorsque Watt alla s'établir à Soho, comptait parmi les habitants du voisinage, Priestley, dont le nom dit tout; Darwin, l'auteur de la Zoonomie et d'un poëme célèbre sur les amours des plantes; Withering, médecin et botaniste distingué; Keir, chimiste bien connu par les notes de sa traduction de Macquer et par un mémoire intéressant sur la cristallisation du verre; Galton, à qui l'on devait un traité élémentaire d'ornithologie; Edgeworth, auteur de divers ouvrages justement appréciés, et père de la si célèbre Miss Maria. Ces savants devinrent bientôt les amis du célèbre mécanicien, et formèrent, pour la plupart, avec lui et Boulton une association, sous le nom de *Lunar Society* (Société lunaire). Un titre si bizarre a donné lieu à d'étranges méprises. Il signifiait seulement qu'on se réunissait le soir même de la pleine lune, époque du mois choisie de préférence, afin que les académiciens y vissent clair en rentrant chez eux.

Chaque séance de la Société lunaire était pour Watt une nouvelle occasion de faire remarquer l'incomparable fécondité d'invention dont la nature l'avait doué. « J'ai imaginé, dit un jour Darwin à ses confrères, certaine plume double, certaine plume à deux becs, à l'aide de laquelle on écrira chaque chose deux fois; qui donnera ainsi d'un seul coup, l'original et la copie d'une lettre. — J'espère trouver une meilleure solution du problème, repartit Watt presque aussitôt : je mûrirai mes idées ce soir et je vous les communiquerai demain. » Le lendemain la presse à copier était inventée et même un petit modèle permettait déjà de juger de ses effets. Cet instrument si utile et si généralement adopté dans tous les comptoirs anglais, a reçu récemment quelques modifications dont plusieurs artistes ont voulu se faire honneur; mais je puis assurer que la forme actuelle était déjà décrite et dessinée, à la date de 1780, dans le brevet de notre confrère.

Le chauffage à la vapeur est de trois ans postérieur. Watt l'établit chez lui à la fin de 1783. Il faut le reconnaître, cette ingénieuse méthode se trouve déjà indiquée par le colonel Cooke, dans les Transactions philosophiques de l'année 1745(1); mais l'idée était passée inaperçue. Watt, en tout cas, n'aura pas seulement le mérite de l'avoir fait revivre : c'est

(1) Je lis dans un ouvrage de M. Robert Stuart, que sir Hugh Platte avait entrevu avant le colonel Cooke la possibilité d'appliquer la vapeur au chauffage des appartements. Dans le *Garden of eden* de cet auteur, publié en 1660, il est question, en effet, de quelque chose d'analogue pour conserver pendant l'hiver les plantes des serres. Sir Hugh Platte propose de placer des couvercles d'étain, ou de tout autre métal, sur les vases où les viandes cuisent et d'adapter ensuite à des ouvertures de ces couvercles, des tuyaux par lesquels la vapeur échauffante peut être conduite partout où on le désire.

lui qui l'appliqua le premier; ce furent ses calculs sur l'étendue des surfaces nécessaires à l'échauffement des salles de différentes grandeurs, qui, à l'origine, servirent de guide à la plupart des ingénieurs anglais.

Watt n'aurait produit, pendant sa longue carrière, que la machine à condenseur séparé, la machine à détente et le parallélogramme articulé, qu'il occuperait encore une des premières places parmi le petit nombre d'hommes dont la vie fait époque dans les annales du monde; mais son nom me semble se rattacher aussi avec éclat à la plus grande, à la plus féconde découverte de la chimie moderne : à la *découverte de la composition de l'eau*. Mon assertion pourra paraître téméraire, car les nombreux ouvrages où ce point capital de l'histoire des sciences est traité *ex professo,* ont oublié Watt. J'espère, cependant, que vous voudrez bien suivre ma discussion sans prévention; que vous ne vous laisserez pas détourner de tout examen, par des autorités d'ailleurs moins nombreuses qu'on ne le suppose; que vous ne refuserez point de remarquer combien peu d'auteurs remontent aujourd'hui aux sources originales; combien ils trouvent pénible de secouer la poussière des bibliothèques; combien il leur semble commode, au contraire, de vivre sur l'érudition d'autrui, de réduire la composition d'un livre à un simple travail de rédaction. Le mandat que je tenais de votre confiance m'a semblé plus sérieux : j'ai compulsé de nombreux mémoires imprimés, toutes les pièces d'une volumineuse correspondance authentique encore manuscrite, et si je viens, après cinquante ans, réclamer en faveur de James Watt un honneur trop légèrement accordé à un de ses plus illustres compatriotes, c'est qu'il m'a semblé utile de montrer qu'au sein des académies la vérité se fait jour tôt ou tard, et qu'en matière de découvertes il n'y a jamais prescription.

Les quatre prétendus éléments, le feu, l'air, l'eau et la terre, dont les combinaisons variées devaient donner naissance à tous les corps connus, sont un des nombreux legs de la philosophie brillante qui, pendant des siècles, a ébloui les plus nobles intelligences et les a égarées. Van Helmont, le premier, ébranla, mais légèrement, un des principes de cette ancienne théorie, en signalant à l'attention des chimistes plusieurs fluides élastiques permanents, plusieurs *airs*, qu'il appella *des gaz*, et dont les propriétés différaient de celles de l'air ordinaire, de celles de l'air élément. Les expériences de Boyle et de Hooke soulevèrent des difficultés plus graves encore : elles établirent que l'air commun, nécessaire à la respiration et à la combustion, subit dans ces deux phénomènes des changements notables, des changements de propriété, ce qui implique l'idée de composition. Les nombreuses observations de Hales; les découvertes successives de l'acide carbonique par Black, de l'hydrogène par Cavendish; de l'acide nitreux, de l'oxygène, de l'acide muriatique, de l'acide sulfureux et de l'ammoniaque par Priestley, reléguèrent, définitivement, l'antique idée d'un air unique et élémentaire, parmi les conceptions hasardées et presque constamment fausses, qu'enfantent tous ceux qui ont l'audace de se croire appelés, non à découvrir, mais à deviner la marche de la nature.

Au milieu de tant de remarquables travaux, l'eau avait toujours conservé son caractère d'élément. L'année 1776 fut, enfin, signalée par une des observations qui devaient amener au renversement de cette croyance générale. On doit l'avouer, de la même année datent aussi les singuliers efforts que firent longtemps les chimistes, pour ne pas se rendre aux conséquences naturelles de leurs expériences. L'observation dont je veux parler appartient à Macquer.

Ce chimiste judicieux, ayant placé une soucoupe de porcelaine blanche sur la flamme de gaz hydrogène qui brûlait tranquillement au goulot d'une bouteille, observa que cette flamme n'était accompagnée d'aucune fumée proprement dite, qu'elle ne déposait point de suie : l'endroit de la soucoupe que la flamme *léchait*, se couvrit de gouttelettes assez sensibles d'un liquide semblable à de l'eau, et qui, après vérification, se trouva être de l'eau pure. Voilà assurément un singulier résultat. Remarquez-le bien, c'est au milieu de la flamme, dans l'endroit de la soucoupe qu'elle léchait, comme dit Macquer, que se déposèrent les gouttelettes d'eau! Ce chimiste, cependant, ne s'arrête point sur ce fait; il ne s'étonne pas de ce qu'il a d'étonnant; il le cite tout simplement, sans aucun commentaire; il ne s'aperçoit pas qu'il vient de toucher du doigt à une grande découverte.

Le génie, dans les sciences d'observation, se réduirait-il donc à la faculté de dire, à propos, *Pourquoi?*

Le monde physique compte des volcans qui n'ont jamais fait qu'une seule explosion. Dans le monde intellectuel il est, de même, des hommes qui après un éclair de génie disparaissent entièrement de l'histoire de la science. Tel a été Warltire, dont l'ordre chronologique des dates m'amène à citer une expérience vraiment remarquable. Au commencement de l'année 1781, ce physicien imagina qu'une étincelle électrique ne pourrait traverser certains mélanges gazeux, sans y déterminer quelques changements. Une idée aussi neuve, qu'aucune analogie ne suggérait alors et dont on a fait depuis de si heureuses applications, aurait, ce me semble, mérité à son auteur que tous les historiens de la science voulussent bien ne pas oublier de lui en faire honneur. Warltire se trompait sur la nature intime des changements que l'électricité devait engendrer. Heureusement pour lui il prévit qu'une explosion les accompagnerait. C'est par ce motif qu'il fit d'abord l'expérience avec un vase métallique dans lequel il avait renfermé de l'air et de l'hydrogène.

Cavendish répéta bientôt l'expérience de Warltire. La *date certaine* de son travail (j'appelle ainsi toute date résultant d'un dépôt authentique, d'une lecture académique, ou d'une pièce imprimée) est antérieure au mois d'avril 1783, puisque Priestley cite les observations de Cavendish dans un mémoire du 21 de ce même mois. La citation, au surplus, ne nous apprend qu'une seule chose : c'est que Cavendish avait obtenu *de l'eau* par la détonation d'un mélange d'oxygène et d'hydrogène, résultat déjà constaté par Warltire.

Dans son mémoire du mois d'avril, Priestley ajouta une circonstance capitale à celles qui résultaient des expériences de ses prédécesseurs : il prouva que le poids de l'eau qui se dépose sur les parois du vase au moment de la détonation de l'oxygène et de l'hydrogène, est la somme des poids de ces deux gaz.

Watt, à qui Priestley communiqua cet important résultat, y vit aussitôt, avec la pénétration d'un homme supérieur, la preuve que l'eau n'est pas un corps simple.

« Quels sont les produits de votre expérience? écrivit-il à « son illustre ami : de l'*eau*, de la *lumière*, de la *chaleur*. « Ne sommes-nous pas, dès lors, autorisés à en conclure que

« l'eau est un composé des deux gaz oxygène et hydrogène,
« privés d'une partie de leur chaleur latente ou élémentaire;
« que l'oxygène est de l'eau privée de son hydrogène, mais
« uni à de la chaleur et à de la lumière latente?

« Si la lumière n'est qu'une modification de la chaleur, ou
« une simple circonstance de sa manifestation, ou une partie
« composante de l'hydrogène, le gaz oxygène sera de l'eau
« privée de son hydrogène, mais unie à de la chaleur latente. »

Ce passage si clair, si net, si méthodique, est tiré d'une lettre de Watt du 26 avril 1783. La lettre fut communiquée par Priestley à divers savants de Londres, et remise aussitôt après à sir Joseph Banks, président de la Société royale, pour être lue dans une des séances de ce corps savant. Des circonstances que je supprime, parce qu'elles sont sans intérêt dans la discussion actuelle, retardèrent cette lecture d'un an; mais la lettre resta aux archives de la Société. Elle figure dans le soixante-quatorzième volume des Transactions philosophiques, avec sa véritable date du 26 avril 1783. On l'y trouve fondue dans une lettre de Watt à Deluc, en date du 26 novembre 1783 et distinguée par des guillemets renversés, apposés par le secrétaire de la société royale.

Je ne réclame pas d'indulgence pour cette profusion de détails : on remarquera que la comparaison minutieuse des dates peut seule mettre la vérité dans tout son jour, et qu'il est question d'une des découvertes qui honorent le plus l'esprit humain.

Parmi les prétendants à cette féconde découverte, nous allons maintenant voir paraître les deux plus grands chimistes dont la France et l'Angleterre se glorifient. Tout le monde a déjà nommé Lavoisier et Cavendish.

La date de la lecture publique du mémoire dans lequel Lavoisier rendit compte de ses expériences, dans lequel il développa ses vues sur la production de l'eau par la combustion de l'oxygène et de l'hydrogène, est postérieure de deux mois à celle du dépôt aux archives de la Société royale de Londres de la lettre déjà analysée de Watt.

Le mémoire célèbre de Cavendish, intitulé : *Experiments on air,* est plus récent encore : il fut lu le 15 janvier 1784. On s'étonnerait avec raison que des faits aussi authentiques eussent pu devenir le sujet d'une polémique animée, si je ne m'empressais de signaler à votre attention une circonstance dont je n'ai pas encore parlé. Lavoisier déclara, en termes positifs, que Blagden, secrétaire de la Société royale de Londres, assista à ses premières expériences du 24 juin 1783, et « qu'il « lui apprit que Cavendish ayant déjà essayé, à Londres, de « brûler du gaz hydrogène dans des vaisseaux fermés, avait « obtenu une quantité d'eau très-sensible. »

Cavendish rappela aussi dans son mémoire la communication faite à Lavoisier par Blagden. Suivant lui, elle fut plus étendue que le chimiste français ne l'avouait. Il dit que la confidence embrassa les conclusions auxquelles les expériences conduisaient, c'est-à-dire la théorie de la composition de l'eau.

Blagden, mis en cause lui-même, écrivit dans le journal de Crell, en 1786, pour confirmer l'assertion de Cavendish. A l'en croire, les expériences de l'académicien de Paris n'auraient même été qu'une simple vérification de celles du chimiste anglais. Il assure avoir annoncé à Lavoisier, que l'eau engendrée à Londres avait un poids précisement égal à la somme des poids des deux gaz brûlés. Lavoisier, ajoute enfin Blagden, a *dit la vérité, mais pas toute la vérité.*

Un pareil reproche est sévère ; mais, fut-il fondé, n'en atténuerai-je pas beaucoup la gravité, si je montre que, Watt excepté, tous ceux dont les noms figurent dans cette histoire s'y étaient plus ou moins exposés ?

Priestley rapporte en détail et comme siennes, des expériences dont il résulte que l'eau engendrée par la détonation d'un mélange d'oxygène et d'hydrogène, a un poids exactement égal à celui des deux gaz brûlés. Cavendish, quelque temps après, réclame ce résultat pour lui-même et insinue qu'il l'avait communiqué verbalement au chimiste de Birmingham.

Cavendish tire de cette égalité de poids, la conséquence que l'eau n'est pas un corps simple. D'abord, il ne fait aucune mention d'un mémoire déposé aux archives de la Société royale et dans lequel Watt développait la même théorie. Il est vrai qu'au jour de l'impression le nom de Watt n'est pas oublié ; mais ce n'est pas aux archives qu'on a pu voir le travail du célèbre ingénieur : on déclare en avoir eu connaissance par une lecture récente, faite en séance publique. Aujourd'hui, cependant, il est parfaitement constaté que cette lecture a suivi de plusieurs mois, celle du mémoire où Cavendish en parle.

En arrivant sur le terrain de cette grave discussion, Blagden annonce la ferme volonté de tout éclaircir, de tout préciser. Il ne recule, en effet, devant aucune accusation, devant la citation d'aucune date, tant qu'il est question d'assurer à son protecteur et ami, Cavendish, la priorité sur le chimiste français. Dès qu'il s'agit de ses deux compatriotes, les explications deviennent vagues et obscures. « Dans le prin-
« temps de 1783, dit-il, M. Cavendish nous montra qu'il avait
« dû tirer de ses expériences, la conséquence que l'oxygène

« n'est autre chose que de l'eau privée de son phlogistique « (c'est-à-dire privée de l'hydrogène). *Vers le même temps,* « la nouvelle arriva à Londres que M. Watt, de Birmingham, « avait été conduit par quelques observations à une opinion « semblable. » Ces expressions : *Vers le même temps,* pour parler comme Blagden lui-même, ne sauraient être *toute la vérité. Vers le même temps ne décide rien :* des questions de priorité peuvent tenir à des semaines, à des jours, à des heures, à des minutes. Pour être net et précis, comme on l'avait promis, il fallait dire si la communication verbale, faite par Cavendish à plusieurs membres de la Société royale, précéda ou suivit l'arrivée à Londres des nouvelles du travail de Watt. Peut-on supposer que Blagden ne se serait pas expliqué sur un fait de cette importance, s'il avait pu citer une date authentique en faveur de son ami ?

Pour rendre l'*imbroglio* complet, les protes, les compositeurs, les imprimeurs des *Transactions philosophiques* se mirent aussi de la partie. Plusieurs dates y sont inexactement rapportées. Sur les exemplaires séparés de son mémoire que Cavendish distribua à divers savants, j'aperçois une erreur d'une année entière. Par une triste fatalité, car c'est un malheur réel de donner lieu involontairement à des soupçons fâcheux et immérités, aucune de ces nombreuses fautes d'impression n'était favorable à Watt! A Dieu ne plaise que j'entende inculper par ces remarques, la probité littéraire des savants illustres dont j'ai cité les noms : elles prouvent seulement qu'en matière de découvertes, la plus stricte justice est tout ce qu'on doit attendre d'un rival, d'un compétiteur, quelque éminente que soit déjà sa réputation. Cavendish écoutait à peine les gens d'affaires, quand ils allaient le consulter sur le placement de ses 25 ou 30 millions; vous savez maintenant s'il avait la même indifférence pour des expériences. On se montrerait donc peu exigeant, en demandant, qu'à l'exemple des juges civils, les historiens de la science n'accueillissent jamais comme titres de propriété valables, que des titres écrits; peut-être devrais-je même ajouter, que des titres publiés. Alors, mais seulement alors, finiraient ces querelles, sans cesse renaissantes, dont les vanités nationales font ordinairement les frais; alors le nom de Watt reprendrait dans l'histoire de la chimie, la place élevée qui lui appartient.

La solution d'une question de priorité, quand elle se fonde, comme celle que je viens de lire, sur l'examen le plus attentif de mémoires imprimés et sur la comparaison minutieuse de dates, prend le caractère d'une véritable démonstration. Toutefois, je ne me crois pas dispensé de parcourir rapidement diverses difficultés auxquelles de très-bons esprits m'ont paru attacher quelque importance.

Comment admettre, m'a-t-on dit, qu'au milieu d'un immense tourbillon d'affaires commerciales; que préoccupé d'une multitude de procès; qu'obligé de pourvoir, par des inventions de tous les jours, aux difficultés d'une fabrication naissante, Watt ait trouvé le temps de suivre pas à pas les progrès de la chimie, de faire de nouvelles expériences, de proposer des explications dont les maîtres de la science eux-mêmes ne se seraient pas avisés?

Je ferai à cette difficulté une réponse courte, mais concluante : j'ai dans les mains la copie d'une active correspondance, relative principalement à des sujets de chimie, que Watt entretint, à dater de 1782, de 1783 et de 1784, avec

Priestley, Black, Deluc, l'ingénieur Smeaton, Gilbert Hamilton de Glasgow, et Fry de Bristol.

Voici une objection qui semble plus spécieuse ; elle est née d'une connaissance approfondie du cœur humain.

La découverte de la composition de l'eau, marchant au moins de pair avec les admirables inventions dont la machine à vapeur offre la réunion, peut-on supposer que Watt ait consenti de gaieté de cœur ou du moins, sans en témoigner son déplaisir, à se voir dépouillé de l'honneur qu'elle devait éternellement faire rejaillir sur son nom?

Ce raisonnement a le défaut de pécher complétement par sa base. Watt ne renonça jamais à la part qui lui revenait légitimement dans la découverte de la composition de l'eau. Il fit scrupuleusement imprimer son mémoire dans les Transactions philosophiques. Une note détaillée constata authentiquement la date de la présentation des divers paragraphes de cet écrit. Que pouvait, que devait faire de plus un philosophe du caractère de Watt, si ce n'était d'attendre patiemment le jour de la justice? Au reste, il s'en fallut de bien peu qu'une maladresse de Deluc n'arrachât notre confrère à sa longanimité naturelle. Le physicien génevois après avoir averti l'illustre ingénieur de l'inexplicable absence de son nom dans la première rédaction du mémoire de Cavendish ; après avoir qualifié cet oubli dans des termes que de si hautes renommées ne me permettent pas de rapporter, écrivait à son ami : « Je vous conseillerai presque, « attendu votre position, de tirer de vos découvertes des « conséquences pratiques pour votre fortune. Il vous faut « éviter de vous faire des jaloux. »

Ces quelques mots blessèrent l'âme élevée de Watt. « Si je « ne réclame pas mes droits sur-le-champ, répondit-il, im- « putez-le à une indolence de caractère qui me fait trouver « plus aisé de supporter l'injustice, que de combattre pour « en obtenir le redressement. Quant à des considérations « d'intérêt pécuniaire, elles n'ont à mes yeux aucune valeur. « Au surplus, mon avenir dépend des encouragements que « le public voudra bien m'accorder, mais nullement de ceux « de M. Cavendish et de ses amis. »

Dois-je craindre d'avoir attaché trop d'importance à la théorie que Watt imagina pour expliquer les expériences de Priestley? Je ne le pense pas. Ceux qui refuseraient un juste suffrage à cette théorie, parce qu'elle semble maintenant une conséquence inévitable des faits, oublieraient que les plus belles découvertes de l'esprit humain ont été surtout remarquables par leur simplicité. Que fit Newton, lui-même, lorsque répétant une expérience déjà connue quinze siècles auparavant il découvrit la composition de la lumière blanche? Il donna de cette expérience une interprétation tellement naturelle, qu'il paraît impossible aujourd'hui d'en trouver une autre. Tout ce qu'on tire, dit-il, à l'aide de quelque procédé que ce soit, d'un faisceau de lumière blanche, y était contenu à l'état de mélange. Le prisme de verre n'a aucune faculté créatrice. Si le faisceau parallèle et infiniment délié de lumière solaire qui tombe sur sa première face, sort par la seconde en divergeant et avec une largeur sensible, c'est que le verre sépare ce qui dans le faisceau blanc était, par sa nature, inégalement réfrangible. Ces paroles ne sont pas autre chose que la traduction littérale de l'expérience connue du spectre solaire prismatique. Cette traduction avait cependant échappé à un Aristote, à un Descartes, à un Robert Hooke !

Venons, sans sortir du sujet, à des arguments qui iront au but plus directement encore. La théorie, conçue par Watt, de la composition de l'eau, arrive à Londres. Si dans les idées du temps elle est aussi simple, aussi évidente qu'elle nous le paraît aujourd'hui, le conseil de la Société royale ne manquera pas de l'adopter. Il n'en est rien : son *étrangeté* fait même douter de la vérité des expériences de Priestley. On va jusqu'à en *rire*, dit Deluc, *comme de l'explication de la dent d'or.*

Une théorie dont la conception n'eût présenté aucune difficulté, aurait été certainement dédaignée par Cavendish. Rappelez-vous avec quelle vivacité, sous l'inspiration de cet homme de génie, Blagden en réclama la priorité contre Lavoisier.

Priestley sur qui devait rejaillir une bonne part de l'honneur attaché à la découverte de Watt; Priestley dont les sentiments affectueux pour le célèbre ingénieur ne pourraient être contestés, lui écrivait, à la date du 29 avril 1783 : « Regardez avec surprise et indignation la figure d'un appareil « à l'aide duquel j'ai *miné sans retour votre belle hypo-* « *thèse.* »

En résumé, une hypothèse dont on riait à la Société royale; qui faisait sortir Cavendish de sa réserve habituelle ; que Priestley, mettant tout amour-propre de côté, s'attachait à ruiner, mérite d'être enregistrée dans l'histoire des sciences comme une grande découverte, quelque idée que des connaissances devenues vulgaires puissent nous en donner aujourd'hui (1).

Le blanchissage à l'aide du chlore, cette belle invention de Berthollet, fut introduit en Angleterre par James Watt, après le voyage qu'il fit à Paris vers la fin de l'année 1786. Il construisit tous les appareils nécessaires, dirigea leur installation, présida aux premières épreuves et, ensuite, confia à M. Mac-Grégor, son beau-père, l'exploitation de la nouvelle industrie. Malgré toutes les sollicitations de l'illustre ingénieur, notre célèbre compatriote *avait obstinément refusé* (2) de s'associer à une entreprise qui n'offrait aucune chance défavorable et dont les bénéfices semblaient devoir être fort grands.

A peine venait-on de découvrir, pendant la seconde moitié du siècle dernier, les nombreuses substances gazeuses qui jouent aujourd'hui un si grand rôle dans l'explication des phénomènes chimiques, qu'on songea à s'en servir

---

(1) Lord Brougham assistait à la séance publique où je payai, au nom de l'Académie des sciences, ce tribut de reconnaissance et d'admiration à la mémoire de Watt.

De retour en Angleterre, il recueillit de précieux documents et étudia de nouveau la question historique à laquelle je viens de donner tant de place, avec la supériorité de vues qui lui est familière, avec le scrupule, en quelque sorte judiciaire, qu'on pouvait attendre de l'ancien lord chancelier de la Grande-Bretagne. Je dois à une bienveillance dont je sens tout le prix, de pouvoir offrir au public le fruit encore inédit du travail de mon illustre confrère. On le trouvera à la suite de cet éloge.

(2) Le terme est exact, quelque fabuleux qu'il puisse paraître dans le siècle où nous vivons.

comme médicament. Le docteur Beddoës poursuivit cette idée avec sagacité et persévérance. Des souscriptions particulières lui permirent même de créer à *Clifton*, près de *Bristol*, sous le nom de *Pneumatic Institution*, un établissement où les propriétés thérapeutiques de tous les gaz devaient être soigneusement étudiées. L'*Institution Pneumatique* eut l'avantage d'avoir quelque temps à sa tête, le jeune Humphry Davy qui débutait alors dans la carrière des sciences. Elle put aussi se glorifier de compter James Watt parmi ses fondateurs. Le célèbre ingénieur fit plus : il imagina, décrivit et exécuta dans les ateliers de Soho les appareils qui servaient à engendrer les gaz et à les administrer aux patients. Je trouve plusieurs éditions de ses mémoires, aux dates de 1794, de 1795 et de 1796.

Les idées de notre confrère se tournèrent de ce côté, lorsque plusieurs de ses proches et de ses amis lui eurent été cruellement enlevés, avant l'âge, par des maladies de poitrine. C'étaient surtout les lésions des organes de la respiration qui paraissaient à Watt pouvoir être traitées à l'aide des propriétés spécifiques des nouveaux gaz. Il attendait aussi quelque avantage de l'action du fer ou du zinc que l'hydrogène entraîne en molécules impalpables, quand il est préparé de certaines manières. J'ajouterai, enfin, que parmi les nombreuses notes de médecins publiées par le docteur Beddoës et annonçant des résultats plus ou moins décisifs, il en est une, signée John Carmichael, relative à la guérison radicale de l'hémoptysie d'un domestique, Richard Newberry, à qui M. Watt faisait lui-même respirer de temps à autre un mélange de vapeur d'eau et d'acide carbonique. Quoique je reconnaisse sans difficulté ma profonde incompétence en pareille matière, ne me sera-t-il pas permis de regretter qu'une méthode qui compta parmi ses adhérents, des Watt, des Jenner, soit aujourd'hui entièrement abandonnée, sans qu'on puisse citer des expériences suivies, en opposition manifeste avec celles du *Pneumatic Institution* de *Clifton* (1)?

Watt dans la retraite. Détails sur sa vie et son caractère. Sa mort. Les nombreuses statues élevées à sa mémoire. Réflexions.

Watt avait épousé, en 1764, sa cousine M^lle Miller. C'était une personne accomplie dont l'esprit distingué, la douceur inaltérable, le caractère enjoué arrachèrent bientôt le célèbre ingénieur à l'indolence, au découragement, à la misanthropie qu'une maladie nerveuse et l'injustice des hommes menaçaient de rendre fatale. Sans M^lle Miller, Watt n'aurait peut-être jamais livré au public ses belles inventions. Quatre enfants, deux garçons et deux filles, sortirent de cette union. Madame Watt mourut en couche, d'un troisième garçon qui ne vécut pas. Son mari était alors occupé dans le nord de l'Écosse, des plans du canal Calédonien. Que ne m'est-il permis de transcrire ici avec leur naïveté, quelques lignes du journal dans lequel il déposait chaque jour ses pensées les plus intimes, ses craintes, ses espérances! que ne puis-je vous le montrer s'arrêtant, après son malheur, sur le seuil de la porte de la maison où ne l'attendait plus *sa douce bienvenue* (my Kind

(1) Vingt ans avant la naissance de l'institution pneumatique de Bristol, Watt appliquait déjà ses connaissances chimiques et minéralogiques au perfectionnement des produits d'une poterie qu'il avait établie à Glasgow avec quelques amis, et dont il resta actionnaire jusqu'à la fin de sa vie.

welcomer); n'ayant pas la force de pénétrer dans des appartements où il ne devait plus trouver le *confort de sa vie* (the comfort of my life)! Peut-être la peinture si vraie d'une douleur profonde réduirait-elle enfin au silence les esprits systématiques qui, sans s'arrêter à mille et mille démentis éclatants, refusent les qualités du cœur à tout homme dont l'intelligence s'est nourrie des vérités fécondes, sublimes, impérissables des sciences exactes.

Après quelques années de veuvage, Watt eut encore le bonheur de trouver dans M^lle Mac Gregor, une compagne digne de lui par la variété des talents, par la sûreté de jugement, par la force de caractère (1).

A l'expiration du privilége que le parlement lui avait conféré, Watt (au commencement de 1800) se retira entièrement des affaires. Ses deux fils lui succédèrent. Sous la direction éclairée de M. Boulton fils et des jeunes MM. Watt, la fabrique de Soho continua à prospérer et prit même de nouveaux, d'importants développements. Aujourd'hui encore elle occupe le premier rang parmi les établissements anglais destinés à la construction des grandes machines. Le second des deux fils de notre confrère, Gregory Watt, avait débuté dans le monde de la manière la plus brillante, par des compositions littéraires et des travaux de géologie. Il mourut en 1804, à l'âge de 27 ans, d'une maladie de poitrine. Cet événement cruel atterra l'illustre ingénieur. Les soins touchants de sa famille, de ses amis, parvinrent très-difficilement à entretenir

(1) M^me Watt (Mac-Gregor) s'éteignit en 1832, dans un âge très-avancé. Elle avait eu la douleur de survivre aux deux enfants qui étaient issus de son mariage avec M. Watt.

quelque calme dans un cœur à demi brisé. Cette trop juste douleur a paru pouvoir expliquer le silence presque absolu que Watt a gardé pendant les dernières années de sa vie. Je suis loin de nier qu'elle ait été sans influence; mais qu'est-il besoin de recourir à des causes extraordinaires, lorsque nous lisons déjà, à la date de 1783, dans une lettre de Watt à son ami le docteur Black : « Rappelez-vous bien que je n'ai aucun « désir d'entretenir le public des expériences que j'ai faites; » lorsque nous trouvons ailleurs ces paroles bien singulières dans la bouche d'un homme qui a rempli le monde de son nom : « Je ne connais que deux plaisirs : la paresse et le « sommeil. » Ce sommeil, au reste, était bien léger. Disons-le aussi, il suffisait de la moindre excitation pour arracher Watt à sa paresse favorite. Tous les objets qui s'offraient à lui recevaient peu à peu dans son imagination, des changements de forme, de construction, de nature qui les auraient rendus susceptibles d'applications importantes. Ces conceptions, faute d'occasion de se produire, étaient perdues pour le monde. Voici une anecdote qui expliquera ma pensée :

Une compagnie avait établi à Glasgow, sur la rive droite de la Clyde, de grands bâtiments et de puissantes machines destinées à porter de l'eau dans toutes les maisons de la ville. Quand ce travail fut achevé, on s'aperçut qu'il existait près de la rive opposée une source, ou plutôt une espèce de filtre naturel qui donnait à l'eau des qualités évidemment supérieures. Déplacer l'établissement n'était pas même proposable; aussi pensa-t-on à installer au fond et tout au travers de la rivière, un tuyau de conduite rigide dont l'embouchure se serait constamment trouvée dans la nappe d'eau potable; mais la construction du plancher destiné à supporter un pareil tuyau sur un lit vaseux, changeant, très-inégal et toujours couvert de plusieurs pieds d'eau, semblait devoir exiger de trop fortes dépenses. Watt fut consulté. Sa solution était toute prête : en voyant un homard sur sa table, quelques jours auparavant, il avait cherché et trouvé comment la mécanique pourrait avec du fer, engendrer une pièce à articulations qui aurait toute la mobilité de la queue du crustacé; c'est donc un tuyau de conduite articulé, susceptible de se plier de lui-même à toutes les inflexions présentes et futures du lit de la rivière, qu'il proposa; c'est une queue de homard en fer, de deux pieds anglais de diamètre et d'un millier de pieds de longueur que, d'après les plans et les dessins de Watt, la compagnie de Glasgow fit exécuter avec un succès complet.

Ceux qui eurent le bonheur de connaître personnellement notre confrère, n'hésitent pas à déclarer que chez lui les qualités du cœur étaient encore au-dessus des mérites du savant. Une candeur enfantine, la plus grande simplicité de manières, l'amour de la justice poussé jusqu'au scrupule, une inépuisable bienveillance, voilà ce qui a laissé en Écosse, en Angleterre des souvenirs ineffaçables. Watt, d'habitude si modéré, si doux, se crispait quand devant lui une invention n'était pas attribuée à son véritable auteur; lorsque, surtout, quelque bas adulateur voulait l'enrichir lui-même aux dépens d'autrui. A ses yeux les découvertes scientifiques étaient le premier des biens. Des heures entières de discussion ne lui semblaient pas de trop, s'il fallait faire rendre justice à des inventeurs modestes dépossédés par des plagiaires, ou seulement oubliés d'un public ingrat.

La mémoire de Watt pouvait être citée comme prodigieuse, même à côté de tout ce qu'on a raconté de cette faculté chez quelques hommes privilégiés. L'étendue était, cependant, son moindre mérite : elle s'assimilait tout ce qui avait quelque valeur ; elle rejetait sans retour, presque instinctivement, les superfluités qu'il eût été inutile de conserver.

La variété de connaissances de notre confrère serait vraiment incroyable, si elle n'était attestée par plusieurs hommes éminents. Lord Jeffrey, dans une éloquente notice, caractérisa heureusement l'intelligence à la fois forte et subtile de son ami, quand il la compara à la trompe, si merveilleusement organisée, dont l'éléphant se sert avec une égale facilité pour saisir une paille et pour déraciner un chêne.

Voici en quels termes sir Walter Scott parle de son compatriote, dans la préface du *Monastère :*

« Watt n'était pas seulement le savant le plus profond ; « celui qui avec le plus de succès avait tiré de certaines com-« binaisons de nombres et de forces des applications usuelles ; « il n'occupait pas seulement un des premiers rangs parmi « ceux qui se font remarquer par la généralité de leur ins-« truction ; il était encore le meilleur, le plus aimable des « hommes. La seule fois que je l'aie rencontré, il était en-« touré d'une petite réunion de littérateurs du Nord.... Là, « je vis et j'entendis ce que je ne verrai et n'entendrai plus « jamais. Dans la quatre-vingt-unième année de son âge, le « vieillard, alerte, aimable, bienveillant, prenait un vif inté-« rêt à toutes les questions ; sa science était à la disposition « de qui la réclamait. Il répandait les trésors de ses talents et « de son imagination sur tous les sujets. Parmi les *gentlemen* « se trouva un profond philologue ; Watt discuta avec lui

« sur l'origine de l'alphabet comme s'il avait été le contem-
« porain de Cadmus. Un célèbre critique s'étant mis de la
« partie, vous eussiez dit que le vieillard avait consacré sa
« vie tout entière à l'étude des belles-lettres et de l'économie
« politique. Il serait superflu de mentionner les sciences :
« c'était sa *carrière* brillante et spéciale ; cependant, quand
« il parla avec notre compatriote Jedediah Cleishbotham,
« vous auriez juré qu'il avait été le contemporain de Claver-
« house et de Burley, des persécuteurs et des persécutés ; il
« aurait fait, en vérité, le dénombrement exact des coups de
« fusil que les dragons tirèrent sur les Covenants fugitifs.
« Nous découvrîmes, enfin, qu'aucun roman du plus léger
« renom ne lui avait échappé, et que la passion de l'illustre
« savant pour ce genre d'ouvrages était aussi vive que celle
« qu'ils inspirent aux jeunes modistes de dix-huit ans. »

Si notre confrère l'eût voulu il se serait fait un nom parmi les romanciers. Au milieu de sa société intime, il manquait rarement d'enchérir sur les anecdotes terribles, touchantes ou bouffonnes qu'il entendait conter. Les détails minutieux de ses récits, les noms propres dont il les parsemait ; les descriptions techniques des châteaux, des maisons de campagne, des forêts, des cavernes où la scène était successivement transportée, donnaient à ces improvisations un si grand air de vérité qu'on se serait reproché le plus léger sentiment de défiance. Certain jour, cependant, Watt éprouvait de l'embarras à tirer ses personnages du dédale dans lequel il les avait imprudemment jetés. Un de ses amis s'en aperçut au nombre inusité de prises de tabac à l'aide duquel le conteur voulait légitimer de fréquentes pauses et se donner le temps de la réflexion. Aussi lui adressa-t-il cette question indiscrète : « Est-ce, par hasard, que vous nous « raconteriez une histoire de votre cru ? » — « Ce doute « m'étonne, repartit naïvement le vieillard : depuis vingt « ans que j'ai le bonheur de passer mes soirées avec vous, « je ne fais pas autre chose! Est-il vraiment possible qu'on « ait voulu faire de moi un émule de Robertson ou de Hume, « lorsque toutes mes prétentions se bornaient à marcher, de « bien loin, sur les traces de la princesse Scheherazade des « *Mille et une Nuits ?* »

Chaque année, durant un très-court voyage à Londres ou dans d'autres villes moins éloignées de Birmingham, Watt faisait un examen détaillé de tout ce qui avait paru de neuf depuis sa précédente visite. Je n'en excepte même pas le spectacle des puces travailleuses et celui des marionnettes, car l'illustre ingénieur y assistait avec l'abandon et la joie d'un écolier. En suivant, encore aujourd'hui, l'itinéraire de ces courses annuelles, nous trouverions en plus d'un endroit des traces lumineuses du passage de Watt. A Manchester, par exemple, nous verrions le bélier, d'après la proposition de notre confrère, servant à élever l'eau de condensation d'une machine à vapeur, jusqu'au réservoir alimentaire de la chaudière.

Watt résidait ordinairement dans une terre voisine de Soho, nommée Heathfield, dont il avait fait l'acquisition vers 1790. Le respect religieux de mon ami, M. James Watt, pour tout ce qui rappelle la mémoire de son père, m'a valu, en 1834, la satisfaction de retrouver la bibliothèque et les meubles de Heathfield, dans l'état où l'illustre ingénieur les laissa. Une autre propriété bordant les rives pittoresques de la rivière Wye (pays de Galles), offre aux voyageurs des preuves multipliées du goût éclairé de Watt et de son fils, pour l'amélioration des routes, pour les plantations, pour les travaux agricoles de toute nature.

La santé de Watt s'était fortifiée avec l'âge. Ses facultés intellectuelles conservèrent toute leur puissance jusqu'au dernier moment. Notre confrère crut une fois qu'elles déclinaient, et fidèle à la pensée qu'exprimait le cachet dont il avait fait choix (un œil entouré du mot *observare*), il se décida à éclaircir ses doutes en s'observant lui-même; et le voilà, plus que septuagénaire, cherchant sur quel genre d'étude il pourrait s'essayer, et se désolant de ne trouver aucun sujet vierge pour son esprit. Il se rappelle, enfin, qu'il existe une langue anglo-saxonne, que cette langue est difficile, et l'anglo-saxon devient le moyen expérimental désiré, et la facilité qu'il trouve à s'en rendre maître lui montre le peu de fondement de ses appréhensions.

Watt consacra les derniers moments de sa vie à la construction d'une machine destinée à copier promptement et avec une fidélité mathématique, les pièces de statuaire et de sculpture de toutes dimensions. Cette machine dont il faut espérer que les arts ne seront pas privés, doit être fort avancée. On voit plusieurs de ses produits, déjà fort satisfaisants, dans divers cabinets d'amateurs de l'Écosse et de l'Angleterre. L'illustre ingénieur les avait présentés gaiement, comme les premiers essais d'un jeune artiste entrant dans la quatre-vingt-troisième année de son âge.

Cette quatre-vingt-troisième année, il ne fut pas donné à notre confrère d'en voir la fin. Dès les premiers jours de l'été de 1819, des symptômes alarmants défièrent tous les efforts de la médecine. Watt lui-même ne se fit pas illusion. « Je suis touché, disait-il aux nombreux amis qui le visitaient, je suis touché de l'attachement que vous me montrez. Je me hâte de vous en remercier, car me voilà parvenu à ma dernière maladie. » Son fils ne lui paraissait pas assez résigné ; chaque jour il cherchait un nouveau prétexte pour lui signaler avec douceur, avec bonté, avec tendresse, « tous les « motifs de consolation que lui apporteraient les circons- « tances dans lesquelles allait arriver un événement inévi- « table. » Ce triste événement arriva en effet le 25 août 1819.

Watt fut enterré à côté de l'église paroissiale de Heathfield, près de Birmingham, dans le comté de Stafford. M. James Watt, dont les talents distingués, dont les nobles sentiments embellirent pendant près de vingt-cinq ans la vie de son père, lui a fait ériger un splendide monument gothique, qui rend aujourd'hui l'église de Handsworth extrêmement remarquable. Au centre s'élève une admirable statue en marbre, exécutée par M. Chantrey, et qui est la reproduction fidèle des nobles traits du vieillard.

Une seconde statue en marbre, sortie des ateliers du même sculpteur, a été placée aussi par la piété filiale, dans l'une des salles de la brillante université où, pendant sa jeunesse, l'artiste encore inconnu et en butte aux tracasseries des corporations, reçut des encouragements si flatteurs et si mérités. Greenock n'a pas oublié que Watt y naquit. Ses habitants font exécuter, à leurs frais, une statue en marbre de l'illustre mécanicien. On la placera dans une belle bibliothèque, construite sur un terrain donné gratuitement par sir Michel Shaw Stewart, et où seront aussi réunis les livres que la ville possédait, et la collection d'ouvrages de sciences dont Watt l'avait dotée de son vivant. Ce bâtiment a déjà coûté 3500 livres sterling (près de 80000 fr. de notre monnaie), dépense considérable à laquelle la libéralité de M. Watt fils a pourvu. Une grande statue colossale en bronze qui domine, sur une belle base de granit, un des angles de George square, à Glasgow, montre à tous les yeux combien cette capitale de l'industrie écossaise est fière d'avoir été le berceau des découvertes de Watt. Les portes de l'abbaye de Westminster, enfin, se sont ouvertes à la voix d'une imposante réunion de souscripteurs : une statue colossale de notre confrère, en marbre de Carrare, chef-d'œuvre de M. Chantrey, et dont le piédestal porte une inscription de lord Brougham (1), est

---

(1) Voici cette inscription :

Not to perpetuate a name
which must endure while the peaceful arts flourish
But to shew
that mankind have learnt to honour those
who lest deserve their gratitude
the King
his Ministers and many of the Nobles
and Commoners of the Realm
raised this monument to
JAMES WATT
who directing the force of an original genius
early exercised in philosophic research
to the improvement of
the Steam Engine
enlarged the resources of his country
increased the power of man
and rose to an eminent place
among the most illustrious followers of science
and the real benefactors of the world
Born at Greenock MDCCXXXVI
Died at Heathfield in Staffordshire MDCCCXIX

devenue, depuis quelques années, l'un des principaux ornements du Panthéon anglais. Sans doute, il y a eu quelque coquetterie à réunir les noms illustres de Watt, de Chantrey et de Brougham sur le même monument; mais je ne saurais trouver là le sujet d'un blâme: gloire aux peuples qui saisissent ainsi toutes les occasions d'honorer leurs grands hommes!

Voilà, de compte fait, cinq grandes statues élevées en peu de temps à la mémoire de Watt. Faut-il l'avouer? Ces hommages, de la piété filiale, de la reconnaissance publique, ont excité la mauvaise humeur de quelques esprits rétrécis qui en restant stationnaires croient arrêter la marche des siècles? A les en croire, des hommes de guerre, des magistrats, des ministres (je dois avouer qu'ils n'ont pas osé dire tous les ministres), auraient droit à des statues. Je ne sais si Homère, si Aristote, si Descartes, si Newton, paraîtraient à nos nouveaux Aristarques, dignes d'un simple buste; à coup sûr ils refuseraient le plus modeste médaillon aux Papin, aux Vaucanson, aux Watt, aux Arkwright et à d'autres mécaniciens, inconnus peut-être dans un certain monde, mais dont la renommée ira grandissant d'âge en âge avec les progrès des lumières. Lorsque de semblables hérésies osent se produire au grand jour, il ne faut pas dédaigner de les combattre. Ce n'est point sans raison qu'on a appelé le public une éponge à préjugés; or les préjugés sont comme les plantes nuisibles : le plus petit effort suffit pour les extirper si on les saisit à leur naissance; ils résistent, au contraire, quand on leur a laissé le temps de croître, de s'étendre, de saisir dans leurs nombreux replis tout ce qui se trouvait à leur portée.

Si cette discussion blesse quelques amours-propres, je remarquerai qu'elle a été provoquée. Les hommes d'étude de notre époque avaient-ils jusqu'ici fait entendre des plaintes en ne voyant aucun des grands auteurs dont ils cultivent l'héritage, figurer dans ces longues rangées de statues colossales que l'autorité élève fastueusement sur nos ponts, sur nos places publiques? Ne savent-ils pas que ces monuments sont fragiles; que les ouragans les ébranlent et les renversent; que les gelées suffisent pour en ronger les contours, pour les réduire à des blocs informes?

Leur statuaire, leur peinture à eux, c'est l'imprimerie. Grâce à cette admirable invention, quand les ouvrages que la science, que l'imagination enfantent, ont un mérite réel, ils peuvent défier le temps et les révolutions politiques. Les exigences du fisc, les inquiétudes, les terreurs des despotes ne sauraient empêcher ces productions de franchir les frontières les mieux gardées. Mille navires les transportent, sous tous les formats, d'un hémisphère à l'autre. On les médite à la fois en Islande et à la terre de Van-Diemen; on les lit à la veillée de l'humble chaumière, on les lit aux brillantes réunions des palais. L'écrivain, l'artiste, l'ingénieur sont connus, sont appréciés du monde entier, par ce qu'il y a dans l'homme de plus noble, de plus élevé: par l'âme, par la pensée, par l'intelligence. Bien fou celui qui placé sur un pareil théâtre, se surprendrait à désirer que ses traits, reproduits en marbre ou en bronze, même par le ciseau d'un David, fussent un jour exposés aux regards des promeneurs désœuvrés. De tels honneurs, je le répète, un savant, un littérateur, un artiste peuvent ne pas les envier, mais ils ne doivent souffrir à aucun prix qu'on les en déclare indignes. Telle est, du moins, la pensée qui m'a suggéré la discussion que je vais soumettre à vos lumières.

N'est-ce pas une circonstance vraiment étrange, qu'on se soit avisé de soulever les prétentions orgueilleuses que je combats, précisément à l'occasion de cinq statues qui n'ont pas coûté une seule obole au trésor public? Loin de moi, cependant, le projet de profiter de cette maladresse. J'aime mieux prendre la question dans sa généralité, telle qu'on l'a posée : la prétendue prééminence des armes sur les lettres, sur les sciences, sur les arts; car, il ne faut pas s'y tromper, si l'on a associé des magistrats, des administrateurs aux hommes de guerre, c'est seulement comme un passe-port.

Le peu de temps qu'il m'est permis de consacrer à cette discussion, m'impose le devoir d'être méthodique. Pour qu'on ne puisse pas se méprendre sur mes sentiments, je déclare d'abord bien haut, que l'indépendance, que les libertés nationales sont à mes yeux les premiers des biens; que les défendre contre l'étranger ou contre les ennemis intérieurs, est le premier des devoirs; que les avoir défendues au prix de son sang, est le premier des titres à la reconnaissance publique. Élevez, élevez de splendides monuments à la mémoire des soldats qui succombèrent sur les glorieux remparts de Mayence, dans les champs immortels de Zurich, de Marengo, et certes mon offrande ne se fera pas attendre; mais n'exigez pas que je fasse violence à ma raison, aux sentiments que la nature a jetés dans le cœur humain; n'espérez pas que je consente jamais à placer tous les services militaires sur une même ligne.

Quel Français, homme de cœur, même au temps de Louis XIV, aurait voulu aller chercher un exemple de courage, soit dans les cruelles scènes des Dragonnades, soit dans les tourbillons de flamme qui dévoraient les villes, les villages, les riches campagnes du Palatinat?

Naguère, après mille prodiges de patience, d'habileté, de bravoure, nos vaillants soldats pénétrant dans Saragosse à moitié renversée, atteignirent la porte d'une église où le prédicateur faisait retentir aux oreilles de la foule résignée ces magnifiques paroles : « Espagnols, je vais célébrer vos funérailles! » Que sais-je? mais, en ce moment, les vrais amis de notre gloire nationale balançant les mérites divers des vainqueurs et des vaincus, auraient peut-être volontiers interverti les rôles!

Mettez, j'y consens, entièrement de côté la question de moralité. Soumettez au creuset d'une critique consciencieuse, les titres personnels de certains gagneurs de batailles, et croyez qu'après avoir donné une part équitable au hasard, espèce d'allié dont on fait toujours abstraction parce qu'il est muet, bien de prétendus héros vous paraîtront peu dignes de ce titre pompeux.

Si on le croyait nécessaire, je ne reculerais pas devant un examen de détail, moi, cependant, qui, dans une carrière purement académique ai dû trouver peu d'occasions de recueillir des documents précis sur un pareil sujet. Je pourrais, par exemple, citer dans nos propres annales, une bataille moderne, une bataille gagnée, dont la relation officielle rend compte comme d'un événement prévu, préparé avec le calme, avec l'habileté la plus consommée, et qui, en réalité, se donna par l'élan spontané des soldats, sans aucun ordre du général en chef auquel l'honneur en est revenu, sans qu'il y fût, sans qu'il le sût.

Pour échapper au reproche banal d'incompétence, j'appellerai quelques hommes de guerre eux-mêmes au secours de la thèse philosophique que je soutiens. On verra combien ils furent appréciateurs enthousiastes, éclairés des travaux intellectuels; on verra que jamais, dans leur sentiment intime, les œuvres de l'esprit n'occupèrent le second rang. Obligé de me restreindre, j'essaierai de suppléer au nombre et à la nouveauté par l'éclat de la renommée : je citerai Alexandre, Pompée, César, Napoléon!

L'admiration du conquérant macédonien pour Homère est historique. Aristote, sur sa demande, prit le soin de revoir le texte de l'Iliade. Cet exemplaire corrigé devint son livre chéri, et lorsqu'au centre de l'Asie, parmi les dépouilles de Darius, un magnifique coffret enrichi d'or, de perles et de pierreries, paraissait exciter la convoitise de ses premiers lieutenants : « Qu'on me le réserve, » s'écria le vainqueur d'Arbelles; « j'y renfermerai mon Homère. C'est le meilleur « et le plus fidèle conseiller que j'aie en mes affaires militai-« res. Il est juste, d'ailleurs, que la plus riche production des « arts serve à conserver l'ouvrage le plus précieux de l'esprit « humain. »

Le sac de Thèbes avait déjà montré, plus clairement encore, le respect et l'admiration sans bornes d'Alexandre pour les lettres. Une seule famille de cette ville populeuse échappa à la mort et à l'esclavage : ce fut la famille de Pindare. Une seule maison resta debout au milieu des ruines des temples, des palais et des habitations particulières; ce fut la maison où Pindare naquit et non pas celle d'Épaminondas!

Lorsque après avoir terminé la guerre contre Mithridate, Pompée alla rendre visite au célèbre philosophe Possidonius, il défendit aux licteurs de frapper à la porte avec leurs baguettes, comme c'était l'usage. Ainsi, dit Pline, s'abaissèrent en face de l'humble demeure d'un savant, les faisceaux de celui qui avait vu l'Orient et l'Occident prosternés devant lui!

César, que les lettres pourraient aussi revendiquer, laisse apercevoir clairement en vingt endroits des immortels Commentaires, quel ordre occupaient dans sa propre estime les divers genres de facultés dont la nature l'avait si libéralement doté. Comme il est bref, comme il est rapide, quand il raconte des combats, des batailles! Voyez, au contraire, s'il croit aucun détail superflu dans la description du pont improvisé sur lequel son armée traversa le Rhin. C'est qu'ici le succès dépendait uniquement de la conception, et que la conception lui appartenait tout entière. On l'a déjà remarqué aussi, la part que César s'attribue de préférence dans les événements de guerre, celle dont il semble le plus fier est une influence morale. *César harangua son armée,* est presque toujours la première phrase de la description des batailles gagnées. *César n'était pas arrivé assez tôt pour parler à ses soldats, pour les exhorter à se bien conduire,* est l'accompagnement habituel du récit d'une surprise ou d'une déroute momentanée. Le général prend constamment à tâche de s'effacer devant l'orateur, et *de vray,* dit le judicieux Montaigne, *sa langue lui a faict en plusieurs lieux de bien notables services!*

Maintenant, sans transition, sans même insister sur cette exclamation connue du grand Frédéric : « *J'aimerais mieux* « *avoir écrit le siècle de Louis XIV de Voltaire, qu'avoir* « *gagné cent batailles,* » j'arrive à Napoléon. Comme il faut se hâter, je ne rappellerai ni les proclamations célèbres, écrites à l'ombre des pyramides égyptiennes par *le membre de l'Institut* général en chef de l'armée de l'Orient; ni les traités de paix où des monuments d'art et de science étaient le prix de la rançon des peuples vaincus; ni la profonde estime que le général, devenu empereur, ne cessa d'accorder aux Lagrange, aux Laplace, aux Monge, aux Berthollet; ni les richesses, ni les honneurs dont il les combla. Une anecdote peu connue ira plus directement à mon but.

Tout le monde se rappelle les prix décennaux. Les quatre classes de l'Institut avaient tracé des analyses rapides des progrès des sciences, des lettres, des arts. Les présidents et les secrétaires devaient être successivement appelés à les lire à Napoléon, devant les grands dignitaires de l'empire et le conseil d'État.

Le 27 février 1808, le tour de l'Académie française arrive. Comme on peut le deviner, l'assemblée ce jour-là est plus nombreuse encore que d'habitude : qui ne se croit juge très-compétent en matière de goût? Chénier porte la parole. On l'écoute avec un religieux silence, mais tout à coup l'empereur l'interrompt, et la main sur le cœur, le corps penché, la voix altérée par une émotion visible : « C'est trop, c'est « trop, messieurs, » s'écria-t-il, « vous me comblez; les « termes me manquent pour vous témoigner ma reconnais- « sance! »

Je laisse à deviner la profonde surprise de tant de courtisans témoins de cette scène, eux qui d'adulation en adulation étaient arrivés à dire à leur maître et sans qu'il en parût étonné : « Quand Dieu eut créé Napoléon, il sentit le besoin « de se reposer! »

Mais quelles étaient enfin les paroles qui allèrent si juste, si directement au cœur de Napoléon? Ces paroles, les voici :

« Dans les camps où, loin des calamités de l'intérieur, la
« gloire nationale se conservait inaltérable, naquit une autre
« éloquence, inconnue jusqu'alors aux peuples modernes. Il
« faut même en convenir : quand nous lisons dans les écri-
« vains de l'antiquité les harangues des plus renommés capi-
« taines, nous sommes tentés souvent de n'y admirer que le
« génie des historiens. Ici le doute est impossible; les monu-
« ments existent : l'histoire n'a plus qu'à les rassembler.
« Elles partirent de l'armée d'Italie, ces belles proclamations
« où le vainqueur de Lodi et d'Arcole, en même temps qu'il
« créait un nouvel art de la guerre, créa l'éloquence mili-
« taire dont il restera le modèle. »

Le 28 février, le lendemain de la célèbre séance dont je viens de tracer le récit, le *Moniteur*, avec sa *fidélité reconnue*, publia une réponse de l'empereur au discours de Chénier. Elle était froide, compassée, insignifiante; elle avait enfin tous les caractères, d'autres diraient toutes les qualités d'un document officiel. Quant à l'incident que j'ai rappelé, il n'en était fait aucune mention; concession misérable aux opinions dominantes, à des susceptibilités d'état-major! Le maître du monde, pour me servir de l'expression de Pline, cédant un moment à sa pensée intime, n'en avait pas moins incliné ses faisceaux devant le titre littéraire qu'une académie lui décernait.

Ces réflexions sur le mérite comparatif des hommes d'étude et des hommes d'épée, quoiqu'elles m'aient été principalement suggérées par ce qui se dit, par ce qui se passe sous nos yeux, ne seraient pas sans application dans la patrie de Watt. Je parcourais, naguère, l'Angleterre et l'Écosse. La bienveillance dont j'étais l'objet, autorisait de ma part jusqu'à ces questions sèches, incisives, directes, que, dans toute autre circonstance, aurait pu seulement se permettre un président de commission d'enquête. Déjà vivement préoccupé de l'obligation où je serais à mon retour, de porter un jugement sur l'illustre mécanicien; déjà fort inquiet de tout ce qu'a de solennel la réunion devant laquelle je parle, j'avais préparé cette demande : « Que pensez-vous de l'influence « que Watt a exercée sur la richesse, sur la puissance, sur « la prospérité de l'Angleterre? » Je n'exagère pas en disant que j'ai adressé ma question à plus de cent personnes appartenant à toutes les classes de la société, à toutes les nuances d'opinions politiques, depuis les radicaux les plus vifs, jusqu'aux conservateurs les plus obstinés. La réponse a été constamment la même : chacun plaçait les services de notre confrère au-dessus de toute comparaison; chacun, au surplus, me citait les discours prononcés dans le *meeting* où la statue de Westminster fut votée, comme l'expression fidèle et unanime des sentiments de la nation anglaise. Ces discours, que disent-ils?

Lord Liverpool, premier ministre de la couronne, appelle Watt « un des hommes les plus extraordinaires auxquels « l'Angleterre ait donné naissance, un des plus grands bien- « faiteurs du genre humain. » Il déclare que « ses inventions « ont augmenté d'une manière incalculable les ressources de « son pays et même celles du monde entier. » Envisageant ensuite la question du côté politique : « J'ai vécu dans un

« temps, » ajoute-t-il, « où le succès d'une campagne, où le « succès d'une guerre dépendait de la possibilité de pousser, « sans retard, nos escadres hors du port; des vents contrai- « res régnaient pendant des mois entiers, et anéantissaient de « fond en comble les vues du gouvernement. Grâce à la ma- « chine à vapeur, de semblables difficultés ont à jamais « disparu. »

« Portez, portez vos regards, » s'écrie sir Humphry Davy, « sur la métropole de ce puissant empire, sur nos villes, sur « nos villages, sur nos arsenaux, sur nos manufactures; exa- « minez les cavités souterraines et les travaux exécutés à la « surface du globe; contemplez nos rivières, nos canaux, les « mers qui baignent nos côtes; partout vous trouverez l'em- « preinte des bienfaits éternels de ce grand homme. »

« Le génie que Watt a déployé dans ses admirables inven- « tions, » dit encore l'illustre président de la Société royale, « a plus contribué à montrer l'utilité pratique des sciences, « à agrandir la puissance de l'homme sur le monde matériel, « à multiplier et à répandre les commodités de la vie, que les « travaux d'aucun personnage des temps modernes. » Davy n'hésite pas, enfin, à placer Watt au-dessus d'Archimède!

Huskisson, ministre du commerce, se dépouillant un moment de la qualité d'Anglais, proclame, qu'envisagées dans leurs rapports avec le bonheur de l'espèce humaine tout entière, les inventions de Watt lui paraîtraient encore mériter *la plus haute admiration.* Il explique de quelle manière l'économie du travail, la multiplication indéfinie et le bon marché des produits industriels, contribuent à exciter et à répandre les lumières. « La machine à vapeur, dit-il, n'est

« donc pas seulement, dans les mains des hommes, l'instru-
« ment le plus puissant dont ils fassent usage pour changer
« la face du monde physique ; elle agit encore comme un le-
« vier moral, irrésistible, en poussant en avant la grande cause
« de la civilisation. »

De ce point de vue, Watt lui apparaît dans un rang distingué parmi les premiers bienfaiteurs de l'humanité. Comme Anglais, il n'hésite pas à dire que sans les créations de Watt, la nation britannique n'aurait pas pu suffire aux immenses dépenses de ses dernières guerres contre la France.

La même idée se retrouve dans le discours d'un autre membre du parlement, dans celui de sir James Mackintosh. Voyez si elle y est exprimée en termes moins positifs :

« Ce sont les inventions de Watt qui ont permis à l'Angle-
« terre de soutenir le plus rude, le plus dangereux conflit
« dans lequel elle ait jamais été engagée. » Tout considéré, Mackintosh déclare, sans hésiter, « qu'aucun personnage n'a
« eu de droits plus évidents que Watt aux hommages de son
« pays, à la vénération, au respect des générations futures. »

Voici des évaluations numériques, des chiffres, plus éloquents encore, ce me semble, que les divers passages dont je viens de donner lecture :

Boulton fils annonce, qu'à la date de 1819, la seule manufacture de Soho avait déjà fabriqué des machines de Watt dont le travail habituel aurait exigé cent mille chevaux ; que l'économie résultant de la substitution de ces machines à la force des animaux, montait annuellement à 75 millions de francs. Pour l'Angleterre et l'Écosse, à la même date, le nombre des machines dépassait 10000. Elles faisaient le travail de 500000 chevaux ou de 3 ou 4 millions d'hommes, avec une économie annuelle de 3 ou 4 cents millions de francs. Ces résultats, aujourd'hui, devraient être plus que doublés.

Voilà, en abrégé, ce que pensaient, ce que disaient de Watt, les ministres, les hommes d'État, les savants, les industriels les plus capables de l'apprécier. Messieurs, ce créateur de 6 à 8 millions de travailleurs; de travailleurs infatigables et assidus parmi lesquels l'autorité n'aura jamais à réprimer ni coalition, ni émeute; de travailleurs à cinq centimes la journée; cet homme qui, par de brillantes inventions, donna à l'Angleterre les moyens de soutenir une lutte acharnée, pendant laquelle sa nationalité même fut mise en question; ce nouvel Archimède, ce bienfaiteur de l'humanité tout entière, dont les générations futures béniront éternellement la mémoire, qu'avait-on fait pour l'honorer de son vivant?

La pairie est, en Angleterre, la première des dignités, la première des récompenses. Vous devez naturellement supposer que Watt a été nommé pair.

On n'y a pas même pensé!

S'il faut parler net, tant pis pour la pairie que le nom de Watt eût honorée! Un pareil oubli, cependant, chez une nation aussi justement fière de ses grands hommes, avait droit de m'étonner. Quand j'en cherchais la cause, savez-vous ce qu'on me répondait? « Ces dignités dont vous parlez, sont réservées aux officiers de terre et de mer, aux orateurs influents de la chambre des communes, aux membres de la noblesse. *Ce n'est pas la mode* (je n'invente pas, je cite exactement); ce n'est pas la mode de les accorder à des savants, à des littérateurs, à des artistes, à des ingénieurs! » Je savais bien que ce n'était pas la mode sous la reine Anne, puisque Newton n'a pas été pair d'Angleterre. Mais, après un siècle et demi de progrès dans les sciences, dans la philosophie; lorsque chacun de nous, pendant la courte durée de sa vie, a vu tant de rois errants, délaissés, proscrits, remplacés sur leurs trônes par des soldats sans généalogie et fils de leur épée, ne m'était-il pas permis de croire qu'on avait renoncé à parquer les hommes; qu'on n'oserait plus, du moins, leur dire en face, comme le code inflexible des Pharaons : Quels que soient vos services, vos vertus, votre savoir, aucun de vous ne franchira les limites de sa caste; qu'une mode insensée, enfin (puisque mode il y a), ne déparerait plus les institutions d'un grand peuple!

Comptons sur l'avenir. Un temps viendra où la science de la destruction s'inclinera devant les arts de la paix; où le génie qui multiplie nos forces, qui crée de nouveaux produits, qui fait descendre l'aisance au milieu des masses, occupera dans l'estime générale des hommes, la place que la raison, que le bon sens lui assignent dès aujourd'hui.

Alors Watt comparaîtra devant le grand jury des populations des deux mondes. Chacun le verra, aidé de sa machine à vapeur, pénétrer en quelques semaines dans les entrailles de la terre, à des profondeurs où, avant lui, on ne serait arrivé qu'après un siècle des plus pénibles travaux; il y creusera de spacieuses galeries et les débarrassera, en quelques minutes, des immenses volumes d'eau qui les inondaient chaque jour; il arrachera à un sol vierge les inépuisables richesses minérales que la nature y a déposées.

Joignant la délicatesse à la puissance, Watt tordra avec un égal succès les immenses torons du câble colossal sur lequel se cramponne le vaisseau de ligne au milieu des mers courroucées, et les filaments microscopiques de ces tulles, de ces dentelles aériennes qui occupent toujours une si large place dans les parures variées qu'enfante la mode.

Quelques oscillations de la même machine rendront à la culture de vastes marécages; des contrées fertiles seront ainsi soustraites à l'action périodique et mortelle des miasmes qu'y développait la chaleur brûlante du soleil d'été.

Les grandes forces mécaniques qu'il fallait aller chercher dans les régions montagneuses, au pied des rapides cascades, grâce à la découverte de Watt, naîtront à volonté, sans gêne et sans encombrement, au milieu des villes, à tous les étages des maisons.

L'intensité de ces forces variera au gré du mécanicien ; elle ne dépendra pas, comme jadis, de la plus inconstante des causes naturelles : des météores atmosphériques.

Les diverses branches de chaque fabrication pourront être réunies dans une enceinte commune, sous un même toit.

Les produits industriels, en se perfectionnant, diminueront de prix.

La population, bien nourrie, bien vêtue, bien chauffée, augmentera avec rapidité ; elle ira couvrir d'élégantes habitations toutes les parties du territoire, celles même qu'on eût pu justement appeler les steppes d'Europe, et qu'une aridité séculaire semblait condamner à rester le domaine exclusif des bêtes fauves.

En peu d'années, des hameaux deviendront d'importantes cités; en peu d'années, des bourgs, tels que Birmingham, où l'on comptait à peine une trentaine de rues, prendront place parmi les villes les plus vastes, les plus belles, les plus riches d'un puissant royaume.

Installée sur les navires, la machine à vapeur remplacera au centuple les efforts des triples, des quadruples rangs de rameurs, à qui nos pères, cependant, demandaient un travail rangé parmi les châtiments des plus grands criminels.

A l'aide de quelques kilogrammes de charbon, l'homme vaincra les éléments; il se jouera du calme, des vents contraires, des tempêtes.

Les traversées deviendront beaucoup plus rapides; le moment de l'arrivée des paquebots pourra être prévu comme celui des voitures publiques; on n'ira plus sur le rivage, pendant des semaines, pendant des mois entiers, le cœur en proie à de cruelles angoisses, chercher d'un œil inquiet, aux limites de l'horizon, les traces incertaines du navire qui doit vous rendre un père, une mère, un frère, un ami.

La machine à vapeur, enfin, traînant à sa suite des milliers de voyageurs, courra, sur les chemins de fer, beaucoup plus vite que le meilleur cheval de race chargé seulement de son svelte jockey.

Voilà, Messieurs, l'esquisse fort abrégée des bienfaits qu'a légués au monde, la machine dont Papin avait déposé le germe dans ses ouvrages, et qu'après tant d'ingénieux efforts Watt a portée à une admirable perfection. La postérité ne les mettra certainement pas en balance avec des travaux, beaucoup trop vantés, et dont l'influence réelle, au tribunal de la raison, restera toujours circonscrite dans le cercle de quelques individus et d'un petit nombre d'années.

On disait, jadis, le siècle d'Auguste, le siècle de Louis XIV. Des esprits éminents ont déjà soutenu qu'il serait juste de dire le siècle de Voltaire, de Rousseau, de Montesquieu. Suivant moi, je n'hésite pas à l'annoncer, lorsqu'aux immenses services déjà rendus par la machine à vapeur se seront ajoutées toutes les merveilles qu'elle nous promet encore, les populations reconnaissantes parleront aussi des siècles de Papin et de Watt!

Une biographie de Watt destinée à faire partie de notre collection de mémoires, serait certainement incomplète si on n'y trouvait pas la liste des titres académiques dont l'illustre ingénieur fut revêtu. Cette liste, au surplus, occupera bien peu de lignes :

Watt devint :

Membre de la Société royale d'Édimbourg en 1784;

Membre de la Société royale de Londres en 1785;

Membre de la Société Batave en 1787;

Correspondant de l'Institut en 1808.

En 1814, l'Académie de sciences de l'Institut fit à Watt le plus grand honneur qui soit dans ses attributions : elle le nomma *un de ses huit* associés étrangers.

Par un vote spontané et unanime, le sénat de l'Université de Glasgow décerna à Watt, en 1806, le degré honoraire de docteur en droit.

Traduction d'une note historique de lord Brougham sur la découverte de la composition de l'eau.

Il n'y a aucun doute qu'en Angleterre, du moins, les recherches relatives à la composition de l'eau ont eu pour origine les expériences de Warltire relatées dans le 5^e^ vol. de Priestley (1). Cavendish les cite expressément comme lui ayant donné l'idée de son travail (*Trans. philos.*, 1784, p. 126). Les expériences de Warltire consistaient dans l'inflammation, à l'aide de l'étincelle électrique et en vases clos, d'un mélange d'oxygène et d'hydrogène. Deux choses, disait-on, en résultaient : 1° une perte sensible de poids; 2° la précipitation de quelque humidité sur les parois des vases.

Watt dit, par inadvertance, dans la note de la page 332 de son mémoire (*Trans. philos.*, 1784), que la précipitation aqueuse fut observée, pour la première fois, par Cavendish; mais Cavendish, lui-même, déclare, pag. 127, que Warltire avait aperçu le léger dépôt aqueux, et cite, à ce sujet, le 5^e^ vol. de Priestley. Cavendish ne put constater aucune perte de poids. Il remarque que les essais de Priestley *l'avaient conduit au même résultat* (2), et ajoute que l'humidité déposée ne contient aucune

---

(1) La lettre de Warltire, datée de Birmingham le 18 avril 1781, fut publiée par le docteur Priestley dans le 2^e^ vol. de ses *Experiments and observations relating to various branches of natural philosophy; with a continuation of the observations on air*, formant dans le fait le 5^e^ vol. des *Experiments and observations on different kinds of air*, imprimé à Birmingham en 1781. (*Note de M. Watt fils.*)

(2) La note de Cavendish, à la page 127, paraît impliquer que Priestley n'avait aperçu aucune perte de poids; mais je ne trouve cette assertion dans aucun des mémoires du chimiste de Birmingham.

Les premières expériences de Warltire sur la conflagration des gaz furent faites dans un globe de cuivre dont le poids était 14 onces et le volume 3 pintes. L'auteur voulait « décider si la chaleur est « ou n'est pas pesante. »

Warltire décrit d'abord les moyens de mélanger les gaz et d'ajuster la balance; il dit ensuite : « J'équilibrais toujours exactement le vase rempli d'air commun, afin que la différence de poids, à la « suite de l'introduction de l'air inflammable, me permît de juger si le mélange avait été opéré dans les « proportions voulues. Le passage de l'étincelle électrique rendait le globe chaud. Après qu'il s'était « refroidi par son exposition à l'air de la chambre, je le suspendais de nouveau à la balance. Je trouimpureté (littéralement, aucune parcelle de suie ou de matière noire, *any sooty matter*). Après un grand nombre d'essais, Cavendish reconnut que si on allume un mélange d'air commun et d'air inflammable, formé de 1000 mesures du premier et de 423 du second, « un cinquième environ « de l'air commun et à peu près la totalité de l'air inflammable perdent « leur élasticité, et *forment en se condensant* la rosée qui couvre le « verre...... En examinant la rosée, Cavendish trouva que cette rosée est « de l'eau pure...... Il en conclut que presque tout l'air inflammable et « environ un sixième de l'air commun deviennent de l'eau pure (*are « turned into pure Water*). »

Cavendish brûla de la même manière un mélange d'air inflammable et d'air déphlogistiqué (d'hydrogène et d'oxygène); le liquide précipité fut toujours plus ou moins acide, suivant que le gaz brûlé avec l'air inflammable contenait plus ou moins de phlogistique. Cet acide engendré était de l'acide nitrique.

M. Cavendish établit que : « presque la totalité de l'air inflammable et « de l'air déphlogistiqué *est convertie en eau pure*; » et encore, « que si « ces airs pouvaient être obtenus dans un état complet de pureté, la « totalité serait *condensée*. » Si l'air commun et l'air inflammable ne

---

« vais toujours une perte de poids, mais il y avait des différences d'une expérience à l'autre. En « moyenne la perte fut de deux grains. »

Warltire continue ainsi : « J'ai enflammé mes airs dans des vases de verre, depuis que je vous l'ai vu « faire récemment vous-même (Priestley), et j'ai observé COMME VOUS (*as you did*) que bien que « le vase fût net et sec avant l'explosion, il était après *couvert de rosée* et d'une substance noire « (*sooty substance*). »

En balançant tous les droits, le mérite d'avoir aperçu la rosée n'appartient-il pas à Priestley ?

Dans les quelques remarques dont Priestley a fait suivre la lettre de son correspondant, il confirme *la perte de poids*, et ajoute : « Je ne pense pas, cependant, que l'opinion si hardie que la chaleur « latente des corps entre pour une part sensible dans leur poids, puisse être admise sans des expériences « faites sur une plus grande échelle. Si cela se confirme, ce sera un fait très-remarquable et qui fera « le plus grand honneur à la sagacité de Warltire.

« Il faut dire encore, continue Priestley, qu'au moment où il (Warltire) vit la rosée à la surface « intérieure du vase de verre fermé, il dit que cela confirmait une opinion qu'il avait depuis longtemps : « l'opinion que l'air commun abandonne son humidité quand il est phlogistiqué. »

Il est donc évident que Warltire expliquait la rosée par la simple précipitation mécanique de l'eau hygrométrique contenue dans l'air commun. (*Note de M. Watt fils.*)

donnent pas d'acide quand on les brûle, c'est, suivant l'auteur, parce qu'alors la chaleur n'est pas intense.

Cavendish déclare que ses expériences, à l'exception de ce qui est relatif à l'acide, furent faites dans l'été de 1781, et que Priestley en eut connaissance. Il ajoute : « Un de mes amis en dit quelque chose (*gave* « *some account*) à Lavoisier, le printemps dernier (le printemps de 1783), « aussi bien que de la conclusion que j'en avais tirée, savoir, que l'air « déphlogistiqué est de l'eau privée de phlogistique. Mais à cette époque, « Lavoisier était tellement éloigné de penser qu'une semblable opinion « fût légitime, que jusqu'au moment où il se décida à répéter lui-même « les expériences, il trouvait quelque difficulté à croire que la presque « totalité des deux airs pût être convertie en eau. »

L'ami cité dans le passage précédent, était le docteur, devenu ensuite sir Charles Blagden. C'est une circonstance remarquable que ce passage du travail de Cavendish semble n'avoir pas fait partie du mémoire original présenté à la Société royale. Le mémoire paraît écrit de la main de l'auteur lui-même; mais les paragraphes 134 et 135 n'y étaient pas primitivement; ils sont ajoutés avec une indication de la place qu'ils doivent occuper; l'écriture n'est plus celle de Cavendish; ces additions sont de la main de Blagden. Celui-ci dut donner tous les détails relatifs à Lavoisier, avec lequel on ne dit pas que Cavendish entretînt quelque correspondance directe.

La date de la lecture du mémoire de Cavendish est le 15 janvier 1784. Le vol. des *Transactions philosophiques* dont ce mémoire fait partie ne parut qu'environ six mois après.

Le mémoire de Lavoisier (vol. de l'Académie des sciences pour 1781) avait été lu en novembre et décembre 1783. On y fit ensuite diverses additions. La publication eut lieu en 1784.

Ce mémoire contenait la relation des expériences du mois de juin 1783, auxquelles Lavoisier annonce que Blagden fut présent. Lavoisier ajoute que ce physicien anglais lui apprit : « que déjà Cavendish ayant brûlé « de l'air inflammable en vases clos, avait obtenu une quantité d'eau « très-sensible ; » mais il ne dit nulle part que Blagden fit mention de conclusions tirées par Cavendish de ces mêmes expériences.

Lavoisier déclare de la manière la plus expresse, que le poids de l'eau était égal à celui des deux gaz brûlés, à moins que, contrairement à sa propre opinion, on n'attribue un poids sensible à la chaleur et à la lumière qui se dégagent dans l'expérience.

Ce récit est en désaccord avec celui de Blagden qui, suivant toute probabilité, fut écrit comme une réfutation du récit de Lavoisier, après la lecture du mémoire de Cavendish et lorsque le volume de l'Académie des sciences n'était pas encore parvenu en Angleterre. Ce volume parut en 1784, et, certainement, il n'avait pu arriver à Londres, ni lorsque Cavendish lut son travail à la Société royale, ni à plus forte raison quand il le rédigea. On doit, en outre, remarquer que, dans le passage du manuscrit du mémoire de Cavendish, écrit de la main de Blagden, il n'est question que d'une seule communication des expériences : d'une communication à Priestley. Les expériences, y est-il dit, sont de 1781; mais on ne rapporte aucunement la date de la communication. On ne nous apprend pas davantage, si les conclusions tirées de ces expériences, et qui, d'après Blagden, furent communiquées par lui à Lavoisier pendant l'été de 1783, étaient également comprises dans la communication faite à Priesley. Ce chimiste, dans son mémoire rédigé avant le mois d'avril 1783, lu en juin de la même année, et cité par Cavendish, ne dit rien de la théorie de ce dernier, quoiqu'il cite ses expériences.

Plusieurs propositions découlent de ce qui précède : 1° Cavendish, dans le mémoire qui fut lu à la Société royale le 15 janvier 1784, décrit l'expérience capitale de l'inflammation de l'oxygène et de l'hydrogène en vaisseaux clos, et cite l'eau comme produit de cette combustion;

2° Dans le même mémoire, Cavendish tire de ses expériences la conséquence que les deux gaz mentionnés se transforment en eau;

3° Dans une addition de Blagden, faite avec le consentement de Cavendish, on donne aux expériences de ce dernier la date de l'été de 1781; on cite une communication à Priestley, sans en préciser l'époque, sans parler de conclusions, sans même dire quand ces conclusions se présentèrent à l'esprit de Cavendish. Ceci doit être regardé comme une très-grosse omission (*a most material omission*);

4° Dans une des additions faites au mémoire par Blagden, la conclusion de Cavendish est rapportée en ces termes : Le gaz oxygène est de l'eau privée de phlogistique. Cette addition est postérieure à l'arrivée du mémoire de Lavoisier en Angleterre.

On peut observer de plus que dans une autre addition au mémoire de Cavendish, écrite de la main de ce chimiste, et qui est certainement postérieure à l'arrivée en Angleterre du mémoire de Lavoisier, Cavendish établit distinctement pour la première fois, comme dans l'hypothèse de Lavoisier, que l'eau est un composé d'oxygène et d'hydrogène. Peut-être ne trouvera-t-on pas une différence essentielle entre cette conclusion et celle à laquelle Cavendish s'était d'abord arrêté, que le gaz oxygène est de l'eau privée de phlogistique, car il suffira, pour les rendre identiques, de considérer le phlogistique comme de l'hydrogène; mais dire de l'eau, qu'elle se compose d'oxygène et d'hydrogène, c'est, certainement, s'arrêter à une conclusion plus nette et moins équivoque. J'ajoute que dans la partie originale de son mémoire, dans celle qui fut lue à la Société royale avant l'arrivée du mémoire de Lavoisier en Angleterre, Cavendish trouve plus juste de considérer l'air inflammable « comme de l'eau phlogistiquée, que comme du phlogistique pur » (p. 140).

Voyons maintenant quelle a été la part de Watt. Les dates joueront ici un rôle essentiel.

Il paraît que Watt écrivit au docteur Priestley, le 26 avril 1783, une lettre dans laquelle il dissertait sur l'expérience de l'inflammation des deux gaz en vaisseaux clos, et qu'il y arrivait à la conclusion que « l'eau « est composée d'air déphlogistiqué et de phlogistique, privés l'un et « l'autre d'une partie de leur chaleur latente (1). »

Priestley déposa la lettre dans les mains de sir Joseph Banks, avec la prière d'en faire donner lecture à une des plus prochaines séances de la

---

(1) Nous pouvons en toute assurance déduire de la correspondance inédite de Watt, qu'il avait déjà formé sa théorie sur la composition de l'eau, en décembre 1782, et probablement plus tôt. Au surplus, dans son mémoire du 21 avril 1783, Priestley déclare qu'avant ses propres expériences, Watt s'était attaché à l'idée que la vapeur d'eau pourrait être transformée en des gaz permanents (p. 416).

Watt lui-même, dans son mémoire (p. 335), déclare que depuis plusieurs années il avait adopté l'opinion que l'air était une modification de l'eau, et il fait connaître avec détail les expériences et les raisonnements sur lesquels cette opinion s'appuyait. (*Note de M. Watt fils.*)

société royale. Mais Watt désira ensuite qu'on différât cette lecture, afin de se donner le temps de voir comment sa théorie s'accorderait avec des expériences récentes de Priestley. En définitive, la lettre ne fut lue qu'en avril 1784 (1). Cette lettre, Watt la fondit dans un mémoire adressé à Deluc, en date du 26 novembre 1783 (2). Beaucoup de nouvelles observations, de nouveaux raisonnements figuraient dans le mémoire; mais la presque totalité de la lettre originale y était conservée, et dans l'impression on la distingua des additions par des guillemets retournés. Dans la partie ainsi guillemetée, se trouve l'importante conclusion citée ci-dessus. On lit aussi que la lettre fut communiquée à plusieurs membres de la Société royale, lorsqu'en avril 1783 elle parvint au docteur Priestley.

Dans le mémoire de Cavendish tel qu'il fut d'abord lu, il n'y avait aucune allusion à la théorie de Watt; mais une addition, postérieure à la lecture des lettres de ce dernier et écrite en entier de la main de Cavendish, mentionne cette théorie (*Trans. philos.*, 1784, p. 140). Cavendish expose dans cette addition les raisons qu'il croit avoir pour ne pas compliquer ses conclusions, comme Watt le faisait, de considérations relatives au dégagement de chaleur latente; mais elle laisse dans le doute sur la question de savoir si l'auteur eut jamais connaissance de la lettre à Priestley d'avril 1783, ou s'il vit seulement la lettre datée du 26 novembre 1783 et lue le 29 avril 1784; sur quoi il importe de remarquer que les deux lettres parurent dans les *Trans. philos.* réunies en une seule. La lettre à Priestley du 26 avril 1783 resta quelque temps (deux mois d'après le mémoire de Watt) dans les mains de sir Joseph Banks et d'autres membres de la Société royale, pendant le printemps de 1783. C'est ce qui résulte des circonstances que relate la note

(1) La lettre à Priestley fut lue le 22 avril 1784.

(2) Sans le moindre doute le physicien genevois, alors à Londres, le reçut à cette époque. Il resta dans ses mains jusqu'au moment où Watt entendit parler de la lecture à la Société royale du mémoire de Cavendish. Dès ce moment mon père fit toutes les diligences nécessaires pour que le mémoire adressé à Deluc et la lettre du 26 avril 1783 adressée au docteur Priestley fussent immédiatement lus à la Société royale. Cette lecture, réclamée par Watt, du mémoire adressé à Deluc, est du 29 avril 1784. (*Note de M. Watt fils.*)

de la page 330. Il semble difficile de supposer que Blagden, secrétaire de la Société, ne vit pas le mémoire. Sir Joseph Banks dut le lui remettre, puisqu'il l'avait destiné à être lu en séance (*Trans. philos.*, 1784, p. 330, note). Ajoutons que puisque la lettre a été conservée aux archives de la Société royale, elle était sous la garde de Blagden, secrétaire. Serait-il possible de supposer que la personne dont la main écrivit le remarquable passage, déjà cité, relatif à une communication, faite à Lavoisier en juin 1783, des conclusions de Cavendish, n'aurait pas dit au même Cavendish que Watt était arrivé à ces conclusions, au plus tard en avril 1783? Les conclusions sont identiques, avec la simple différence que Cavendish appelle air déphlogistiqué, de l'eau privée de son phlogistique, et que Watt dit que l'eau est un composé d'air déphlogistiqué et de phlogistique.

Nous devons remarquer qu'il y a dans la théorie de Watt, la même incertitude, le même vague que nous avons déjà trouvé dans celle de Cavendish, et qu'elle provient aussi de l'emploi du terme, non exactement défini, de phlogistique (1). Chez Cavendish on ne saurait décider si le phlogistique est tout simplement de l'air inflammable, ou si ce chimiste n'est pas plutôt enclin à considérer comme air inflammable, une combinaison d'eau et de phlogistique. Watt dit expressément, même dans son mémoire du 26 novembre 1783, et dans un passage qui ne fait pas partie de la lettre d'avril 1783, que l'air inflammable, suivant ses idées, contient une petite quantité d'eau et beaucoup de chaleur élémentaire.

Ces expressions, de la part de deux hommes aussi éminents, doivent être regardées comme la marque d'une certaine hésitation, touchant la composition de l'eau. Si Watt et Cavendish avaient eu l'idée précise que l'eau résulte de la réunion des deux gaz privés de leur chaleur latente, de la réunion des bases de l'air inflammable et de l'air déphlo-

(1) Dans une note de son mémoire du 26 novembre 1783 (p. 331), on lit cette remarque de Watt : « Antérieurement aux expériences du docteur Priestley, Kirwan avait prouvé par d'ingénieuses déductions empruntées à d'autres faits, que l'air inflammable est, suivant toute probabilité, le vrai phlogistique sous une forme aérienne. Les arguments de Kirwan me semblent à moi parfaitement convaincants; mais il paraît plus convenable d'établir ce point de la question sur des expériences directes. »

gistiqué; si cette conception avait eu dans leur esprit autant de netteté que dans celui de Lavoisier, ils auraient certainement évité l'incertitude et l'obscurité que j'ai signalée (1).

En ce qui concerne Watt, voici les nouveaux faits que nous venons d'établir :

1° Il n'y a point de preuves que personne ait donné avant Watt et dans un document écrit, la théorie actuelle de la composition de l'eau.

2° Cette théorie, Watt l'établit pendant l'année 1783, en termes plus distincts que ne le fit Cavendish dans son mémoire de 1784. En faisant entrer le dégagement de chaleur latente en ligne de compte, Watt ajouta à la clarté de sa conception.

3° Il n'y a aucune preuve, il n'y a même aucune assertion de laquelle il résulte que la théorie de Cavendish (Blagden l'appelle la *conclusion*) ait été communiquée à Priestley avant l'époque où Watt consigna

---

(1) Au bas de la page 331 des Transactions, dans une partie de sa lettre d'*avril* 1783, imprimée en italiques, Watt dit : « Ne sommes-nous pas dès lors autorisés à conclure que l'eau est composée d'air « déphlogistiqué et de phlogistique, dépouillés d'une partie de leur chaleur latente ou élémentaire : « que l'air déphlogistiqué, ou l'air pur, est de l'eau privée de son phlogistique et unie à de la chaleur « ou à de la lumière élémentaire ; que la chaleur et la lumière y sont certainement contenus à l'état « latent, puisqu'elles n'affectent ni le thermomètre, ni l'œil ? Si la lumière est seulement une modifi- « cation de la chaleur, ou une particularité de son existence, ou une partie constituante de l'air in- « flammable, alors l'air pur ou déphlogistiqué est de l'eau privée de son phlogistique et unie à « de la chaleur élémentaire. »

Ce passage n'est-il pas aussi clair, aussi précis, aussi intelligible que les conclusions de Lavoisier ? (*Note de M. Watt fils.*)

L'obscurité que lord Brougham reproche aux conceptions théoriques de Watt et de Cavendish ne me semble pas réelle. En 1784, on savait préparer deux gaz permanents et très-dissemblables. Ces deux gaz, les uns les appelaient air pur et air inflammable ; d'autres, air déphlogistiqué et phlogistique ; d'autres, enfin, oxygène et hydrogène. Par la combinaison de l'air déphlogistiqué et du phlogistique, on engendra de l'eau ayant un poids égal à celui des deux gaz. L'eau, dès lors, ne fut plus un corps simple : elle se composa d'air déphlogistiqué et de phlogistique. Le chimiste qui tira cette conséquence, pouvait avoir de fausses idées sur la nature intime du phlogistique, sans que cela jetât aucune incertitude sur le mérite de sa première découverte. Aujourd'hui même a-t-on *mathématiquement démontré* que l'hydrogène (ou le phogistique) est un corps élémentaire ; qu'il n'est pas, comme Watt et Cavendish le crurent un moment, la combinaison d'un radical et d'un peu d'eau ? (*Note de M. Arago*).

ses idées dans la lettre du 26 avril 1783; à plus forte raison, rien ne peut faire supposer, surtout quand on a lu la lettre de Watt, que cet ingénieur ait jamais appris quelque chose de relatif à la composition de l'eau, soit de Priestley, soit de toute autre personne.

4° La théorie de Watt était connue des membres de la Société royale, plusieurs mois avant que les conclusions de Cavendish eussent été confiées au papier; huit mois avant la présentation du mémoire de ce chimiste à la même Société. Nous pouvons aller plus loin et déduire des faits et des dates sous nos yeux, que Watt parla le premier de la composition de l'eau; que si quelqu'un le précéda, il n'en existe aucune preuve.

5° Enfin, une répugnance à abandonner la doctrine du phlogistique, une sorte de timidité à se séparer d'une opinion depuis si longtemps établie, si profondément enracinée, empêcha Watt et Cavendish de faire complète justice à leur propre théorie (1), tandis que Lavoisier, qui avait rompu ces entraves, présenta le premier la nouvelle doctrine dans toute sa perfection.

Il serait très-possible que, sans rien savoir de leurs travaux respectifs, Watt, Cavendish, Lavoisier eussent, à peu près en même temps, fait le grand pas de conclure de l'expérience que l'eau est le produit de la combinaison des deux gaz si souvent cités. Telle est, en effet, avec plus ou moins de netteté, la conclusion que les trois savants présentèrent. Reste maintenant la déclaration de Blagden, d'après laquelle Lavoisier aurait eu communication de la théorie de Cavendish, même avant d'avoir fait son expérience capitale. Cette déclaration, Blagden l'inséra dans le mémoire même de Cavendish (2); elle parut dans les Transactions philo-

---

(1) On pouvait à peine s'attendre que Watt, écrivant et publiant pour la première fois, en butte aux soucis d'une fabrication immense et d'affaires commerciales également étendues, pourrait lutter avec la plume éloquente et exercée de Lavoisier; mais le résumé de sa théorie (voyez la page 331 du mémoire) me paraît à moi, qui, à vrai dire, ne suis peut-être pas un juge impartial, aussi lumineux et aussi remarquable par l'expression, que les conclusions de l'illustre chimiste français. (*Note de M. Watt fils.*)

(2) Une lettre au professeur Crell, dans laquelle Blagden donna une histoire détaillée de la découverte, parut dans les *Annalen* de 1786. Il est remarquable que dans cette lettre Blagden dit qu'il

sophiques, et il ne semble pas que Lavoisier l'ait jamais contredite, quelque inconciliable qu'elle fût avec son propre récit.

Malgré toute la susceptibilité jalouse de Blagden en faveur de la priorité de Cavendish, il n'y a pas eu de sa part une seule allusion de laquelle on puisse induire qu'avant de publier sa théorie, Watt avait entendu parler de celle de son compétiteur.

Nous ne serons pas aussi affirmatifs, relativement à la question de savoir si Cavendish avait quelque connaissance du travail de Watt avant de rédiger les conclusions de son propre mémoire. Pour soutenir que Cavendish n'ignorait pas les conclusions de Watt, on pourrait remarquer combien il serait improbable que Blagden et d'autres de qui ces conclusions étaient connues, ne lui en eussent jamais parlé. On pourrait encore dire que Blagden, même dans les parties du mémoire écrites de sa main et destinées à réclamer la priorité en faveur de Cavendish contre Lavoisier, n'affirme nulle part que la théorie de Cavendish fût conçue avant le mois d'avril 1783, quoique, dans une autre addition au mémoire original de son ami, il y ait une citation relative à la théorie de Watt.

Puisque la question de savoir à quelle époque Cavendish tira des conclusions de ses expériences, est enveloppée dans une grande obscurité, il ne sera pas sans utilité de rechercher quelles étaient les habitudes de ce chimiste quand il communiquait ses découvertes à la Société royale.

Un comité de cette Société, auquel Gilpin était associé, fit une série d'expériences sur la formation de l'acide nitrique. Ce comité, placé sous la direction de Cavendish, se proposait de convaincre ceux qui doutaient de la composition de l'acide en question, indiquée incidentellement dans le mémoire de janvier 1784, et ensuite, plus au long, dans un mémoire de juin 1785. Les expériences furent exécutées du 6 décembre 1787 au 19 mars 1788. La date de la lecture du mémoire de Cavendish

---

communiqua à Lavoisier les opinions de Cavendish *et de Watt*, et que ce dernier nom figure là pour la première fois dans le récit des confidences verbales du secrétaire de la Société royale. (*Note de M. Watt fils.*)

est le 17 avril 1788. La lecture et l'impression du mémoire suivirent donc, à moins d'un mois de distance, l'achèvement des expériences.

Kirwan présenta des objections contre le mémoire de Cavendish relatif à la composition de l'eau, le 5 février 1784. La date de la lecture de la réponse de Cavendish est : le 4 mars 1784.

Les expériences sur la densité de la terre embrassèrent l'intervalle du 5 août 1797 au 27 mai 1798. La date de la lecture du mémoire est le 27 juin 1798.

Dans le mémoire sur l'eudiomètre, les expériences citées sont de la dernière moitié de 1781, et le mémoire ne fut lu qu'en janvier 1783. Ici l'intervalle est plus grand que dans les précédentes communications. Mais d'après la nature du sujet il est probable que l'auteur se livra à de nouveaux essais en 1782.

Tout rend probable que Watt conçut sa théorie durant le peu de mois ou de semaines qui précédèrent le mois d'avril 1783. Il est certain que cette théorie il la considéra comme sa propriété, car il ne fit allusion à aucune communication analogue et anterieure; car il ne dit pas avoir entendu raconter que Cavendish fût arrivé aux mêmes conclusions.

On ne saurait croire que Blagden n'aurait pas entendu parler de la théorie de Cavendish avant la date de la lettre de Watt, si la théorie avait en effet précédé la lettre, et qu'il ne se serait pas empressé de signaler cette circonstance dans les additions qu'il fit au mémoire de son ami.

Il est bon, enfin, de remarquer que Watt s'en reposa entièrement sur Blagden, du soin de corriger les épreuves et de tout ce qui pouvait être relatif à l'impression de son mémoire. Cela résulte d'une lettre encore existante adressée à Blagden. Watt vit son mémoire seulement après qu'il eut été imprimé.

(Les notes de M. Watt fils faisaient partie du manuscrit qui m'a été remis par lord Brougham, et c'est sur la demande expresse de mon illustre confrère, que je les ai fait imprimer comme un utile commentaire de son travail). Ar.

IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT FRÈRES,
Imprimeurs de l'Institut, rue Jacob, n° 56.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

THÉORIE
DES EFFETS MÉCANIQUES
DE LA TURBINE FOURNEYRON;

Par M. PONCELET.

Lu dans la séance du lundi 30 juillet 1838.

L'Académie des sciences a accueilli, dans plusieurs de ses séances, avec un intérêt très-vif, la communication de divers résultats d'expériences sur les effets mécaniques de la turbine de M. Fourneyron, machine ingénieuse qui est venue se placer au rang des meilleures roues hydrauliques connues; de celles, surtout, qui doivent leur état actuel de perfection et leurs principales qualités au développement des idées mécaniques, et, plus spécialement, aux applications du principe des forces vives. On n'en doit pas moins être surpris de voir que la connaissance des propriétés essentielles de cette roue soit due presque exclusivement à l'expérience, et que la théorie en soit encore si peu avancée; car on ne peut considérer comme entièrement satisfaisante celle que l'auteur en a lui-même présentée dans l'un des *Bulletins de la Société d'Encouragement* pour l'année 1834, et l'on s'aperçoit, sans peine aussi, que les anciennes solutions de l'illustre Borda, malgré l'extension et les perfectionnements qu'elles ont acquis dans ces derniers temps, ne sauraient ici recevoir une application directe et certaine à cause de l'engorgement qui peut survenir dans les tuyaux d'évacuation de la roue, et de la réaction occasionnée par la présence de ces tuyaux, sur la masse liquide qui s'écoule incessamment par les orifices injecteurs du réservoir. Il résulte, en effet, de cette double circonstance dont on n'avait jusqu'ici tenu aucun compte dans la théorie des roues comprises sous l'expression générale de *turbines* (1), que, pour une ouverture de vanne déterminée, la dépense de liquide dépend forcément de la vitesse de rotation propre de la machine, et croît avec elle de manière à changer complétement l'appréciation des effets mécaniques.

D'après ces considérations, j'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt pour la science et les applications pratiques, de soumettre de nouveau la question au calcul, dont les résultats, grâce aux recherches récentes de M. Morin (2), peuvent être immédiatement contrôlés par ceux de l'expérience; et d'examiner plus particulièrement jusqu'à quel point les formules pouvaient rendre compte des singulières

---

(1) Lors de la lecture de ce passage à l'Académie, nous n'avions en vue que les formules analytiques à l'aide desquelles on représente ordinairement les effets utiles des roues hydrauliques, armées de canaux ou tuyaux que l'eau traverse avec une vitesse relative plus ou moins grande. Mais il est certain que M. d'Aubuisson, l'un des correspondants de l'Académie, a indiqué et parfaitement fait sentir, à la page 394 de son *Traité d'hydraulique*, dont la deuxième édition est maintenant sous presse, l'influence que peut avoir, sur la dépense de liquide et l'augmentation de la charge motrice, la force centrifuge dont se trouve animée l'eau qui circule dans la turbine Fourneyron. C'est une justice que nous nous plaisons à rendre à un savant dont les travaux et les recherches expérimentales sont dignes de toute notre estime.

(2) *Expériences sur les roues hydrauliques à axe vertical, appelées turbines.* Ce mémoire, qui vient d'être imprimé, a été l'objet d'un rapport favorable, lu à l'Académie des sciences, par M. Savary, dans la séance du 2 janvier 1838, au nom d'une commission qui était composée, en outre, de MM. de Prony, Arago et Gambey.

propriétés offertes par la turbine Fourneyron, qui marche avec un égal avantage, soit qu'elle se trouve noyée dans l'eau du bief inférieur, soit qu'elle se meuve librement dans l'air, et qui, entre des limites fort étendues, peut recevoir des vitesses angulaires très-différentes, sans que l'effet utile s'écarte notablement du maximum absolu, de celui qui est mesuré par le produit du poids du liquide effectivement écoulé dans chaque expérience, et de la différence correspondante des niveaux entre les deux biefs.

On avait déjà eu l'idée de faire marcher horizontalement une roue, ouverte vers l'intérieur et l'extérieur, armée d'aubes cylindriques comprises entre deux couronnes planes, parallèles et disposées perpendiculairement à l'axe de la machine, à peu près comme cela a lieu dans certaines roues verticales où l'eau est introduite par le fond du réservoir tangentiellement à leur circonférence extérieure; M. Burdin avait même imaginé quelques dispositifs de turbines qui offraient beaucoup d'analogie avec la machine qui nous occupe, et dont la description se trouve consignée dans un mémoire inédit, présenté à la *Société d'Encouragement* pour le concours de mai 1827; mais, outre que cette date est aussi à peu près celle de l'époque où M. Fourneyron a construit sa turbine d'essai à Pont-sur-l'Ognon, on doit encore reconnaître, avec le savant rapporteur du mémoire cité de M. Morin, que ce n'étaient là que des conceptions fort éloignées du but à atteindre, en elles-mêmes très-imparfaites, et qui, pour réussir lors de l'exécution effective, eussent exigé diverses modifications, divers perfectionnements très-importants, dans le système général des constructions.

La qualité essentielle de la turbine Fourneyron ne réside pas seulement dans la propriété qu'elle possède de marcher très-vite et de pouvoir être noyée dans l'eau du bief inférieur, sans trop d'inconvénients pour l'effet utile, car le dispositif des roues verticales à aubes courbes dont il a été parlé ci-dessus en est pourvu à un degré déjà assez prononcé, mais bien, redisons-le, dans cette heureuse idée de faire arriver l'eau horizontalement par tout le pourtour intérieur de la roue, et de la faire dégorger par la partie la plus étendue, par sa circonférence extérieure. Il en résulte effectivement que, dans la plupart de ses applications à l'industrie, cette roue permet, sous de très-petites dimensions, et par conséquent avec une faible dépense en argent et en force, un débit d'eau pour ainsi dire illimité, que l'écoulement s'y opère d'une manière facile, et, en quelque sorte, sans entraves; qu'enfin elle fonctionne avantageusement à peu près sous toutes les chutes et à toutes les vitesses, sans éprouver, de la part du poids de ses propres parties et de celui de l'eau qui la met en action, ce surcroît de résistance qui se fait sentir dans presque toutes les roues existantes, et se trouve accompagné d'inconvénients plus particulièrement fâcheux dans celles dont l'axe est vertical.

On sait, au surplus, avec quel art infini M. Fourneyron est parvenu à soustraire cette même turbine au défaut, d'abord si capital, du prompt usé des pivots, et comment aussi, à force d'études, de soins et de persévérance, il en a perfectionné les différentes parties de manière à constituer, de l'ensemble, un moteur puissant qui est en tous points comparable, pour l'élégance et la simplicité des dispositions, à cette admirable machine due à quarante années de travaux d'un homme de génie tel que Watt. D'une autre part, ne craignons pas de le déclarer, la vitesse excessive qu'il est nécessaire de laisser prendre à la turbine Fourneyron, lors des grandes chutes d'eau, loin d'être à nos yeux une qualité essentielle, et qu'on doive admirer, nous semble, au contraire, un grave défaut, toutes les fois qu'une pareille vitesse n'est pas immédiatement réclamée par les besoins de l'usine, et qu'on se voit obligé de l'amoindrir par une transformation d'engrenages qui dépensent une portion plus ou moins grande de l'action motrice, et dont il convient toujours de tenir compte dans les projets d'établissement de la machine.

La théorie et les calculs qui se trouvent exposés dans la première partie de la note que nous avons l'honneur de soumettre à l'Académie, ont déjà été l'objet de deux leçons professées, par l'auteur, les 11 et 13 juillet dernier, à la Faculté des sciences de Paris. On y considère d'abord les équations relatives à l'écoulement du liquide, tant dans l'intérieur du réservoir de la roue, qu'au travers des orifices de circulation formés par ses aubes cylindriques. Dans ces équations, on tient compte, en même temps, soit de la perte de force vive qui a lieu à l'entrée du liquide dans le réservoir, soit de la différence qui peut exister entre les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de l'espace cylindrique compris entre la turbine et les orifices d'alimentation, soit enfin des pertes de force vive qui s'opèrent en vertu de la vitesse relative avec laquelle le liquide afflue dans les canaux de circulation de cette roue, et vient choquer leurs parois ou se mêler avec celui qui y est déjà contenu et qui possède généralement une vitesse différente de la sienne propre.

Ces mêmes équations conduisent immédiatement à des expressions très-simples de la vitesse, de la dépense de liquide, ainsi que de la pression déjà mentionnée ci-dessus et qu'on avait primitivement considérée comme l'une des inconnues du problème. Le numérateur de ces expressions contient uniquement les termes relatifs, soit à la différence des niveaux dans les deux biefs, soit à la vitesse angulaire de la roue, et dont l'un, je veux dire le premier, est spécialement dû à l'action de la gravité, et l'autre, à celle de la force centrifuge. Leur dénominateur ne renferme, au contraire, que les seuls termes qui proviennent des différentes pertes de forces vives, et qui dépendent ainsi essentiellement de la constitution particulière de la machine et du réservoir, lequel est lui-même armé d'aubes, de surfaces cylindriques verticales, fixes, qui servent de directrices au liquide.

Quant à l'effet utile de cette machine, il est donné immédiatement par l'équation ordinaire des forces vives, dans laquelle on réunit, à la perte de travail relative à l'introduction de l'eau dans les canaux de la turbine, celle qui résulte de la vitesse absolue conservée par ce liquide à son arrivée dans l'espace extérieur. Mais, comme l'effet dont il s'agit dépend essentiellement de la masse du liquide qui s'écoule, dans chaque unité de temps, après que le régime uniforme se trouve établi, et que cette masse elle-même est une fonction implicite de la vitesse de la roue, il en résulte une expression radicale assez compliquée, qui se simplifie, néanmoins, quand on ne veut uniquement considérer que le rapport des effets, et rechercher la valeur de la vitesse angulaire qui le rend un maximum.

D'ailleurs, les aubes de la roue formant, avec sa circonférence intérieure, un angle sensiblement droit dans le système de construction adopté par M. Fourneyron, nous n'avons pas eu à nous occuper spécialement des conditions du maximum d'effet absolu, dont l'expression générale se complique beaucoup ici, et qui eussent conduit à trois équations du deuxième degré, assez difficiles à discuter; nous nous sommes borné à montrer, pour le dispositif particulier dont il s'agit, l'impossibilité de satisfaire à ces mêmes conditions, dont on approche, néanmoins, lors des fortes ouvertures de vanne et pour de très-petites valeurs attribuées aux angles formés par la veine liquide à son entrée et à sa sortie de la roue. Quoi qu'il en soit, la marche que nous avons suivie dans la recherche du maximum d'effet relatif à ce cas particulier, indique suffisamment celle qui devrait être adoptée pour l'établissement de la théorie de toutes les roues qui offrent plus ou moins d'analogie avec les turbines, et dont la difficulté réside principalement dans la détermination de la dépense de liquide ou de la vitesse d'affluence de ce liquide sur la machine.

Considérant donc spécialement le dispositif adopté par M. Fourneyron, et appliquant les formules à un cas qui doit beaucoup se rapprocher de celui de la turbine de Mülbach, soumise à l'expérience par M. Morin, on trouve:

1° Que cette turbine, encore bien qu'elle ne soit pas, en général, susceptible de produire ce qu'on nomme le maximum d'effet absolu, offre néanmoins des résultats qui en approchent de très-près, en raison de l'excellente disposition de toutes les parties, à laquelle l'auteur s'est conformé dans l'application spéciale dont il s'agit; 2° que le rapport de l'effet utile au travail dépensé, de même que celui de la vitesse de la roue à celle qui est due à la chute virtuelle ou effective, sont entièrement indépendants de la hauteur de cette chute et de la quantité dont la turbine peut être noyée dans l'eau du bief inférieur; circonstances dont la dernière, on le sent bien, tient à ce qu'on n'a point eu égard, dans les calculs, aux pertes de force vive occasionnées par la résistance de cette eau; 3° enfin, que les valeurs du rapport des effets varient assez peu pour des vitesses angulaires qui s'écartent notablement, de part et d'autre, de celle qui donne le maximum d'effet relatif.

Ces diverses conséquences s'accordent parfaitement avec le résultat des expériences connues; mais ce qui nous paraît surtout mériter l'attention, c'est que les valeurs, attribuées, par le calcul, au rapport des effets, sont bien loin de décroître, pour les grandes vitesses de roue, aussi rapidement que l'indique le tableau des expériences déjà citées de M. Morin. Or, cette circonstance, jointe à ce que la diminution de l'effet utile relatif aux très-petites ouvertures de vanne, est aussi moins sensible dans les résultats déduits du calcul, offre une nouvelle preuve de la nécessité d'avoir égard à la résistance du liquide dans lequel la roue se trouve plongée, ainsi qu'à plusieurs autres circonstances dont nous n'avons point encore parlé. Du reste, le même accord se fait apercevoir dans la comparaison des dépenses théorique et effective, à cela près encore de l'influence perturbatrice qui peut être due aux circonstances dont il s'agit.

L'examen de ces particularités, omises dans l'établissement des précédentes formules, est l'objet de la dernière partie de cette note; on a cherché à y tenir compte, d'une manière approximative, non-seulement de la résistance que la turbine éprouve à se mouvoir dans l'eau du bief inférieur, mais aussi de l'influence qui peut être due au jeu annulaire ou vide laissé entre le réservoir et la couronne supérieure de la roue, ainsi qu'à la présence des diaphragmes ou couronnes intermédiaires quelquefois adoptées, par M. Fourneyron, dans l'établissement de cette roue. On conçoit, en effet, que, lors des mouvements très-rapides ou très-lents de celle-ci, la pression intérieure pouvant être plus petite ou plus grande que celle du fluide ambiant, il en résulte, dans le premier cas, une aspiration, et, dans le second, une expulsion qui altèrent les effets dynamiques de la machine et le mode d'écoulement de l'eau, avec d'autant plus d'énergie, que le jeu annulaire dont il s'agit est plus appréciable, que l'ouverture de la vanne est plus faible, et que la vitesse de la roue s'approche elle-même davantage de ses limites extrêmes.

D'un autre côté, il résultera de l'interposition de couronnes intermédiaires, que, lors des faibles ouvertures de vanne, le liquide compris dans les divisions supérieures, soumis uniquement à l'action de la force centrifuge, tendra à s'en échapper avec une vitesse qui croîtra avec celle de la roue, et qui produira un remous, un effluve continuels du dehors vers le dedans de cette roue, lesquels n'ont pas lieu pour la division inférieure où l'eau afflue, par hypothèse, directement et d'une manière constante.

L'analyse de ces différentes circonstances conduit à un nombre d'équations suffisant pour en déterminer complétement l'influence, tant sur la dépense de fluide que sur les effets de la machine; mais les résultats auxquels on arrive sont très-compliqués, et nous nous sommes borné, dans cette note, à indiquer la marche des calculs, qui ne pourraient s'effectuer que pour chaque cas spécial et par la méthode des approximations successives, à laquelle d'ailleurs on sera dis-

2.

pensé de recourir lorsqu'il ne s'agira que des effets de la turbine considérée dans son état normal, c'est-à-dire, pour des ouvertures de vanne et des vitesses appropriées à sa constitution primitive.

Les détails dans lesquels on vient d'entrer montrent, de plus, que la théorie et l'établissement des turbines sont en eux-mêmes très-délicats; que leur effet utile est susceptible de s'amoindrir, pour ainsi dire indéfiniment, par une mauvaise disposition de l'ensemble ou des parties, mais surtout par une fausse appréciation de la vitesse, de la dépense ou de l'ouverture qui convient aux orifices d'écoulement; qu'enfin l'excellence des résultats obtenus par M. Fourneyron est due autant à son intelligence de la véritable constitution de la machine, qu'à une longue pratique, à une longue expérience dirigée par les indications de la théorie.

Nommons spécialement pour le réservoir cylindrique de la turbine :

e, la hauteur effective des orifices d'écoulement;

a, la plus courte distance entre les *directrices* consécutives du liquide;

l, la distance entre les extrémités extérieures de ces directrices ;

α, l'angle aigu sous lequel les filets liquides, censés perpendiculaires à a, viennent rencontrer la circonférence intérieure de la roue, ce qui donne sensiblement $a = l \sin \alpha$;

U, la vitesse inconnue et moyenne avec laquelle ces filets franchissent les orifices dont l'aire individuelle est ae;

k, le coefficient de la contraction à la sortie de ces orifices, et qui ici doit être au moins 0,95 pour les petites valeurs de e;

μ, celui qui se rapporte à l'introduction de l'eau dans l'intérieur du réservoir, et qui peut descendre à 0,60 lorsque les parois de ce dernier ne sont pas convenablement évasées;

A, l'aire des sections horizontales du réservoir;

$O = nkae$, la somme des aires contractées, kae, des orifices de sortie, dont n représente le nombre;

$Q = OU$, le volume du liquide écoulé, dans chaque seconde, par ces orifices.

Soit pareillement pour la roue:

R' et R'', les rayons des circonférences extérieure et intérieure, dont le dernier est aussi, à très-peu près, celui du réservoir;

e', la hauteur du débouché naturel et invariable offert au liquide affluent, par les canaux de circulation des aubes, hauteur qui peut, néanmoins, se réduire à une fraction déterminée de la distance entre les couronnes extérieures de la roue, quand il existe un ou plusieurs diaphragmes intermédiaires;

a', la plus courte distance entre deux aubes consécutives;

l' et l'', leurs intervalles mesurés respectivement sur les circonférences extérieure et intérieure;

φ, l'angle aigu formé par le jet liquide avec la première de ces circonférences, de sorte qu'on a sensiblement $a' = l' \sin \varphi$;

$O' = n'k'a'e'$, la somme des aires contractées, $k'a'e'$, des orifices d'évacuation dont n' est le nombre;

ω, la vitesse angulaire ou à l'unité de distance de l'axe;

$v' = \omega R'$, $v'' = \omega R''$, les vitesses des circonférences extérieure et intérieure;

u et u', les vitesses relatives avec lesquelles le liquide est introduit dans l'intervalle compris entre les aubes voisines de la roue, et s'en échappe ensuite comme d'une espèce de canal ou ajutage conique;

β, l'angle formé par la vitesse u et la vitesse v'' prise en sens contraire.

Enfin, désignons généralement par :

h et h', les hauteurs du niveau de l'eau, dans les bassins supérieur et inférieur, au-dessus du centre des orifices d'écoulement;

$H = h - h'$, la chute totale ou utile;

P, la résistance et Pv l'effet, utiles, mesurés au point dont la distance à l'axe est R, et la vitesse $v = \omega R$;

p, la pression atmosphérique extérieure, par mètre carré;

p', celle qui a lieu dans l'espace compris entre le réservoir et la roue;

$\Pi = 1000^k$, la densité, le poids du mètre cube du liquide;

$g = 9^m,809$, la vitesse imprimée, par la pesanteur, au bout de la première unité de temps de la chute des corps;

$M = \frac{\Pi}{g} Q$, la masse de liquide qui s'écoule uniformément, dans l'unité de temps, par les orifices du réservoir ou ceux de la turbine.

Observant que la perte de force vive, par seconde, qui s'opère à l'entrée de l'eau dans le réservoir cylindrique d'alimentation de la roue, est, d'après les principes connus, mesurée par l'expression $MU^2\frac{O^2}{A^2}\left(\frac{1}{u}-1\right)^2$; négligeant, en général, la résistance, ici assez faible, des parois des vases ou différentes conduites, aussi bien que la force vive due à la vitesse d'affluence de l'eau dans le bassin supérieur, et qui est ordinairement très-petite par rapport à celle qui a lieu dans le réservoir même de la turbine; l'équation du mouvement permanent du liquide, depuis son entrée dans ce réservoir jusqu'à sa sortie par les orifices O, sera

$$MU^2\left[1+\frac{O^2}{A^2}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2\right]=2Mgh+2Mg\left(\frac{p}{\Pi}-\frac{p'}{\Pi}\right),$$

ou, en divisant par M, et posant pour abréger,

$$\frac{O^2}{A^2}\left(\frac{1}{\mu}-1\right)^2=K,\quad U^2(1+K)=2gh+2g\left(\frac{p}{\Pi}-\frac{p'}{\Pi}\right).$$

On aura ainsi pour déterminer la hauteur de pression dans l'espace compris entre le réservoir et la roue, quand U sera connu,

$$\frac{p'}{\Pi}-\frac{p}{\Pi}=h-\frac{U^2}{2g}(1+K).$$

Pour obtenir l'équation qui se rapporte au mouvement circulatoire de l'eau dans l'intérieur de la roue, on remarque d'abord que la vitesse relative u, avec laquelle cette eau tend, au premier instant, à s'introduire dans l'intervalle compris entre les aubes, est donnée par la relation

$$u^2=U^2+v''^2-2Uv''\cos\alpha=\frac{O'^2}{O^2}u'^2+v''^2-2\frac{O'}{O}v''\cos\alpha\,.\,u',$$

attendu qu'on a $Q = OU = O'u'$, et que U doit être la résultante de u et de v''.

Admettant ensuite, ce qui a effectivement lieu dans la turbine Fourneyron, que la direction des aubes est, sinon rigoureusement, du moins très-sensiblement perpendiculaire à la circonférence intérieure de la roue, on décomposera la vitesse relative u, en deux autres ; l'une $u \cos \beta$, dirigée dans le sens de cette circonférence, et qui donne lieu à une première perte de force vive mesurée par

$$Mu^2 \cos^2 \beta ;$$

l'autre $u \sin \beta$, dont l'excès sur la vitesse moyenne ou de régime que l'eau tend à prendre, dans les canaux de circulation de la roue, un peu au delà de leur entrée, donne lieu à une seconde perte de force vive, qu'on évaluera approximativement en observant que $k'a'e'u'$ étant la dépense qui se fait, en une seconde, par l'orifice d'évacuation de chacun de ces canaux, la vitesse moyenne dont il s'agit, a pour mesure, dans l'hypothèse du parallélisme des filets, et attendu que $e'l''$ peut être pris sensiblement pour l'aire de la section à l'entrée des canaux, et que l' et l'' sont proportionnels à R' et R'',

$$\frac{k'a'e'u'}{e'l''} = \frac{k'a'}{l'} \frac{R'}{R''} u' = k' \frac{R'}{R''} \sin \varphi . u' ;$$

le coefficient numérique k' pouvant servir, en même temps, à corriger l'erreur que l'on commet en supposant le parallélisme des filets établi dans la section $e'l''$, qui est évidemment trop forte, et φ représentant ici, redisons-le, non pas l'angle du dernier élément des aubes avec la circonférence extérieure de la roue, mais bien celui du filet moyen ou central de la veine sortante avec cette même circonférence.

La perte de vitesse à l'entrée et dans le sens de l'axe des canaux, aura donc pour expression

$$u \sin \beta - k' \frac{R'}{R''} \sin \varphi . u';$$

ce qui donne pour la perte correspondante de force vive, par seconde et sur le pourtour entier de la roue, l'expression

$$M \left(u \sin \beta - k' \frac{R'}{R''} \sin \varphi . u' \right)^2,$$

et, pour la perte de force vive totale à l'entrée de l'eau dans les canaux,

$$M \left[u^2 \cos^2 \beta + \left(u \sin \beta - k' \frac{R'}{R''} \sin \varphi . u' \right)^2 \right]$$
$$= M \left(u^2 + k'^2 \frac{R'^2}{R''^2} \sin^2 \varphi . u'^2 - 2k' \frac{R'}{R''} \sin \varphi . u \sin \beta . u' \right).$$

Mais, attendu que l'axe de ces canaux est ici supposé perpendiculaire à la circonférence intérieure de la roue (1) ou à la direction de v'', et que U est la résultante de v'' et de u, on a nécessairement

$$u \sin \beta = U \sin \alpha = \frac{O'}{O} \sin \alpha . u';$$

---

(1) S'il formait avec elle, du côté de la vitesse v'', un angle quelconque γ, l'expression de la perte de force vive deviendrait

$$M \left\{ u^2 + k'^2 \frac{R'^2}{R''^2} \frac{\sin^2 \varphi}{\sin^2 \gamma} u'^2 - 2 \left[\frac{O'}{O} \cos(\gamma - \alpha) u' - v'' \cos \gamma \right] k' \frac{R'}{R''} \frac{\sin \varphi}{\sin \gamma} u' \right\};$$

ce qui introduirait, dans les équations, un terme en u', qui les compliquerait un peu plus, et auquel il sera ainsi facile d'avoir égard dans la recherche des conditions relatives au maximum d'effet absolu.

ce qui donne pour la nouvelle expression simplifiée de la perte de force vive à l'entrée de la roue,

$$M\left(u^2 + k'^2\frac{R'^2}{R''^2}\sin^2\varphi . u'^2 - 2k'\frac{R'}{R''}\sin\varphi\frac{O'}{O}\sin\alpha . u'^2\right),$$

ou, en posant pour abréger,

$$k'\frac{R'}{R''}\sin\varphi = b,\quad \frac{O'}{O}\sin\alpha = c,\qquad M(u^2 + b^2u'^2 - 2bcu'^2).$$

D'après cela, l'équation du mouvement relatif dans l'intérieur de la roue, en ayant égard à l'action de la force centrifuge qui développe, par seconde, une quantité de travail mesurée par $\frac{1}{2}M(v'^2 - v''^2)$, sera

$$Mu'^2 = Mu^2 + M(v'^2 - v''^2) + 2gM\left(\frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}\right)$$
$$- 2gMh' - M(u^2 + b^2u'^2 - 2bcu'^2),$$

ou, en divisant par M, remplaçant $\frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}$ par sa valeur trouvée ci-dessus, et se rappelant que $h - h' = H$, $U = \frac{O'}{O}u'$,

$$u'^2 = v'^2 - v''^2 + 2gH - \left[(1 + K)\frac{O'^2}{O^2} + b^2 - 2bc\right]u'^2.$$

De là on tire pour déterminer la vitesse u', en posant de nouveau, afin d'abréger, le nombre

$$(1 + K)\frac{O'^2}{O^2} + b^2 - 2bc = i,\quad u' = \sqrt{\frac{2gH + v'^2 - v''^2}{1 + i}}$$
$$= \sqrt{\frac{2gH + \omega^2(R'^2 - R''^2)}{1 + i}},$$

et, partant, pour calculer la vitesse et la dépense de liquide à la sortie du réservoir cylindrique de la turbine,

$$U = \frac{O'}{O} u' = \frac{O'}{O} \sqrt{\frac{2gH + \omega^2 (R'^2 - R''^2)}{1 + i}},$$

$$Q = OU = O' \sqrt{\frac{2gH + \omega^2 (R'^2 - R''^2)}{1 + i}};$$

formules qui montrent que cette vitesse, cette dépense, peuvent surpasser celles qui seraient dues à la différence H, des niveaux, et qu'elles croissent, en général, avec la vitesse angulaire de la roue, conformément au résultat des récentes expériences de M. Morin, sur la turbine de Mülbach.

Mettant d'ailleurs la valeur de U, qui vient d'être trouvée, dans l'expression de $\frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}$, on aura

$$\frac{p'}{\Pi} - \frac{p}{\Pi} = h - \left(\frac{1 + K}{1 + i}\right) \frac{O'^2}{O^2} \left[H + \omega^2 \frac{(R'^2 - R''^2)}{2g}\right];$$

ce qui montre que la pression dans l'espace compris entre la roue et le réservoir, diminue rapidement à mesure que la vitesse angulaire ω augmente, et qu'elle peut même devenir inférieure à la pression du fluide dans lequel se meut la turbine, quand la condition

$$h - h' \text{ ou } H < \left(\frac{1 + K}{1 + i}\right) \frac{O'^2}{O^2} \left[H + \omega^2 \frac{(R'^2 - R''^2)}{2g}\right]$$

se trouve naturellement remplie.

Enfin, le principe des forces vives donnera également pour calculer l'effet utile ou la quantité de travail transmise à la roue, abstraction faite des résistances passives,

$$Pv = MgH - \tfrac{1}{2} M(u^2 + b^2 u'^2 - 2bcu'^2) - \tfrac{1}{2} M(u'^2 + v'^2 - 2v' \cos\varphi . u'),$$

attendu que $u'^2 + v'^2 - 2v' \cos\varphi . u'$, représente le carré de la vitesse absolue conservée par le liquide, à sa sortie de cette roue.

Mais il est à remarquer qu'ici les valeurs de M et de MgH, qui représentent la masse de liquide écoulée par seconde, et le travail moteur, l'effet absolu qui s'y rapporte, ne sont point indépendants de la vitesse angulaire ω de la roue, de sorte qu'il ne conviendrait pas non plus de supposer ces valeurs constantes, comme on le fait ordinairement dans la recherche du maximum d'effet; c'est pourquoi on se contentera de considérer simplement le maximum même du rapport de ces effets, lequel exprime l'avantage relatif de la roue, ou ce qu'on appelle quelquefois son *rendement*, dans la pratique.

Comme on a d'ailleurs

$$u^2 = \frac{O'^2}{O^2}u'^2 + v''^2 - 2v''\frac{O'}{O}\cos\alpha . u',$$

l'équation qui donne ce rapport sera, en divisant l'expression ci-dessus de Pv par MgH,

$$\frac{Pv}{MgH} = 1 - \frac{v''^2 + v''^2}{2gH} - \left(1 + \frac{O'^2}{O^2} + b^2 - 2bc\right)\frac{u'^2}{2gH}$$
$$+ 2\left(v'\cos\varphi + v''\frac{O'}{O}\cos\alpha\right)\frac{u'}{2gH}.$$

Observant, en outre, qu'on a

$$i = (1 + K)\frac{O'^2}{O^2} + b^2 - 2bc, \quad u'^2 = \frac{2gH + v'^2 - v''^2}{1 + i};$$

remplaçant v' et v'' par $\omega R'$ et $\omega R''$, il viendra, toutes réductions faites,

$$\frac{Pv}{MgH} = \frac{K}{1+i}\frac{O'^2}{O^2} + \left[\frac{K}{(1+i)}\frac{O'^2}{O^2}(R'^2 - R''^2) - 2R'^2\right]\frac{\omega^2}{2gH}$$
$$+ 2\frac{\left(R'\cos\varphi + R''\frac{O'}{O}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1+i}}\sqrt{\frac{\omega^2}{2gH} + (R'^2 - R''^2)\frac{\omega^4}{4g^2H^2}}.$$

Pour déduire de là les conditions du maximum d'effet, il faudra successivement faire varier, dans cette expression, les quantités qu'on veut considérer comme indéterminées dans l'établissement de la roue, en faisant attention que le nombre

$$i = (1+K)\frac{O'^2}{O^2} + b^2 - 2bc = (1+K)\frac{O'^2}{O^2} + \frac{R'^2}{R''^2}\sin^2\varphi$$
$$- 2\frac{O'}{O}\frac{R'}{R''}\sin\varphi\sin\alpha,$$

est lui-même fonction de quelques-unes d'entre elles.

En se bornant ici à ce qui concerne particulièrement la vitesse angulaire ω, ou plutôt le rapport de la vitesse $v = \omega R'$ à celle $\sqrt{2gH}$ qui est due à la chute disponible du cours d'eau, rapport qui entre seul dans l'expression de celui des effets, on posera de nouveau, afin d'abréger,

$$\frac{K}{1+i}\frac{O'^2}{O^2} = B,\quad 2 - \frac{K}{1+i}\frac{O'^2}{O^2}\left(1 - \frac{R''^2}{R'^2}\right) = C,\quad \frac{\cos\varphi + \frac{O'}{O}\frac{R''}{R'}\cos\alpha}{\sqrt{1+i}} = D,$$
$$1 - \frac{R''^2}{R'^2} = E,\qquad \frac{\omega^2 R'^2}{2gH} = x \qquad \text{ou}\quad v = \omega R' = \sqrt{2gHx},$$

quantités qui, dans le problème dont on s'occupe, sont toutes essentiellement positives.

L'expression du rapport des effets devenant ainsi, en général,

$$\frac{Pv}{MgH} = B - Cx + 2D\sqrt{x + Ex^2},$$

on trouvera, sans difficultés, pour la condition du maximum relatif de ce rapport

$$x \text{ ou } \frac{\omega^2 R'^2}{2gH} = -\frac{1}{2E} + \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{C^2}{C^2 - 4D^2E}};$$

et, pour la valeur même de ce maximum,

$$\frac{Pv}{MgH} = B + \frac{C}{2E} - \frac{1}{2E}\sqrt{C^2 - 4D^2E}.$$

Cette dernière expression ne contenant ni H, ni h' ou h, on voit que la turbine Fourneyron doit, entre certaines limites de vitesse et abstraction faite des résistances passives plus ou moins grandes qu'elle éprouve, fonctionner avec un égal avantage sous toutes les hauteurs de chute, et qu'elle soit ou non noyée dans l'eau du bief inférieur; propriétés qui sont confirmées, à l'avance, par le résultat des expériences connues.

La valeur du rapport $\frac{\omega R'}{\sqrt{2gH}}$, qui correspond au maximum d'effet relatif, fait voir, en outre, que ce rapport doit être sensiblement indépendant des circonstances dont il s'agit, et qu'il n'est, ainsi que le précédent, susceptible de varier qu'avec les proportions mêmes de la machine, l'inclinaison des courbes directrices du réservoir, celle des aubes de la roue et l'ouverture des orifices d'écoulement, conformément encore à ce qui est indiqué par l'expérience.

Dans le système de construction adopté par M. Fourneyron, l'aire variable O des orifices du réservoir est, tout au plus, le quart de celle A, de ses sections horizontales $\pi R''^2$, de sorte qu'on a aussi

$$K < \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \text{ ou } K < \frac{1}{36} = 0{,}0278,$$

en prenant pour μ sa plus petite valeur 0,6. Et, comme le nombre K est, en même temps, facteur de quantités assez petites dans les expressions de B et de C ci-dessus, on pourra l'y supposer entièrement nul, ce qui donnera plus simplement :

1° Pour l'expression générale du rapport variable des effets,

$$\frac{P v}{MgH} = -2x + 2\frac{\left(\cos\varphi + \frac{O'R''}{OR'}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1+i}}\sqrt{x + \left(1 - \frac{R''^2}{R'^2}\right)x^2};$$

2° Pour la valeur x qui correspond au maximum de ce rapport,

$$x = \frac{R'^2}{2(R'^2 - R''^2)}\left[-1 + \frac{R'^2}{\sqrt{R'^4 - \frac{\left(R'\cos\varphi + \frac{O'}{O}R''\cos\alpha\right)^2}{1+i}(R'^2 - R''^2)}}\right];$$

3° Enfin pour la valeur même de ce maximum,

$$\frac{P v}{MgH} = \frac{R'^2}{R'^2 - R''^2}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{\left(R'\cos\varphi + \frac{O'}{O}R''\cos\alpha\right)^2(R'^2 - R''^2)}{(1+i)R'^4}}\right].$$

L'examen de cette dernière expression fait voir que les autres conditions à remplir pour rendre l'établissement de la roue le plus avantageux possible, dans l'hypothèse $A > 40$, qui nous occupe, consiste à rendre elle-même un maximum la quantité

$$\frac{\left(R'\cos\varphi + \frac{O'}{O}R''\cos\alpha\right)^2(R'^2 - R''^2)}{(1+i)R'^4} = \frac{\left(\cos\varphi + \frac{O'R''}{O\,R'}\cos\alpha\right)^2\left(1 - \frac{R''^2}{R'^2}\right)}{1 + (1+K)\frac{O'^2}{O^2} + \frac{R'^2}{R''^2}\sin^2\varphi - 2\frac{O'R'}{OR''}\sin\varphi\sin\alpha}.$$

Posant, à cet effet,

$$\tan\alpha = y, \quad \tan\varphi = z, \quad \frac{R''}{R'} = m, \quad \frac{ke}{k'e'} = s,$$

et observant d'ailleurs qu'on a

$$\frac{O'}{O} = \frac{n'k'a'e'}{nkae} = \frac{k'e'n'l'\sin\varphi}{kenl\sin\alpha} = \frac{1}{s}\,\frac{R'\sin\varphi}{R''\sin\alpha},$$

l'expression dont il s'agit prendra la forme

$$\frac{m^2(1-m^2)(sy+z)^2}{m^2s^2(1+z^2)y^2+(1+K)(1+y^2)z^2+(s^2-2s)y^2z^2},$$

sous laquelle il est facile de reconnaître, d'après la limitation des valeurs que peuvent recevoir ici les nombres m, s et K : 1° que cette fraction demeurera toujours au-dessous de l'unité, de sorte que la valeur du rapport x, ou celle de la vitesse angulaire de la roue, ne saurait, non plus, devenir infinie par la condition du maximum d'effet, ainsi qu'il arrive pour les roues à réaction, à la classe desquelles, par conséquent, celle qui nous occupe ne saurait appartenir; 2° que cette même fonction approchera d'autant plus de son maximum, que le rapport s ou $\frac{ke}{k'e'}$ sera plus voisin de l'unité, et que K, y et z ou α et φ seront eux-mêmes plus près de *zéro ;* 3° qu'enfin, si cette condition de K, α et φ, nuls ou très-petits, était satisfaite, le rapport de $\frac{y}{z}=\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\varphi}$ devenant $\frac{1}{sm^2}$, la fraction ci-dessus se réduirait sensiblement à la quantité $1-m^4$; ce qui donnerait

$$\frac{Pv}{MgH}=\frac{R'^2}{R'^2-R''^2}(1-m^2)=1, \qquad x=\frac{1}{2m^2}=\frac{R'^2}{2R''^2},$$
$$\omega R'' \text{ ou } v''=\sqrt{gH}=0{,}7071\sqrt{2gH},$$

et indique que le maximum d'effet absolu serait atteint pour une vitesse de la circonférence intérieure de la roue, égale aux 0,7 environ de celle qui répond à la hauteur de la chute disponible H.

Dans la réalité, il est impossible de faire les angles α et φ nuls ou même très-petits, conditions dont la première tient uniquement d'ailleurs à ce qu'on a supposé ici les aubes perpendiculaires à la circonférence dont il s'agit; mais on conçoit, d'après la nature de la fonction ci-dessus, que sa valeur et celle de $\frac{Pv}{MgH}$ devront éprouver des variations assez faibles pour des valeurs de α et de φ qui s'écarteraient notablement de zéro; et c'est ce qui sera démontré par l'exemple suivant, dans lequel nous nous proposons d'étudier spécialement la marche suivie par les résultats numériques du calcul, afin de la comparer à celle qui est indiquée par les données immédiates de l'expérience.

Nous choisirons, à cet effet, l'un de ceux dont M. Morin s'est, dans son dernier mémoire, imprimé, sur les turbines, occupé avec le plus de soin, sans d'ailleurs faire connaître les éléments relatifs à la constitution particulière de la roue sur laquelle il a opéré, et qui eussent pu servir de base à l'établissement des calculs; circonstance d'autant plus fâcheuse, qu'elle nous empêche de donner à cette comparaison le degré de certitude et d'intérêt scientifique qu'elle eût pu comporter.

Si l'on admet que M. Fourneyron n'ait pas sensiblement modifié le système général de construction de sa roue, depuis l'époque de l'impression de son premier mémoire dans les *Bulletins de la Société d'encouragement*, pour l'année 1834 (p. 3, 49 et 85), on sera conduit, notamment pour la turbine de Mülbach, sur laquelle M. Morin a multiplié beaucoup les expériences, et qui, sous une hauteur de $0^m,33$, offre un diamètre d'environ 2^m, on sera conduit, disons-nous, à prendre, d'une manière qui laisse à la vérité un peu d'arbitraire,

$$R'=1^m,\ R''=0,7R'=0^m,7,\ \sin\alpha=0,5,\ \cos\alpha=0,866,\ \sin\varphi=0,4,\ \cos\varphi=0,9165.$$

De plus, nous supposerons les coefficients de contraction

k, k', relatifs aux orifices d'injection du réservoir et d'évacuation de la roue, sensiblement égaux entre eux et à l'unité; et, parmi les séries d'expériences entreprises par M. Morin, nous choisirons les deuxièmes des pages 36 et 46 du mémoire cité, pour lesquelles la valeur du rapport $\frac{e}{e'}$ des hauteurs de ces orifices ne devait pas, elle-même, différer beaucoup de l'unité, si, comme il y a lieu de le supposer encore, la roue dont il s'agit portait une couronne intermédiaire, et qu'on néglige l'influence qui peut être due à la présence de la division supérieure où l'eau ne devait pas être admise directement.

On aurait ainsi sensiblement, dans ces hypothèses,

$$\frac{O'}{O}=\frac{n'k'a'e'}{nkae}=\frac{R'\sin\varphi}{R''\sin\alpha}=1,143,\ (1+i)\frac{O^2}{O'^2}=1+K+\frac{O^2}{O'^2}-\sin^2\alpha=1,5434,$$

$$\frac{\cos\varphi+\frac{O'R''}{OR'}\cos\alpha}{\sqrt{1+i}}=1,1335,\quad 1-\frac{R''^2}{R'^2}=0,51;$$

ce qui donne :

1° Pour l'expression générale du rapport variable des effets de la turbine dans le cas particulier qui nous occupe,

$$\frac{Pv}{MgH}=-2x+2,3567\sqrt{x+0,51x^2};$$

2° Pour la valeur maximum de ce rapport,

$$\frac{Pv}{MgH}=0,8095;$$

3° Enfin pour la valeur correspondante du nombre x,

$$x=\frac{\omega^2R'^2}{2gH}=0,689;\ \text{d'où}\ \frac{\omega R'}{\sqrt{2gH}}=0,83.$$

En consultant la deuxième partie du tableau de la page 36 du mémoire cité de M. Morin, on verra que l'avant-dernier de ces résultats surpasse de $\frac{1}{7}$ environ, celui qu'il a déduit de ses propres expériences, dans lesquelles, d'ailleurs, on avait moyennement $H = 3^m,2$; ce qui donne, pour le nombre N des révolutions par minute de la roue, correspondant au maximum d'effet,

$$N = 9,55\omega = 9,95\sqrt{2gHx} = 62^t,8,$$

au lieu du nombre 59^t environ, fourni par le résultat de ces expériences. Quoiqu'une semblable différence n'ait point lieu ici de nous surprendre, nous ferons cependant remarquer qu'elle doit être principalement attribuée aux résistances passives dont on n'a tenu aucun compte.

Substituant maintenant dans l'expression générale ci-dessus au rapport des effets, une série de valeurs décroissantes de x, on formera le tableau suivant, dans lequel nous avons aussi inséré les valeurs de ce rapport qui se concluent, par interpolation, du résultat des expériences de M. Morin.

Valeurs attribuées au nombre x.	Nombre de tours de roue par minute.	Rapport des effets d'après le calcul.	Moyennes fournies par l'expérience.
0,0	0,00	0,000	» »
0,2	33,80	0,664	» »
0,4	47,85	0,773	0,700
0,6	58,61	0,807	0,705
0,7	62,81	0,810	0,700
0,8	67,67	0,806	0,675
1,0	75,66	0,786	0,610
1,2	82,88	0,753	0,490
1,4	89,52	0,712	0,360
1,6	95,70	0,664	0,280
1,8	101,51	0,612	0,203
2,0	107,00	0,546	0,050
3,72	145,00	0,000	» »

Les chiffres de ce tableau montrent, conformément encore aux résultats de l'expérience, que l'effet utile, qui ne saurait ici atteindre le maximum absolu, peut non-seulement s'en approcher de très-près, mais, de plus, qu'il n'éprouve que de très-faibles variations pour des vitesses qui s'écartent notablement de celle du maximum relatif.

Néanmoins, en consultant la dernière colonne de ce tableau, on verra que le rapport des effets y décroît, avec le nombre des révolutions de la roue, d'une manière beaucoup plus rapide que ne l'indiquent les résultats du calcul; et ceci tient encore, sans aucun doute, à la grande influence qu'acquièrent alors les résistances passives et autres causes de déperdition inhérentes au mouvement de la turbine, qui, pour le cas dont il s'agit, se trouvait noyée dans l'eau du bief inférieur.

Pour se convaincre encore plus de l'accord des formules et de l'expérience, il n'y a qu'à jeter les yeux sur le tableau de la page 34 du mémoire cité, qui concerne les ouvertures de vanne de $0^m,09$ de hauteur seulement : on y verra le rapport maximum des effets descendre au-dessous de 0,53. Or, il est aisé d'apercevoir encore que nos formules marchent dans le même sens, quoiqu'elles fournissent toujours, en raison des causes signalées, des nombres sensiblement supérieurs à ceux de l'expérience (1).

Enfin, M. Morin ayant aussi fait sur la turbine de Mülbach

(1) En supposant, en effet, le rapport $\frac{O'}{O}$ des orifices, réduit à la moiti de la valeur qu'on lui a attribuée ci-dessus, on trouve que le maximum de $\frac{Pv}{MgH}$ devient 0,59 environ, et le nombre de tours correspondant, 48; à peu près comme l'indique l'expérience.

une suite d'expériences fort intéressantes, dans la vue de constater l'influence de la force centrifuge sur la dépense qui se fait par les orifices du réservoir, et de découvrir la loi qui lie cette dépense à celle $O\sqrt{2gH}$, qui aurait lieu si la roue était enlevée, nous croyons utile d'en comparer également les résultats à ceux de nos formules, qui donnent pour l'expression du rapport des dépenses dont il s'agit,

$$\frac{O'u'}{O\sqrt{2gH}} = \frac{O'}{O}\sqrt{\frac{2gH + \omega^2(R'^2 - R''^2)}{2gH(1+i)}} = \sqrt{\frac{1 + \left(1 - \frac{R''^2}{R'^2}\right)x}{(1+i)\frac{O^2}{O'^2}}},$$

laquelle devient, dans le cas particulier qui nous occupe,

$$\sqrt{\frac{1 + 0,51x}{1,5434}},$$

formule où nous nous contenterons de substituer, pour x, les valeurs 0,2, 0,7, 1,8, et qui donne respectivement : pour

N = 33,84 révol. à la minute... $\frac{O'u'}{O\sqrt{2gH}} = 0,845$,
N = 62,80 .... $= 0,938$,
N = 101,51 .... $= 1,115$.

On peut voir encore par le tableau des pag. 46 et 47 du mémoire souvent cité, concernant l'orifice de $0^m,20$ d'ouverture, que ces résultats suivent la même marche que ceux de l'expérience; quoiqu'ils les surpassent généralement à nombre égal de révolutions de la roue. De plus, la formule qui les donne, montre qu'ils tendent sensiblement à décroître, avec la valeur du rapport $\frac{O}{O'}$ des orifices, ce qui ne paraîtrait pas avoir lieu, à beaucoup près, avec la même rapidité, d'après la comparaison des données fournies par les tableaux relatifs aux levées de vanne de $0^m,05$ et $0^m,27$, qui montrent, d'ailleurs, que le terme $\omega^2(R'^2 - R''^2)$, dû à la force centrifuge, exerce, en réalité, une influence bien moindre pour les petits que pour les grands orifices. Mais, je le répète, de pareilles différences n'ont rien qui doive surprendre, puisque, indépendamment des résistances passives auxquelles la turbine se trouve soumise quand elle est noyée dans l'eau du bief inférieur, le mouvement du liquide y éprouve diverses modifications dont on a négligé la considération dans ce qui précède, quoiqu'il ne soit nullement impossible d'y avoir égard dans l'établissement des formules.

En effet, nous avons jusqu'ici admis que l'intervalle compris entre le réservoir et la roue, ne communique avec le milieu ambiant que par les conduites formées par les aubes de cette roue. Dans le fait, cet intervalle est entièrement séparé du fluide extérieur par la couronne qui sert de fond à la turbine, et qui se prolonge jusqu'à son axe vertical, sans aucun jeu appréciable; mais il n'en est pas ainsi de la couronne supérieure, qui laisse entre elle et le réservoir un espace annulaire par lequel le fluide peut s'échapper ou être introduit, selon que la pression p' surpasse la pression extérieure $p + \Pi h'$, ou en est, au contraire, surpassée; circonstance qui altère nécessairement d'autant plus les effets, que la lame d'eau affluente a moins d'épaisseur, et que la vitesse angulaire est elle-même plus grande.

Nommant j la largeur horizontale du jeu dont il s'agit; $o = 2\varpi R''j$, l'aire du vide qu'il forme autour du réservoir cylindrique de la turbine; v, la vitesse avec laquelle le liquide tend, en général, à franchir ce vide, soit du dehors au dedans, s'il y a aspiration ou que la pression p' se trouve être inférieure à $p+\Pi h'$, soit du dedans vers le dehors, s'il y a refoulement ou que p' surpasse cette même pression. Enfin, désignant par $q=k_1 ow$, le volume, et par $m=\frac{\Pi}{g}k_1 ow$, la masse du liquide expulsé ou introduit pendant une seconde, au travers de o, dans le cas où la turbine est censée tourner sous l'eau du bief inférieur; k_1 représentant d'ailleurs le coefficient de contraction qui se rapporte à l'ouverture annulaire o, on aura :

1° Pour l'équation du mouvement au travers des orifices O du réservoir,

$$U^2(1+K)=2gh+2g\left(\frac{p}{\Pi}-\frac{p'}{\Pi}\right);$$

2° Pour celle qui se rapporte à l'écoulement par l'ouverture o : du dedans vers le dehors, ou si l'on a $p'>p+\Pi h'$,

$$w^2=2g\left(\frac{p'}{\Pi}-\frac{p}{\Pi}\right)-2gh',$$

du dehors au dedans, ou si l'on a, au contraire, $p'<p+\Pi h'$,

$$w^2=2gh'+2g\left(\frac{p}{\Pi}-\frac{p'}{\Pi}\right);$$

ce qui donne simplement, d'après l'équation ci-dessus,

$$\pm w^2=2gH-(1+K)U^2,$$

le signe négatif de w^2 correspondant à la seconde hypothèse qui est celle de l'aspiration;

3° Pour l'équation qui se rapporte au mouvement relatif dans l'intérieur des conduites de la roue, lesquelles donnent toujours lieu à une dépense de fluide $O'u'$, par seconde,

$$u'^2=v'^2-v''^2+2gH-(1+K)U^2-\frac{OU}{O'u'}\left(k'^2\frac{R'^2}{R''}\sin^2\varphi.u'^2\right.$$
$$\left.-2k'\frac{R'}{R''}\sin\varphi\sin\alpha.Uu'\right).$$

D'ailleurs on n'aura plus ici simplement la condition OU $= O'u'$, mais bien cette autre relation :

$$OU = O'u' \pm k_1 o w,$$

qui, avec les trois précédentes, suffira encore pour déterminer les vitesses d'écoulement U, u', w; les dépenses OU, $O'u'$, $k_1 o w$, ainsi que la pression inconnue p'; le signe inférieur de $k_1 o w$ se rapportant toujours au cas de l'aspiration. D'après cela, on n'éprouvera aucune difficulté à établir l'équation relative à l'effet utile de la roue, si l'on observe, comme on vient de le faire pour établir l'avant-dernière des équations ci-dessus : 1° qu'il n'y a pas lieu, dans le cas présent, à tenir compte de l'influence de la force vive mw^2, qui est entièrement perdue pour cet effet, puisque sa direction est perpendiculaire à celle du mouvement de la roue; 2° qu'on doit seulement avoir égard à l'accroissement ou à la diminution subis, selon les cas, par la dépense qui se fait au travers des orifices d'évacuation O′ de cette roue.

Toutefois, les résultats auxquels on sera ainsi conduit seront fort compliqués, puisqu'ils dépendront, en général, d'équations d'un degré élevé, et ne pourront être obtenus, dans chaque circonstance, que par la méthode des approximations successives.

Lorsque la turbine se trouve divisée, par un diaphragme, une couronne intermédiaire, en deux parties dont la plus basse a pour hauteur e', et que le fluide, animé de la vitesse U, afflue du réservoir sous une épaisseur e ou ke qui surpasse e', les choses restent à peu près dans l'état où on vient de les considérer; mais il n'en est plus ainsi lorsque l'inverse a lieu, et les équations relatives au mouvement du liquide comme celles qui se rapportent à l'effet utile même de la roue, doivent alors se partager en deux groupes distincts, ou plutôt on doit considérer séparément ce qui a lieu pour la capacité inférieure et pour la capacité supérieure où les circonstances du mouvement seront très-différentes, puisqu'il s'y fera généralement une aspiration, plus ou moins puissante, qui modifiera complétement la loi des effets.

Soient, pour cette même capacité, o_1, O'_1, p'_1, u'_1, m_1 et w_1 les quantités analogues à celles que nous avons précédemment désignées par o, O', p', u', m et w, et qui, désormais, seront relatives à la capacité inférieure où l'eau afflue d'une manière directe, on aura d'abord, pour remplacer l'équation en w^2, posée ci-dessus,

$$w^2 = 2g\left(\frac{p'}{\Pi} - \frac{p'_1}{\Pi}\right) \text{ ou } w^2 = 2gh - (1 + \text{K})\,\text{U}^2 + 2g\left(\frac{p}{\Pi} - \frac{p'_1}{\Pi}\right),$$

relation qui, à son tour, se rapporte au jeu de la couronne intermédiaire, et à laquelle il faudra joindre les trois suivantes :

$$w_1^2 = 2g\left(\frac{p}{\Pi} - \frac{p'_1}{\Pi}\right) + 2gh',\ u'^2_1 = v'^2 - v''^2 + 2g\left(\frac{p'_1}{\Pi} - \frac{p}{\Pi}\right) - 2gh',$$
$$\text{O}'_1 u'_1 = ow + o_1 w_1,$$

en ayant soin, en outre, de considérer comme perte, dans l'équation relative à l'effet utile de la roue, la force vive $(m + m_1)\,(u'^2_1 + v'^2 - 2u'_1 v' \cos\varphi)$, que possède la masse de liquide $m + m_1$, à sa sortie de la division supérieure de cette roue.

D'ailleurs la question, bien que plus compliquée, n'en sera pas moins susceptible d'une solution suffisamment approchée pour le but à remplir, et dont ce qui précède servira à donner au moins une idée, en montrant la nature des considérations sur lesquelles on doit l'appuyer.

Enfin si, dans la vue d'apprécier avec une plus rigoureuse exactitude encore, les effets de la machine, on voulait tenir compte de la résistance qu'elle éprouve à se mouvoir dans l'eau du bief inférieur, on remarquerait qu'il n'y a pas lieu de s'occuper ici de celle qui peut provenir du choc sur la convexité extérieure des aubes, puisque le fluide moteur les occupe en entier et déplace continuellement celui du milieu ambiant, mais qu'il est au contraire indispensable d'avoir égard à la résistance qui s'opère sur les faces extérieures et horizontales des couronnes. Or, on sait, d'après les ingénieuses expériences de Coulomb, que cette résistance peut être représentée, pour l'unité de surface, par une expression de la forme $a'v + b'v^2$; a' et b' étant des coefficients à déterminer par l'expérience, et $v = \omega R$ la vitesse du point de la couronne qui est située à la distance quelconque R, de l'axe de la roue. On aura conséquemment, et en observant que les surfaces frottantes sont au nombre de deux :

1° Pour la résistance totale,

$$2\varpi \frac{\Pi}{g} a'\omega \frac{(2R'^3 - R''^3)}{3} + 2\varpi \frac{\Pi}{g} b'\omega^2 \frac{(2R'^4 - R''^4)}{4};$$

2° Pour la perte de travail correspondante, par seconde,

$$2\varpi \frac{\Pi}{g} a'\omega^2 \frac{(2R'^4 - R''^4)}{4} + 2\varpi \frac{\Pi}{g} b'\omega^3 \frac{(2R'^5 - R''^5)}{5}.$$

Cette perte devant être introduite, parmi les autres, dans l'équation relative à l'effet utile de la roue, donnera lieu, pour les hypothèses qui nous ont d'abord occupé, et après avoir été divisée par MgH, à un terme soustractif de la forme

$$\frac{\frac{1}{2}\varpi\frac{\Pi}{g}a'(2R'^4-R''^4)\omega^2+\frac{2}{5}\varpi\frac{\Pi}{g}b'(2R'^5-R''^5)\omega^3}{\frac{\Pi}{g}O'gHu'}=\frac{5\varpi a'(2R'^4-R''^4)\omega^2+4\varpi b'(2R'^5-R''^5)\omega^3}{10.O'gH\sqrt{\frac{2gH+\omega^2(R'^2-R''^2)}{1+i}}},$$

qui compliquera beaucoup l'expression de cet effet, et dont on appréciera d'ailleurs l'influence avec une approximation suffisante, du moins dans le cas des grandes vitesses, en négligeant la partie qui a pour coefficient a', et qui devient alors très-petite vis-à-vis de l'autre, dont le facteur constant b' pourra être pris égal à 0,0036 environ, d'après les recherches de notre illustre confrère M. de Prony, sur les lois qui régissent le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux.

La perte proportionnelle ou relative de travail, occasionnée par la résistance du liquide dans lequel la roue est plongée, se réduira ainsi à l'expression

$$\frac{0{,}01131\,(2R'^5-R''^5)\,x^{\frac{3}{2}}}{OR'^3\sqrt{\frac{1+\left(1-\frac{R''^2}{R'^2}\right)x}{(1+i)\frac{O^2}{O'^2}}}},$$

dans laquelle on a substitué à ϖ et b' leurs valeurs 3,1416 et 0,0036, et remplacé $\frac{\omega R'}{\sqrt{2gH}}$ par $\sqrt{x}$.

En faisant l'application numérique de cette formule au cas déjà considéré de la turbine de Müllbach, on trouve que la perte dont il s'agit a pour valeurs respectives 0,121, à 101,5 tours de roue par minute, et 0,035, à la vitesse de 62,8 tours, qui correspond au maximum d'effet relatif. Ces résultats sont bien loin, comme on voit, de suffire pour rendre compte de la perte croissante d'effet éprouvée par la turbine Fourneyron, à mesure que sa vitesse augmente, et l'on en doit conclure que la principale cause de cette perte provient, non pas de la résistance même du liquide extérieur, mais bien des remous, des courants, occasionnés par la présence de la capacité de la roue, qui n'est pas soumise directement à l'action du fluide moteur.

MÉMOIRE

SUR

LA DIFFÉRENCE QU'OFFRENT LES TISSUS CELLULAIRES

DE

LA POMME ET DE LA POIRE;

SUR LA FORMATION

DES CONCRÉTIONS LIGNEUSES DE LA DERNIÈRE,
CELLE DES NOYAUX ET DU BOIS, COMPARÉES AUX CONCRÉTIONS CALCAIRES
QUI SE TROUVENT SOUS LE MANTEAU DES ARIONS (1),

ET A L'OSSIFICATION DES ANIMAUX EN GÉNÉRAL;

Lu à l'Académie des sciences, le 28 mai 1838.

PAR M. TURPIN.

PREMIÈRE PARTIE.

Tout en étant frappé des nombreuses ressemblances et de l'intime parenté qui lient si étroitement le Pommier et le

(1) Le genre *Arion*, formé par de Férussac avec quelques Limaces, comprend les espèces suivantes : *Arion Empyricorum*, *A. albus*, *A. subfuscus*, *A. melanocephalus*, *A. fuscatus* et *A. hortensis*.

Poirier, chacun de nous cependant les distingue aussi nettement que s'ils appartenaient à des familles végétales très-éloignées.

Tout le monde sait voir que le Poirier, comparé au Pommier, est plus mâle, plus vigoureux; que sa taille est plus grande, sa forme pyramidale et altière; que ses feuilles, plus longuement pétiolées, sont en même temps plus lisses, plus coriaces, moins sujettes à être mangées par les insectes, presque toujours ployées en gouttières, et à peine denticulées en leurs bords; que ses fleurs, qui en général précèdent celles des Pommiers d'une quinzaine de jours, sont blanches (1), portées sur de longs pédoncules, et rassemblées en bouquets plus lâches ou moins serrés que ceux des Pommiers; que ces fleurs ont des étamines plus étalées et des styles lisses, libres ou isolés jusqu'au fond de la cavité de la fleur; que les fruits, qui succèdent à l'ovaire inférieur de ces fleurs, ont une queue longue qui ne s'implante point dans une cavité, mais qui semble s'épaissir graduellement sous la forme allongée de la poire, forme si connue que dans mille autres cas nous appelons *pyriforme*, comme moyen de comparaison. Cette forme si caractéristique de la poire offre quelques exceptions; on en voit de globuleuses (2), et une variété dont je parlerai tout à l'heure, qui, étant isolée de son arbre, a absolument la forme et tout l'aspect d'une pomme.

Les racines du Poirier, soumises à la même puissance d'ex-

---

(1) Sauf un très-petit nombre de variétés, dont le bord des pétales est légèrement teint en rose.

(2) Exemple, l'Orange rouge et quelques autres.

tension que les rameaux du système aérien, ont aussi une grande étendue perpendiculaire; elles s'enfoncent profondément et exigent, par ce besoin, une épaisseur de terre bien plus considérable que les racines du Pommier, beaucoup plus étalées.

Le bois du Poirier, quoique ayant les plus grands rapports avec celui du Pommier, est plus serré, plus solide, a le grain plus fin, et doit être préféré pour la durée et les travaux qui demandent un grand fini dans leurs détails.

Le Pommier, qui semble être la femelle du Poirier, a une taille moins élevée; son port est plus humble, sa forme abaissée est arrondie en demi-sphère, et ses rameaux ont une tendance à s'incliner; sa feuille, portée sur un pétiole court, est velue, plus étoffée, plus dentée, mais aussi plus tendre et plus souvent dévorée par les insectes.

Les fleurs, rassemblées en bouquets serrés, sont grandes, et leurs pétales étalés sont presque toujours teints en partie d'un rose très-vif; leurs étamines, au lieu d'être ouvertes et lisses comme celles des Poiriers, sont velues et rapprochées en faisceau, de manière à embrasser et à cacher les styles qui, contrairement à ceux des Poiriers, sont velus et soudés dans leur partie inférieure (1).

---

(1) Ce caractère des cinq styles libres dans toute leur longueur chez les fleurs des Poiriers, et soudés par leur partie inférieure chez celles des Pommiers, est en rapport avec la différence d'énergie vitale qui a lieu entre ces deux sortes d'arbres.

La désoudure des organes appendiculaires de la fleur, chez les végétaux, est toujours un signe ou un acte de plus grande vigueur. C'est ainsi que j'ai observé que toutes les corolles ordinairement gamopétales du *Cobœa*

Les fruits, le plus souvent arrondis ou pommiformes, mais aussi quelquefois allongés, ou d'autres fois déprimés ou aplatis sur leur axe, se distinguent de ceux du Poirier par une queue plus courte implantée dans une cavité, et par un œil terminal souvent entouré de cinq bosselettes plus ou moins proéminentes (1).

Les racines du Pommier, de même que le système aérien s'élève peu et s'étale beaucoup, restent pour la plupart près de la superficie du sol; aussi le Pommier peut-il vivre dans une terre peu profonde, et là où le Poirier, dont les longues racines ont besoin de s'étendre verticalement, périt en peu d'années. De la direction naturelle des racines de ces deux espèces d'arbres fruitiers, il en résulte que le Poirier se fixe solidement au sol, tandis que l'on voit souvent les Pommiers être déracinés et renversés sur la terre par le vent. Le bois de ceux-ci, moins solide et surtout moins élastique que le bois du Poirier, fait que ces arbres se déchirent souvent lorsqu'ils sont exposés aux ouragans (2).

---

scandens étaient devenues polypétales sur un individu qui végétait outre mesure. (*Voyez* ce que j'ai dit de ce cas de végétation, dans mon *Esquisse d'Organographie végétale*, placée en tête du grand *Atlas* des *OEuvres d'Histoire naturelle* de Goethe, 1837, page 79.)

(1) Dans l'Api étoilé, dont la forme est pentagone, chacune des cinq saillies du fruit, en s'élevant autour de l'œil, y produit autant de bosselettes très-prononcées. (Poit. et Turp., *Arbr. fruit.*, t. V, pl. 6.)

(2) Le tronc d'une espèce de Pommier à cidre, cultivé dans les environs d'Alençon, se tord constamment et invariablement dans le même sens, de la même manière que cela se voit chez les vieux troncs de Grenadiers qui ornent nos jardins publics.

J'ai dit plus haut que je parlerais d'une variété de Poire dont tout l'aspect est celui d'une Pomme. Étant allé en Normandie pendant les années 1806 et 1807, pour y étudier parmi les Pommes à cidre et les Poires à poiré, celles qui par leur beauté et leur bonne qualité pouvaient être admises dans nos jardins, sur nos tables, et faire partie du *Traité des Arbres fruitiers* dont nous nous occupions alors, M. Poiteau et moi, je rencontrai une Poire qui avait entièrement la forme d'une Pomme. Une seule chose pouvait la démasquer et la faire reconnaître : c'était son poids, qui, par une exception de plus, se trouvait être plus grand encore que dans les Poires ordinaires. Cette Poire pommiforme ressemblait, à s'y méprendre, à une Pomme de reinette grise (1). J'en rapportai quelques individus à Paris, que je présentai à la Société Philomatique. M. Dupetit-Thouars, qui assistait à

(1) Sans que cela soit constant, on voit assez souvent quelques individus de la grosse Poire turbinée appelée d'Agobert et Gil-ô-Gil prendre, sur le même arbre, la forme d'une véritable Pomme. On ne peut douter que la cause de cette inconstance dans la forme accoutumée des fruits de cette variété de Poire, ne soit dans la grande vigueur de l'arbre, qui naturellement pousse à des écarts passagers, choses qui n'arrivent point chez des espèces plus tempérées et, par conséquent, plus fidèles à reproduire tous leurs caractères normaux. C'est encore à cette même cause de plus grande énergie vitale que, comme je l'ai observé bien des fois, les Pommes, en général, sont plus petites, ont une forme plus allongée lorsque la saison est sèche et froide, et plus grosses et plus arrondies lorsqu'elle est humide et chaude. Ces sortes de métamorphoses, dont les Poires elles-mêmes ne sont pas exemptes, nous ont souvent obligés, M. Poiteau et moi, à décrire et à figurer ces fruits, dans notre *Traité sur les Arbres fruitiers*, sous les deux aspects si différents dont je viens de parler.

cette séance, crut d'abord, comme tout le monde, que c'étaient des Pommes, et il ne fut détrompé que lorsque je lui en mis une dans la main, et qu'il en sentit le poids, fort différent de celui d'une Pomme.

L'arbre qui produisait constamment ces Poires pommiformes avait aussi un aspect qui l'éloignait des Poiriers et le rapprochait des Pommiers ; son port était plus étalé, ses rameaux plus divergents, ses feuilles velues et plus dentées. Je n'ai point vu les fleurs.

La différence de poids qu'offrent les Pommes et les Poires est encore un caractère qui les distingue assez nettement. On sait que, généralement, les Poires tombent au fond de l'eau, tandis que les Pommes nagent. Ce qui rend la Poire plus pesante, c'est, d'abord, la présence des nombreuses concrétions pierreuses qu'elle renferme ; c'est ensuite un nombre plus considérable de vésicules dans la composition de son tissu cellulaire ou de sa chair ; c'est encore à une plus grande quantité d'eau, et, par conséquent, moins d'air dans ses vésicules.

Ce qui rend, au contraire, la Pomme plus légère, c'est l'absence totale de concrétions pierreuses, ce sont des vésicules plus grandes, pour lors moins nombreuses, moins multipliées, et enfin contenant moins d'eau et plus d'air. De là cette autre différence entre la densité de la chair de ces deux sortes de fruits. La Pomme, plus sèche, plus spongieuse, n'est jamais fondante comme le sont certaines variétés de Poires.

A l'exemple de ces inimitiés, d'autant plus grandes qu'elles ont lieu entre plus proches parents, le Pommier et le Poirier s'unissent peu ou point par la greffe (1).

---

(1) Tous les essais de greffe tentés entre ces deux espèces d'arbres,

En admettant la fécondation, et surtout les fécondations vagabondes chez les végétaux, cette antipathie se montre encore bien plus prononcée dans le refus opiniâtre que manifestent ces deux espèces d'arbres à se féconder mutuellement, de manière à produire des mulets ou des hybrides, qui consisteraient en Pommes-poires ou en Poires-pommes. C'est ce que l'on ne voit jamais, malgré l'habitation commune dans laquelle vivent pêle-mêle dans les vergers les Poiriers et les Pommiers, et la facilité qu'ils auraient à se livrer à ces sortes d'écarts ou de libertinage s'ils en étaient capables (1).

---

n'ont jamais eu qu'une très-faible réussite et d'une assez courte durée. La greffe, mal collée sur le sujet, y a toujours langui et y a toujours péri avant d'être en état de fleurir et de fructifier.

Il existe cependant, en ce moment, un exemple de cette greffe qui date de six ans, et qui, sans être bien vigoureuse, produit des fruits. La greffe, dirigée en quenouille, est un poirier de Doyenné enté très-bas, et à quelques pouces au-dessous du sol, sur un Pommier doucin; quelques drageons partant du sujet attestent sa nature. La quenouille a produit quelques beaux fruits.

Ce cas extraordinaire, qui a dû son existence jusqu'à ce jour à ce que l'union des deux espèces est très-près du collet du sujet, et un peu en terre, se trouve à Saint-Denis, dans les pépinières de M. Henri Cordonnier, où il a été examiné par une commission, avec tout le scrupule qu'exigeait un semblable fait. (*Ann. d'Hort.*, tome XXI, page 184.)

(1) Par les seules forces végétatives, forces qui peuvent être encore augmentées par l'état d'un milieu favorable à la nutrition, et à un plus grand développement chez certains individus, quelques-uns des organes sont susceptibles de se montrer à l'extérieur sous des formes plus étendues, différentes, et sous des couleurs inaccoutumées, quoique pourtant s'éloignant peu du type normal auquel on peut toujours facilement les rapporter. Ces écarts, généralement de peu de durée, à moins que nous

Les monstruosités qui se présentent chez les fruits des Poiriers et ceux des Pommiers, offrent encore une différence ex-

---

ne les conservions par des extraits de ces individus, sont considérés, tantôt comme une simple monstruosité, et tantôt comme un hybride, ou le produit plus séduisant, plus merveilleux, du rapprochement de sexes différents et d'espèces distinctes. Notre époque, toute d'examen, toute de liberté et d'indépendance en matière scientifique, toute dégagée des principes de l'école et d'aveugle autorité, voit s'ouvrir un grand débat sur l'existence des sexes chez les végétaux, et par conséquent sur les mystères d'une fécondation nécessaire au développement de ce petit bourgeon terminal que l'on nomme l'embryon de la graine. MM. Schleiden et Wydler, sans être bien positivement d'accord dans quelques détails, viennent d'observer que les végétaux n'ont pas de sexes, et que l'on s'est trompé en prenant ingénieusement les élégantes étamines pour des mâles ou des maris, l'extension en boyau des vésicules polliniques pour des *Pénis*, et les pistils pour des femelles ou des épouses, leur glandule stigmatique et terminale, quand elle existe, pour des *Vulves*. Suivant ces habiles observateurs, l'anthère est une sorte d'ovaire uni-latéral, incomplet, tourné en dedans ou en dehors (introrse ou extrorse), contenant des grains de pollen susceptibles de s'étendre, comme dans la germination des sporules des Champignons et des Algues, en un filament tubuleux qui, après avoir cheminé par les styles et pénétré dans l'ovule par le micropyle, donne lieu, dans le cul-de-sac de son extrémité, à un rapprochement en noyau des granules qu'il contient, et, par ce moyen tout nouveau, au début de l'embryon, lequel n'ayant plus besoin de son boyau introducteur, s'en sépare par rupture.

D'après cette nouvelle doctrine, qui n'est pas notre dernier mot sur tout ce qu'a de simple la reproduction par gemmes extensifs des végétaux, l'ovaire n'est plus qu'une sorte d'involucre, et l'ovule un lieu ou une demeure protectrice. C'est une nourrice offerte au jeune nourrisson enfanté par sa mère, le grain de pollen.

trêmement remarquable, que j'ai déjà fait connaître ailleurs et où j'en dis la cause (1).

La monstruosité des Poires consiste toujours dans une proliférie, c'est-à-dire dans le développement successif de plusieurs Poires les unes au-dessus des autres, tandis que celle

---

Pour bien comprendre maintenant la formation d'un ou de plusieurs embryons dans un ovule, pourvu bien entendu de l'heureux micropyle, dont les fonctions d'introducteur paraissent inamovibles, quel que soit le changement de nos hypothèses sur la formation et le développement du bourgeon embryonnaire et terminal de la graine; pour bien concevoir les milliers de graines embryonifères qui existent dans une capsule de Pavot, ou dans la gousse d'une Vanille, il faut nécessairement admettre au moins un pareil nombre de grains de pollen tombés sur le stigmate, et par conséquent autant de boyaux producteurs d'embryons!! Dans cette dernière hypothèse, que deviendra le filament terminal et très-ténu du placenta central des Primulacées, considéré jusqu'alors comme conducteur de l'imprégnation mystérieuse? Comment pouvoir admettre que le diamètre presque microscopique de ce filament, qui s'évanouit en pointe la plus déliée, puisse suffire à l'introduction d'une centaine de boyaux destinés à porter, par le micropyle, autant de futurs embryons dans un même nombre d'ovules? Il n'y a plus qu'un moyen, c'est d'abandonner cette mauvaise route, c'est de faire cheminer maintenant tous ces boyaux dans l'épaisseur du stigmate, du style et celle des parois de l'ovaire, de les faire remonter ensuite, en s'élevant et en se divisant, dans le placenta, jusqu'à ce qu'enfin chacun rencontre son micropyle particulier. Attendons les résultats de combats qui ne pourront manquer, et auxquels je resterai tranquille spectateur, comme en bien d'autres discussions, à l'issue desquelles j'attends la vérité et la raison, choses peut-être jusqu'à ce jour trop simples pour l'homme.

(1) *Esquisses d'Organographie végétale*, Atlas des OEuvres d'Histoire naturelle de Goethe, page 68.

des Pommes n'a lieu que par des fruits plus ou moins greffés côte à côte (1).

Beaucoup d'autres caractères, soit distinctifs, soit d'analogies, éloignent ou rapprochent les Poiriers des Pommiers.

Si la feuille du Poirier est plus coriace, si elle est moins dévorée par les insectes que celle du Pommier, elle a aussi ses ennemis particuliers. L'*Æcidium cancellatum* (2), si remar-

---

(1) Je ne connais qu'une exception, c'est celle qu'offre constamment la Pomme-Figue (*Malus apetala*), dans la singulière structure de laquelle se trouvent trois fruits emboîtés, à la manière des tubes d'une longue-vue fermée. (*Voyez* la description détaillée que j'ai donnée des organes de la fleur et de ceux de cette singulière Pomme, dans mon *Esquisse d'Organographie végétale*, Atlas des OEuvres d'Histoire naturelle de Goethe, page 68.)

(2) *Ræstelia cancellata*, Reb. De même que pendant longtemps on a attribué au voisinage de l'Épine-Vinette la cause, l'origine et le développement de la rouille des blés (*Uredo rubigo-vera*), soit par une sorte d'ensemencement des vésicules polliniques des fleurs du *Berberis*, soit par une dégénérescence de l'*Æcidium* qui attaque fréquemment les feuilles de cet arbuste, M. Eudes Deslongchamps, dans ces mêmes idées de voisinage et d'inoculation, a fait connaître quelques observations qui tendraient à faire croire que le pollen abondant d'un fort pied de Sabine (*Juniperus sabina*), planté près d'un grand nombre de Poiriers, leur communiquait l'*Æcidium cancellatum*, et que ce parasite devenait plus rare à mesure que les Poiriers étaient plus éloignés de la Sabine. De cette même source d'infection, suivant M. Eudes Deslongchamps, c'est-à-dire des mêmes germes, seraient encore résultées d'autres formes, et par conséquent d'autres végétaux, comme par exemple l'*Uredo pinguis*, D. C., sur les feuilles de plusieurs variétés de Rosiers, plus encore une autre production à la face inférieure des feuilles de vigne, qui est l'*Erineum vitis*, sorte de

quable dans sa structure, qui naît et s'élève sur la face intérieure, vit à ses dépens en laissant au-dessous une tache orangée et granuleuse; le *Cladosporium fumago,* autre végétal parasite et microscopique, qui apparaît à la face extérieure de la feuille sous la forme d'un grand nombre de taches noires ou fuligineuses. Cette production, qui attaque plus particulièrement les feuilles du Poirier Doyenné, s'établit et tache, en même temps, la surface des fruits, ce qui les déprécie beaucoup, sans que cela nuise cependant à leur bonne qualité. On ne peut s'empêcher ici de remarquer que la face extérieure des feuilles, la seule qui sert de territoire à ces petits végétaux,

---

petit Bédéguard dû à la surexcitation, par place, des poils normaux qui deviennent monstrueux.

Toutes ces productions, qui ne sont que des dégénérescences des organes élémentaires des tissus propres des feuilles ou des tiges dans lesquelles et sur lesquelles on les voit se développer, dégénérescences dues à des causes d'excitation, sont toujours favorisées par les abris, l'humidité et la diminution de l'air et de la lumière. Il me paraît donc tout simple qu'après le pied de Genévrier abattu, les feuilles des Poiriers et autres plantes voisines se soient trouvées saines et dégagées de toutes ces excroissances tissulaires monstrueuses.

Dans une campagne près de Paris, que j'ai habitée pendant quelques années, la terre est forte, compacte, froide et retient l'eau. Je n'y ai jamais aperçu qu'un seul pied d'Épine-Vinette, et cependant les blés y sont couverts de rouille. Mon jardin, bourré d'arbres fruitiers qui se gênaient mutuellement, en entretenant parmi eux une grande humidité et en se privant réciproquement de l'air et de la lumière, ne contenait aucune espèce d'arbres verts, et pourtant les feuilles des Poiriers étaient couvertes d'*Æcidium cancellatum*, *de Cladosporium fumago*, et les feuilles de mes raisins blancs étaient toutes attaquées en dessous, soit par l'*Erineum vitis*, soit par le *Torula dissiliens*, Duby.

correspond exactement avec celle des feuilles du verticille quinaire qui s'offre à la surface du fruit.

Les Tigres, petits insectes ailés, mouchetés de gris, de brun et de violet, en se fixant sur la feuille des Poiriers, surtout du Bon-Chrétien d'hiver en espalier, en sucent le parenchyme, l'affament, lui donnent l'aspect d'un bronzé sale, ce qui finit par épuiser l'arbre et le faire périr.

On sait que le Gui (1), la seule plante parasite appendiculée de notre pays, germe et végète en rayonnant dans tous les sens sur les branches du Pommier. On sait aussi que plus les Pommiers sont vieux, faibles ou malades, plus ils sont infestés de ce parasite incommode qui, en se multipliant de plus en plus, les affame et finit par les tuer. Ce que l'on sait moins, c'est que les Poiriers n'en montrent que très-rarement, tandis que d'autres arbres de genres et de familles très-éloignés, tels que des Épines (2), les Acacias (3), des Peupliers blancs de Hollande (4), des Chênes, etc., en sont quelquefois couverts. D'où peut venir cette antipathie du Gui pour le Poirier? Vient-elle d'une qualité de séve qui ne convient pas au parasite, ce qui paraît le plus probable, ou le Poirier, plus vigoureux que le Pommier, repousse-t-il le Gui, ce qui l'est moins, car les vieux Poiriers languissants finiraient par en recevoir.

Je terminerai enfin ces nombreuses différences, entre deux arbres qui d'ailleurs offrent tant de ressemblances, par celle

(1) *Viscum album*, Linn.

(2) *Mespilus oxyacantha*, Gœrtn.

(3) *Robinia pseudo-acacia*, Linn.

(4) *Populus alba*.

qui existe dans la qualité particulière de leur séve, ce qui fait que les Pommiers, sauf quelques espèces, peuvent être mortellement infectés du Puceron lanigère (1), lorsque les Poiriers en sont toujours exempts, à moins que, placés dans le voisinage de Pommiers couverts de pucerons, ils n'en reçoivent momentanément quelques-uns, qui pour lors ne laissent pas que de produire des ulcères et des nodosités sur les jeunes rameaux. Je rappellerai aussi que, quant à la saveur des fruits, l'acidité appartient plutôt aux Pommes qu'aux Poires (2).

Deux arbres tout à la fois si caractérisés et si semblables (3) devaient tenir les auteurs systématiques divisés, et dans une fluctuation d'opinion relativement à la formation, bien peu importante, d'un ou de deux genres. Aussi a-t-on vu Tournefort, Jussieu, Lamarck, Duhamel, Desfontaines et De Candolle admettre la validité particulière des genres *Pyrus* et *Malus*, tandis que Linnée, Willdenow, Persoon, De Candolle (4) et Lindley, mus par d'autres sentiments, ne reconnaissent que le seul genre *Pyrus*.

---

(1) Myzoxyle du Pommier, Blot.

(2) L'acidité des Poires susceptibles de développer cette saveur est-elle diminuée ou entièrement absorbée par les concrétions pierreuses, comme le pensait Grew ?

(3) Un petit caractère qui rapproche encore les Pommiers des Poiriers, consiste dans la couleur rouge dont se teint la chair des Passe-Pommes, des Calvilles rouges, et des Poires désignées sous le nom de Sanguine d'Italie, avec cette légère différence que c'est près de la peau chez les Pommes et près des loges chez les Poires, que la couleur rouge commence et est la plus intense.

(4) L'illustre professeur de Genève n'admet plus le genre *Malus* que comme une section du genre *Pyrus*.

On doit s'étonner que ceux des auteurs qui avaient intérêt à distinguer et à caractériser les genres *Pyrus* et *Malus*, qui devaient les étudier avec soin sous le rapport de toutes leurs différences, s'en soient tenus seulement à la soudure de la partie inférieure des cinq styles, à leur villosité (1), à la forme sphéroïde du fruit, et à sa queue implantée dans une cavité, caractères qui, vu leur peu d'importance organique, s'effacent quelquefois complétement, et qu'ils aient négligé celui, très-constant, de la présence ou de l'absence absolue des concrétions pierreuses qui, comme on va le voir, en détermine un autre des plus curieux et des plus inattendus.

M. de Mirbel, dans son savant rapport sur un manuscrit de M. de Tristan (2), dit : « Les éléments organiques sont, à « peu de chose près, semblables dans la plupart des espèces « monocotylédonées ou dicotylédonées. » Je fus frappé de la justesse et de la profondeur de cette assertion, car il est très-vrai que de l'analogie plus ou moins grande qui existe entre les formes et les divers arrangements des organes élémentaires, dont sont formées les masses tissulaires végétales, dépendent les formes si variées de tous les organes extérieurs des plantes; formes qui ne sont que les effets obligés d'une

(1) Les styles n'étant que le prolongement de la nervure médiane des feuilles ovariennes, ceux des fleurs des Pommiers, dont les feuilles sont velues, doivent conserver ce même caractère de villosité, tandis que ceux des fleurs des Poiriers, dont les feuilles sont lisses, doivent également être dépourvus de poils.

(2) *Harmonie des organes végétaux étudiés principalement dans l'ensemble d'une même plante*, *Comptes rendus*, séance du 29 janvier 1838, pag. 135, 136.

cause plus profonde qui se trouve dans la nature, l'ordre ou la combinaison des vésicules et des tubes des tissus. Mais aussi cela me fit souvenir, en même temps, d'une grande et très-remarquable exception à cette règle générale.

On a vu combien sont grands les rapports de ressemblances qui existent entre le fruit de la Poire et celui de la Pomme. On devait croire que des structures aussi semblables et des formes aussi rapprochées devaient être subordonnées, ou le résultat d'organes élémentaires pareils et combinés de la même manière.

Eh bien! il en est tout autrement, jamais dissemblance ne fut plus grande.

Le tissu cellulaire de la Pomme (pl. 1, fig. 2 et 3), celui qui en forme la chair ou la partie mangeable, comme tous les tissus cellulaires végétaux, se compose d'une grande quantité de vésicules distinctes, simplement agglomérées, vivant et végétant chacune pour son compte, de grandeur variable dans la même Pomme, et d'autant plus grandes en général, que ces fruits sont plus gros et plus légers (1). Ces vésicules, incolores et transparentes, s'altèrent d'autant plus dans leur sphéricité naturelle et primitive qu'elles ont manqué de l'espace nécessaire à leur développement individuel. Dans leur intérieur se

(1) Dans une jeune Pomme de Reinette du Canada, grosse comme une petite noix, j'ai trouvé les vésicules du tissu cellulaire très-petites, et en les comparant plus tard à celles d'une Pomme entièrement achevée, il m'a semblé que le nombre des vésicules était le même, et que, seulement, chacune d'elles, en travaillant pour son compte dans l'agglomération générale, s'était accrue. Si l'on presse les vésicules d'une Pomme, on en voit sortir tout à la fois de l'eau et de l'air.

trouve une globuline également incolore (pl. 1, fig. 2, *a*, *a*), ou, en d'autres termes, une nouvelle génération de jeunes vésicules variables en diamètre, et qui quelquefois, en continuant de végéter et de croître dans le sein de la vésicule maternelle (pl. 1, fig. 3, *b*, *b*, *b*), finit par remplir toute la cavité de celle-ci. La nouvelle génération, quoique prenant un grand accroissement, reste stérile; elle ne montre jamais une troisième génération dans l'intérieur de ses vésicules, comme on l'observe parfois dans des tissus cellulaires plus énergiques ou moins épuisés que celui de la Pomme, dans lequel toute force végétative arrivée à son dernier terme est évanouie.

Toutes ces vésicules, insipides par elles-mêmes, comme autant d'outres particulières, contiennent une eau plus ou moins abondante, et dans laquelle réside la saveur acide, sucrée ou amère, qui se fait sentir dans chaque variété de Pommes. La grandeur moyenne de ces vésicules est d'environ $\frac{1}{6}$ de mill.

Comme on le voit, le tissu cellulaire de la chair des Pommes est entièrement semblable, quant au fond, à celui de tous les autres végétaux et particulièrement à ceux qui sont lâches et aqueux, et dans lesquels les vésicules, jouissant de l'espace, se sont peu gênées mutuellement. On n'y rencontre jamais ni cristaux ni concrétions pierreuses.

Le tissu cellulaire de la Poire offre, contre toute attente, une constitution aussi élégante qu'elle est extraordinaire, et probablement très-rare dans le règne végétal.

Si l'on étudie ce tissu naissant dans un ovaire ou même dans une très-jeune Poire, on le trouve formé de très-petites vésicules contiguës et déjà remplies de nombreux globulins (pl. 2, fig. 3). Ce jeune tissu est entièrement comparable à celui, également naissant, qu'on appelle *Cambium*, nom inutile dans la science, puisqu'il n'exprime que le début d'un véritable tissu cellulaire. Peu de temps après, lorsque la Poire a atteint environ la grosseur d'une petite Noix, on commence à s'apercevoir que çà et là il se forme de petits noyaux qui se multiplient, grossissent un peu, deviennent plus opaques et s'endurcissent. Ce sont ces petits noyaux qui, assez régulièrement répartis dans tout le tissu cellulaire de la chair des Poires, sont désignés sous le nom de roche ou de pierre. Toutes les Poires en sont plus ou moins pourvues, et les parties qui en contiennent le plus sont celles qui touchent immédiatement l'épiderme, et celles plus centrales qui avoisinent l'axe ligneux (1) du fruit, depuis l'insertion de la queue jusque près de l'œil formé par les rudiments séchés de la fleur. Là elles sont plus grosses et plus nombreuses que sous l'épiderme, et elles semblent, par leur assemblage et leur répétition, former une sorte d'enveloppe ou de noyau osseux autour des cinq loges ou des cinq carpelles cartilagineux du fruit.

Les Poires les plus avantageuses à étudier sous le double rapport de la formation des concrétions pierreuses, et de la singulière disposition des vésicules du tissu cellulaire, sont celles de Saint-Germain et d'Angleterre (pl. 2, fig. 4), parce que leurs pierres sont grosses, leur tissu plus lâche et plus aqueux, ce qui rend plus facile l'isolement des parties pour être plus commodément soumises au microscope.

---

(1) Prolongement du faisceau fibreux de la queue dans le fruit, qui s'ouvre ensuite et enveloppe les cinq carpelles cartilagineux.

Analyse microscopique.

J'ai dit, il y a un instant, que le tissu cellulaire d'un ovaire ou d'une très-petite Poire était régulier; c'est-à-dire qu'il se composait, comme tous les tissus cellulaires végétaux, de vésicules agglomérées, plus ou moins remplies d'une jeune globuline, et qu'il n'offrait encore aucune trace de concrétions pierreuses. C'est donc en continuant de se développer que les pierres apparaissent successivement, et que le tissu cellulaire subit, en même temps, la plus curieuse des métamorphoses.

Si l'on porte sous le microscope armé du grossissement de 250 fois environ de petites tranches de tissu cellulaire prises dans une Poire mûre, soit de Saint-Germain, soit d'Angleterre, ou de toute autre espèce, on ne pourra s'empêcher d'admirer l'élégante disposition de ce tissu (pl. 2, fig. 6). On verra d'abord que les pierres qui paraissent simples à l'œil nu sont assez grandement espacées, et qu'elles se composent d'un nombre très-variable de corps cristalloïdes, agglomérés en sphéroïdes rayonnants plus ou moins réguliers, opaques ou semi-transparents, marqués au centre d'une sorte d'ombilic punctiforme ou discoïde, d'où rayonnent un grand nombre de petites rides qui se multiplient à mesure qu'elles s'étendent vers la circonférence (pl. 2, fig. 6, *a*). Ces corps ou ces petites pierres particulières, toujours anguleuses, toujours aplaties, sont quelquefois intimement soudées, de manière à paraître comme si elles étaient munies de plusieurs ombilics, et leur agglomération sphéroïde rappelle parfaitement celle des véritables cristaux qui se forment dans les vésicules des tissus cellulaires des Cactées, des Rhubarbes, des *Polygonum*, etc.

Autour de ces sphéroïdes, composés de petites pierres agrégées, rayonnent dans tous les sens un grand nombre de vésicules allongées en massue, tubuleuses, le plus souvent simples, mais aussi quelquefois comme articulées ou comme formées de plusieurs vésicules développées à la suite les unes des autres (pl. 2, fig. 6). Ces vésicules tubuleuses et rayonnantes, variables en forme et en longueur, s'étendent autant que l'espace produit entre chaque agglomération pierreuse le permet, et jusqu'à la rencontre mutuelle des rayonnances voisines où il se fait opposition. Transparentes, molles et incolores, elles contiennent l'eau de la Poire et vers leur extrémité des granules fins, ou une globuline avortée. Semblables aux utricules succulents des Oranges et de toutes les vésicules des tissus cellulaires aqueux, ce sont elles qui forment ce que l'on appelle la chair ou le parenchyme dans ces sortes de modifications.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que la chair de toutes les Poires est une masse formée, par agglomération et par développements partiels, d'un nombre considérable de sphéroïdes rayonnants, lesquels, vus au microscope, simulent admirablement autant de fleurs radiées, dont le centre ou le disque, plus coloré, serait formé par les pierres agglomérées, et les fleurons de la circonférence par les vésicules aqueuses et allongées. Rien ne ressemblerait plus à des Marguerites que ces sphéroïdes rayonnants, si les vésicules divergentes, au lieu de partir de tous les points du pourtour du noyau central, n'émanaient seulement que latéralement, comme je les ai figurées dans l'intention d'être plus clair.

Dans les Poires à chair cassante, comme celle du Messire-Jean (pl. 3, fig. 1), par exemple, les rochers ou les agglomérations de petites pierres sont infiniment plus nombreux que dans les Poires à chair fondante; de là des vésicules rayonnantes moins allongées, et de là, par conséquent, le caractère cassant de ces tissus et celui plus élastique des tissus fondants.

Lorsqu'on enlève l'épiderme d'une Poire mûre de Messire-Jean, on voit immédiatement au-dessous une couche mince qui se compose d'une infinité de petits globules fauves ou roussâtres qui semblent comme un sable fin répandu avec assez d'ordre à la surface de la chair (pl. 3, fig. 1, *c*). Chacun de ces globules, vu au microscope, est un petit rocher formé de pierres roussâtres, semi-transparentes, et entouré, comme ceux que j'ai déjà décrits, de vésicules incolores, rayonnantes, simples ou composées de deux articles (pl. 3, fig. 3). C'est à la couleur roussâtre des rochers et à leur très-grand nombre qu'est due cette même couleur qu'offrent à l'extérieur les Poires de Messire-Jean, dont l'épiderme par lui-même est transparent et sans couleur.

Sous l'épiderme d'une de ces Poires j'ai trouvé, une fois, un assez grand nombre d'*Acarus* dont le corps ovoïde, muni de pinces ramassées en museau et de quatre soies postérieures, n'offrait, chose remarquable, que quatre pattes articulées et terminées par un seul ongle légèrement arqué, jeunes individus qui attendaient leur mue pour prendre leurs huit pattes (pl. 3, fig. 4, *b*).

A mesure que l'on pénétrait dans la chair de ces Poires, les rochers à vésicules rayonnantes devenaient plus gros, plus composés, mais aussi plus rares ou plus espacés, et les fleurs radiées, par conséquent, plus grandes (pl. 3, fig. 4). Vers le centre et dans le voisinage des loges ils étaient plus nombreux, et formaient comme je l'ai déjà dit, une sorte de capsule pierreuse.

Ayant poussé mes recherches microscopiques sur la disposition ou l'arrangement des vésicules des tissus cellulaires de quelques fruits analogues à ceux de la Poire, tels que le Coing et la Nèfle, j'ai trouvé que toute la masse charnue ou pulpeuse de ces deux sortes de fruits était absolument, comme dans les Poires, composée de sphéroïdes florifères formés également d'un centre pierreux et de vésicules rayonnantes, mais offrant, dans leurs parties composantes, des modifications de forme dont je vais parler.

Malgré les analogies qui existent entre la Poire, le Coing et la Nèfle, ces trois fruits présentent des différences extrêmement remarquables. Les Poires résultent d'une inflorescence disposée en bouquet, de manière à ce que chaque fleur et par suite chaque fruit est latéral et dans l'aisselle d'une feuille rudimentaire, tandis que les Coings et les Nèfles, toujours solitaires, terminent un scion (1). Dans ces trois sortes de fruits charnus, le centre est également occupé par cinq loges ou carpelles qui correspondent, bien entendu, avec le même nombre de styles; mais ces loges ou carpelles, cartilagineuses dans la Poire et le Coing, sont osseuses dans la Nèfle, et contiennent dans leur intérieur un nombre de graines très-variable suivant les espèces. Dans celles de la Poire et de la Nèfle elles sont originairement au nombre de deux, situées

(1) La Poire, née à l'aisselle d'une feuille rudimentaire, provient d'un bourgeon latéral et axillaire, tandis que le Coing et la Nèfle résultent d'un bourgeon terminal.

l'une au-dessus de l'autre, tandis que dans le Coing, comme dans les Citrons, chaque loge contient de douze à quarante graines superposées et enduites d'une prétendue matière mucilagineuse (pl. 3, fig. 6), qui, vue au microscope, est parfaitement organisée, et consiste en des sortes de poils ou de papilles cunéiformes, d'une transparence égale à celle de l'écume d'eau, et qui, enfin, émanent par extension de la face extérieure (1) de la feuille ovulaire, devenue brune et carti-

---

(1) Cette face est la même que celles qu'offrent à l'extérieur du fruit les cinq feuilles verticillées et soudées, et celle extérieure des feuilles caulinaires, toutes également couvertes de poils ou comme drapées.

Les pepins de Pommes et de Poires, onctueux au toucher, doivent ce caractère au développement à leur surface, d'un grand nombre de papilles ou de poils rudimentaires analogues à ceux, beaucoup plus longs, qui recouvrent les graines de Coing.

Un assez grand nombre de graines, paraissant unies à leur surface, semblent se gonfler, blanchir et être comme enveloppées d'une couche plus ou moins épaisse de mucus dès qu'on les humecte.

M. Poiteau, dans sa Monographie du genre *Hyptis*, est le premier qui a signalé ce mode de développement sur les graines de quelques espèces de ce genre. Mais ne l'ayant observé qu'à l'œil nu, il n'a pu voir que ce mucus consistait en des poils rayonnants autour du spermoderme de la graine.

M. Eudes Deslonchamps, ayant fait la même remarque sur plusieurs espèces de graines de la famille des Labiées, et s'étant servi du microscope, a vu que le prétendu mucilage développé par l'humidité, était dû à la présence de poils nombreux et divergents. Par la sécheresse, tous ces poils se contractent ou se recoquillent, et semblent disparaître à la surface des graines, où cependant ils ne sont que couchés; mais dès l'instant qu'on les mouille, très-hygrométriques de leur nature, ils se gonflent et se redressent comme une chevelure autour de la graine, dont l'enveloppe est lagineuse dans la maturité de la graine (1) (pl. 3, fig. 7, 7 *a* et 7 *b*).

Dans le Coing, comme dans la Poire, toute la masse charnue est formée, par contiguïté, d'une innombrable quantité de sphéroïdes florifères qui ne diffèrent de ceux des Poires que : 1° par les roches particulières des rochers, qui sont plus transparentes, marquées d'un ombilic discoïde ouvert, ponctué, et bordées d'un épais bourrelet ridé en travers.

2° Par des vésicules tubuleuses et rayonnantes, plus grandes et plus souvent composées de deux articles (pl. 3, fig. 5).

Dans la Nèfle, il y a cette différence que les roches des rochers sont plus grandes, leur disque bien plus ouvert et semé de points opaques d'où rayonnent des lignes noires, qu'elles sont souvent colorées en jaunâtre (pl. 3, fig. 8 *b*); qu'autour des rochers rayonnent des vésicules plus solides, larges, courtes, de formes très-variables, quelquefois bizarres, assez souvent composées de deux articles et remplies d'une globuline pulvisculaire très-abondante, parmi laquelle se trouvent quelques grains sphériques assez gros (pl. 3, fig. 8). Une autre différence très-remarquable, dont nous expliquerons la cause

---

véritablement pileuse comme celle de la graine du coton et de beaucoup d'autres. Il est plus que probable que les graines des Labiées dont les feuilles sont lisses, sont en même temps dépourvues de poils ou de ce faux mucus.

Le mucilage abondant que produit la graine de lin, n'offre point au microscope d'organisation appréciable, c'est un chaos composé de granules très-ténus, doués d'un mouvement de fourmillement; c'est une matière organique sans organisation qui, dans ce cas, mérite le nom de mucilage.

(1) Tégument ou Spermoderme des auteurs classiques.

tout à l'heure, consiste dans ce que, contrairement aux Poires et aux Coings, on ne trouve point de pierres ou de rochers dans le voisinage des loges osseuses des Nèfles.

Après avoir observé les tissus cellulaires de la Pomme, de la Poire, du Coing et de la Nèfle, on se demande :

Comment se forment les grains osseux ou les pierres répandues dans la chair des Poires, des Coings et des Nèfles? Pourquoi les Pommes, si analogues aux Poires, en manquent-elles toujours absolument? Pourquoi sont-elles isolées et espacées dans le tissu? Pourquoi se trouvent-elles en plus grande quantité sous l'épiderme, dans la direction de l'axe central, et autour des loges dans les Poires et les Coings? Quelle peut être la nature de la matière concrétée dont elles sont en partie constituées? Sont-elles organisées ou ne sont-elles que des agglomérations de matière organique conglomérée à la manière des concrétions urinaires ou des rognons siliceux? Cette même matière ne s'accumule-t-elle pas sous d'autres formes et en d'autres lieux des tissus végétaux? A quoi peut-on attribuer la disposition rayonnante et florifère des vésicules allongées autour de chaque agglomération pierreuse, qui devient pour elles une sorte de point d'appui ou de centre commun?

On a vu au commencement de ce Mémoire, que dans l'ovaire et dans les très-jeunes Poires, les vésicules, comme dans tous les tissus cellulaires naissants, sont semblables, sphéroïdes, remplies de globulins et en simple contiguïté. Ce n'est que plus tard que certaines de ces vésicules, groupées plusieurs ensemble en nombre très-variable, s'engorgent, et se remplissent peu à peu d'une matière indigeste qui s'y dépose moléculairement et confusément, qui leur donne leur opacité, leur couleur, et à laquelle je propose de donner le nom de *Sclé-*

rogène (1), comme étant la cause qui produit, par incrustation, l'endurcissement des tissus.

Mais d'où peut provenir ce changement qui consiste dans

---

(1) Je donne cette dénomination collective à toutes les matières étrangères à l'organisme, matières d'abord en suspension dans l'eau de séve, puis déposée et concrétée aux parois intérieures des organes creux et élémentaires des tissus végétaux. Les substances tinctoriales qui occasionnent la coloration des bois de teintures, le Cachou noir, avec sa *prodigieuse quantité* de Raphides ou d'aiguilles cristallines; le Tannin, etc., quoique pouvant avoir des caractères chimiques différents, viennent, comme matière indigeste et comme solidifiant les tissus, se ranger, comme espèces, sous la dénomination générique de Sclérogène.

Je n'ai pu conserver celle de matière ligneuse employée en chimie, parce que, sous cette dénomination très-collective, se trouve compris, non-seulement la Sclérogène insoluble, aussi étrangère aux tissus vivants que le sónt les concrétions urinaires à la vessie, mais encore les fibres, les tubes, les vésicules et leurs grains de fécule.

Dans les masses tissulaires végétales, il y a deux choses fort distinctes:

1° Les divers organes élémentaires jouissant, *chacun*, des attributs de la vie organique: la naissance, l'absorption, l'assimilation, l'accroissement, la reproduction et la mort.

Cette partie, la plus considérable, peut, étant dégagée de tout ce qui lui est étranger, servir indistinctement à la nourriture des animaux, parce qu'elle ne possède que des qualités innocentes et nutritives. C'est elle qui, bouleversée dans ses différents organes sous l'action de l'analyse chimique, prend le nom de *ligneux*.

2° L'eau et les divers produits chimiques qui se forment par sécrétion ou par dépôt dans tous les organes creux des tissus, qui s'y déposent et s'y concrètent, soit à l'état diffus, soit à l'état symétrique et cristallin. Matières dans lesquelles seules se trouvent l'odeur, la saveur, la couleur et les qualités délétères des végétaux.

un ombilic punctiforme ou élargi en un disque quelquefois fort grand, et dans les petites stries ou rides qui rayonnent autour de cet ombilic? Il est très-probable que la vésicule organisée ne change point par elle-même, et que le nouvel aspect qu'elle prend est dû au mode suivant lequel la Sclérogène s'arrange à mesure qu'elle se dépose aux parois intérieures de la vésicule. Quant à ce que de semblables incrustations n'ont jamais lieu dans les vésicules du tissu cellulaire de la Pomme, j'en ignore complétement la cause; et quant à leur isolement et à leur espacement, par petits groupes, parmi un grand nombre d'autres vésicules, ayant toutes les mêmes droits à l'incrustation, je n'en sais pas davantage. C'est une propriété attachée à un organisme particulier.

La Sclérogène dissoute et ambiante dans le milieu où se trouve plongé le Poirier, étant absorbée par ses tissus, on conçoit facilement comment étant amenée et charriée par les vaisseaux réunis dans la queue de la Poire, elle se répand à l'aide de ces conducteurs autour de l'axe central et des loges, et comment, allant se déposer dans les vésicules les plus voisines, elle y forme les plus grosses et les plus nombreuses concrétions pierreuses.

La cause qui occasionne la formation de celles très-nombreuses aussi, mais toujours plus petites que celles du centre, et qui, situées sous l'épiderme, constituent une sorte d'enveloppe pierreuse, est la même au fond. Elle diffère seulement de la première en ce que la Sclérogène, au lieu de lui arriver par les vaisseaux de la queue, est immédiatement absorbée et accumulée de suite dans les vésicules les plus extérieures de la masse tissulaire de la Poire. Cela explique ensuite comment, entre les concrétions du centre et celles sous-épidermiques, il s'en forme moins; et comment, par cette raison, cette partie intermédiaire de la Poire est préférable au goût et d'une digestion plus facile.

Chacun des corps agglomérés en sphéroïde pierreux est composé de trois choses fort distinctes : 1° de la vésicule maternelle devenue une sorte de géode; 2° de la globuline ou grains de fécule, engendrés par la vésicule; 3° de la Sclérogène absorbée, inassimilable, et simplement accumulée dans l'intérieur de la vésicule, de manière à la bourrer et à lui donner la solidité qu'on retrouve, par exemple, dans les graines dures et osseuses du Raisin et de la Groseille. Il y a donc ici à distinguer deux parties bien caractérisées dans les trois composants dont je viens de parler : 1° la vésicule maternelle et la globuline ou fécule, qui jouissent de l'organisation et de tous les attributs de la vie organique; 2° la Sclérogène sans organisation déposée dans la vésicule pêle-mêle avec la globuline organisée.

Après l'analyse de chacune de ces vésicules ossifiées et de leur assemblage en un corps sphéroïde, on devine aisément comment les pierres des Poires ont en même temps la double propriété d'être compressibles et élastiques, par la présence des vésicules, et cassantes par celle de la Sclérogène accumulée et concrétée.

Si maintenant on étudie, toujours par le *voir-venir*, la formation osseuse des noyaux, et la cause de l'endurcissement, de la solidité et de la coloration des bois, on verra que c'est toujours la même matière qui, absorbée, s'incruste ou se dépose plus ou moins aux surfaces intérieures d'organes qui, par eux-mêmes, sont toujours flexibles, faibles, transparents et sans couleur.

Les fruits à noyaux, tels que ceux de la Prune, de la Pêche, de l'Abricot, etc., observés à l'état d'ovaires ou de très-jeunes fruits, étant formés, comme on le sait, d'une feuille pliée et soudée par ses bords, n'offrent rien encore qu'un tissu vivant, mou et herbacé. Cette feuille ovarienne, comme toutes les feuilles, est seulement composée de deux faces épidermiques, entre lesquelles sont les vésicules du tissu cellulaire, remplies de leur globuline, le plus ordinairement verte, et le tissu fibreux ou vasculaire qui vit et s'étend parmi les vésicules. Rien encore ne s'est ossifié ; mais à mesure que le fruit se développe, à mesure que le tissu cellulaire s'accroît, comme dans les Poires, la Sclérogène arrive par voie d'absorption, et va se déposer successivement et confusément dans l'intérieur des vésicules les plus voisines de l'épiderme intérieur, ou de ce que l'on nomme la *membrane endocarpique du péricarpe*. Là, la matière arrivant et remplissant successivement un plus grand nombre de vésicules, la couche s'épaissit dans de certaines limites, et forme cette enveloppe plus ou moins colorée, dure et cassante dans tous les sens, que l'on appelle *noix* ou *noyau*, et qui, toujours, fait partie organique du péricarpe, puisque, comme on vient de le voir, elle n'est due qu'à l'ossification, par engorgement de matière accumulée, d'un nombre variable de ses vésicules (1). La Sclérogène,

(1) Si on laisse tremper dans l'eau, pendant quelques jours, un noyau d'Amande, et qu'on en soumette ensuite des fragments au microscope, on voit qu'il est entièrement formé de vésicules irrégulières, semi-transparentes, simplement contiguës, plus ou moins remplies de Sclérogène, et, comme celles du Coing et de la Nèfle, montrant un disque grand, ponctué et limité par un bord épaissi.

qui sert par dépôt ou par incrustation à solidifier en bois la partie intérieure de certains péricarpes, présente quelques modifications, soit dans le mode de son dépôt, soit dans son degré de dureté, soit dans la couleur qu'elle est susceptible de prendre en vieillissant.

Dans certaines Prunes, dites *sans noyau*, la Sclérogène n'arrivant que peu ou point, l'ossification du tissu cellulaire voisin de la loge n'a point lieu, ou elle se fait inégalement et par place, comme dans les pierres isolées des Poires. C'est la cuiller incomplète du fondeur, par défaut de matière. La même chose se passe dans la Nèfle sans noyaux; mais ici la même cause d'appauvrissement de matière, qui empêche l'ossification, amène aussi, probablement, l'oblitération des carpelles et l'avortement complet des graines (1).

Si l'on concasse finement un morceau de noix de Coco, et qu'on fasse bouillir ces fragments dans l'acide nitrique, la couleur noire disparaît ou est affaiblie en un blanc jaunâtre. Portés ensuite sous le microscope, ils n'offrent plus que des vésicules isolées de formes et de grandeurs très-variables, souvent fusiformes ou triangulaires en forme de chapeau; semi-transparentes, elles sont ossifiées ou pleines de Sclérogène, et leur surface, comme ponctuée, offre un grand nombre de petites stries ou rides, qui partent d'un centre ombilical punctiforme ou allongé en ligne, suivant la forme de la vésicule (pl. 4, fig. 1).

(1) Sexualiste, je dirais que l'avortement des cinq carpelles osseux et des dix graines provient de ce que les fleurs de cette variété n'ont que des étamines ou des mâles, et qu'elles manquent de styles terminés par des glandules stigmatiques, ou, en termes plus rationnels, des cordons pistillaires et de vulves ou vagins.

Les étamines des fleurs de la Nèfle sans noyaux ont des anthères qui

En parlant des roches qui se trouvent dans le tissu cellulaire ou dans la chair des Nèfles, j'ai fait remarquer que, contrairement aux Poires et aux Coings, il ne s'en formait point d'isolées ou sous forme de gravier dans le voisinage des loges. Cette différence vient de ce que la Sclérogène, au lieu de s'arrêter à distance des loges et de ne s'accumuler, comme dans les Poires, que dans de petits groupes de vésicules séparés les uns des autres, s'empare, comme dans les fruits à noyaux, de toutes les vésicules du tissu cellulaire les plus voisines de la paroi intérieure des cinq loges, et y constitue, par cette incrustation intérieure et partielle des vésicules, ce que l'on appelle les *cinq osselets* de ce fruit. La même explication s'applique à tous les fruits à noyaux, dont la chair, comme on le sait, n'offre jamais de pierres isolées.

DEUXIÈME PARTIE.

Ce n'est pas sans dessein qu'en parlant, dans la première partie de ce Mémoire, de la formation ou plutôt de l'ossification des noyaux, j'ai qualifié cette enveloppe de cassante indistinctement dans tous les sens. Cela doit être en effet le caractère d'un corps produit par dépôt et sans interruption d'un grand nombre de molécules confusément entassées les

---

contiennent de bonnes vésicules polliniques, lesquelles vésicules sont sans doute susceptibles de s'allonger en de bons et valables boyaux fécondateurs ou producteurs d'embryons, suivant telle ou telle hypothèse. Mais reste à savoir si, dans le dernier cas, les ovaires renferment des ovules nourriciers propres à recevoir et à offrir leur sein aux embryons polliniques.

unes sur les autres, et remplissant complétement des vésicules nombreuses et en simple contiguïté.

Sans cette matière ossifiante, sans la Sclérogène, le bois qui, dans sa jeunesse, n'est composé que d'organes élémentaires mous, flexibles, blancs et diaphanes, n'aurait aucune couleur, aucune dureté et serait fort peu durable. Les arbres ne pouvant se soutenir fléchiraient sous leur propre poids. Tous ramperaient sur le sol. Mais à mesure qu'ils augmentent en tissus nouveaux, les anciens, les plus intérieurs, se remplissent ou s'enduisent intérieurement de Sclérogène, laquelle, comme dans les vésicules du tissu cellulaire des Poires, du Coing et de la Nèfle, pour la formation des pierres ou bien pour celle plus continue des noyaux, les durcit tout en leur laissant cependant une partie de leur élasticité naturelle; élasticité due seulement aux organes contenants et non à la matière contenue qui, par sa nature, est très-cassante.

La couleur propre de la Sclérogène étant la cause de celles que prennent en vieillissant les différents bois, dont les organes creux et constitutifs des masses tissulaires n'ont jamais de couleur par eux-mêmes, toutes ces teintes devaient également se montrer dans le bois et dans l'ossification des noyaux. Aussi en voit-on de blanchâtres, de jaunâtres, de rougeâtres, de brun marron et d'un noir d'ébène comme dans la noix de Coco et de divers autres Palmiers.

M. Dutrochet, dans ses études sur les organes élémentaires des végétaux (1), a reconnu que la solidité des bois était bien moins due à la multiplicité des fibres tubuleuses qu'à la subs-

---

(1) *Mém.*, tom. I, p. 122, 123.

tance qu'elles contiennent et à laquelle elles doivent leur coloration. Des fragments de bois d'Ébène cuits dans l'acide nitrique et examinés au microscope n'offrirent plus à l'auteur que des tubes dissociés, d'un blanc nacré, c'est-à-dire vides ou dépouillés, par l'acide, de leur substance noire et solidifiante (1).

Le beau poli, la dureté, le poids, la coloration et le cassant ou le peu d'élasticité que présente la Sclérogène dans tous les petits ouvrages que l'on exécute avec des noyaux et des noix de Coco (2), tissus dans lesquels elle abonde, prouvent que plus le tissu du bois en contient, plus il est dur, pesant, cassant ou peu élastique, plus il est coloré et susceptible de recevoir un plus beau poli. La Sclérogène, comme on le voit, est aux tissus végétaux ce qu'est le phosphate calcaire aux tissus des animaux. Dans l'un et l'autre de ces tissus ces deux matières, de nature différente, s'accumulent, se concrètent et solidifient les tissus, sans jamais s'y assimiler, mais seulement à la manière des matières dont on se sert dans les injections : aussi se sert-on, avec toute raison, dans ces

---

(1) M. Dutrochet, pour distinguer l'ancien bois qui ne vit plus, du nouveau qui peut-être vit encore, c'est-à-dire du *bois-de-cœur* et de l'*aubier*, a proposé le nom de *Duramen* pour le premier devenu dur et coloré par incrustation de la Sclérogène.

(2) A l'article Bézoard du *Dict. de l'Acad.*, on trouve *Bézoard végétal* avec cette définition : « Concrétion pierreuse que l'on trouve dans les cocos. » Comme cela ne peut être que de la noix dure et osseuse dont on a voulu parler, pourquoi prendre son exemple dans un fruit étranger, lorsque le noyau de la Pêche ou de la Prune offre la même partie? Le Bézoard végétal de l'Académie et sa définition me paraissent deux choses de toute nullité.

deux sortes d'injections ou d'incrustations tissulaires naturelles, des mots ossifié et ossification.

Un autre caractère qui est commun à ces deux matières inassimilables et par conséquent étrangères aux tissus organiques, se fait encore remarquer dans leur mode d'accumulation ou d'ossification.

Dans les jeunes tissus végétaux et animaux, lorsqu'ils sont susceptibles de durée et de se remplir de matière, l'incrustation pariétale et par dépôt commence par des points ou des centres particuliers, d'où ensuite elle s'étend en rayonnant plus ou moins dans des limites et sous des formes déterminées : c'est ce qu'on voit, soit chez les animaux vertébrés, lorsque toutes les parties de leur squelette vivant, mou et organisé, se remplissent comme *accidentellement* de phosphate calcaire, et qu'il devient, par ce moyen, dur et osseux (1), soit chez les végétaux appendiculés, lorsque leurs tissus vivants, mous, diaphanes et sans couleur, s'engorgent de Sclérogène, partiellement sous forme de gravier, comme dans les Poires, ou plus complétement dans l'ossification des noyaux et des noix, ou plus complétement encore dans les tiges, à mesure qu'elles se convertissent en bois de cœur dur et coloré.

Ces points ou ces centres de départ ont toujours lieu par l'incrustation pariétale d'une première vésicule ou de tout autre organe élémentaire creux, faisant partie de la masse

(1) A mesure que le phosphate calcaire arrive dans l'organisation tissulaire d'un jeune animal, il s'y dépose moléculairement et confusément, et il s'y montre suivant les diverses formes déterminées à l'avancé des pièces du squelette organisé vivant et gélatineux, dans lesquelles cette matière inorganique semble appelée et où elle s'accumule plus ou moins.

tissulaire. Dans les végétaux, dont généralement les tissus sont plus rigides que ceux des animaux, rien n'est plus facile que de suivre les progrès successifs de l'ossification. On voit clairement, en prenant une suite d'états différents, que le travail de cet endurcissement a commencé par l'encroûtement pariétal, et souvent par couches d'une vésicule, puis ensuite de contre-en-contre dans les vésicules voisines, et cela, comme je viens de le dire, dans des formes et des étendues toujours déterminées. On peut se demander ici : D'où vient cet arrêt dans le travail de l'incrustation successive des vésicules? Pourquoi toutes les vésicules du tissu cellulaire de la Poire ne s'incrustent-elles pas également, de manière à ne plus offrir qu'une masse ligneuse aussi dure que le noyau? Pourquoi l'incrustation des nombreuses vésicules qui forment la partie organisée des noyaux s'arrête-t-elle brusquement et nettement près de la pulpe composée de vésicules molles et succulentes restées inaccessibles à la Sclérogène solidifiante? Pourquoi, enfin, cette matière s'accumule-t-elle en plus grande abondance dans certains bois plutôt que dans certains autres?

On ne peut pas plus répondre à ces questions qu'à celles de savoir pourquoi, dans certains organes creux, soit végétaux, soit animaux, il se forme constamment des cristaux invariables dans leurs diverses formes, comme dans leurs éléments chimiques, tandis que dans beaucoup d'autres espèces il ne s'en trouve jamais.

Les concrétions pierreuses de la chair des Poires étaient trop sensibles ou trop apercevables, elles dépréciaient trop ces excellents fruits, pour n'avoir pas, dans tous les temps, fixé l'attention de tout le monde, et particulièrement celle des médecins, des physiologistes et des chimistes.

Grew, dans son *Anatomie des Plantes,* nomme, très-ingénieusement, *la Carrière,* l'ensemble des pierres éparses qui se trouvent comme semées ou nichées dans la chair des Poires : il remarque que ces pierres sont étrangères à l'organisation ; qu'elles ne sont que des amas composés de petits nœuds pierreux, d'autant plus durs et d'autant plus nombreux qu'ils sont plus voisins de l'œil de la Poire, et qu'en cet endroit les pierres sont tellement serrées qu'elles semblent, par cette contiguïté, n'en former qu'une seule aussi dure qu'un noyau de Prune. Il pense que l'origine de la carrière, ou des diverses pierres dont elle se compose, est due à des sucs coagulés et endurcis, tel que cela se passe dans la formation des concrétions urinaires, quoique de nature chimique différente.

En parlant des noyaux, Grew dit positivement que la partie extérieure de ces enveloppes osseuses est formée de parties qui se précipitent et se coagulent, comme dans les Poires; mais avec cette différence que dans les noyaux la matière, au lieu de s'y agglomérer en un grand nombre de petites pierres isolées, forme un noyau continu et d'une seule pièce. Il compare, toujours très-ingénieusement, les formations graveleuses des Poires et celles continues des noyaux à ce qui se passe dans l'urine relativement au gravier d'une part, et aux pierres de l'autre.

Il fait encore cette remarque très-juste que, soit entre les petites pierres des Poires, soit dans l'épaisseur du précipité concret des noyaux, il se trouve un mélange de parenchyme. Mais ce célèbre anatomiste ignorait complétement la formation des pierres des Poires et celle des noyaux par l'incrustation particulière, intérieure et pariétale de chaque vésicule;

il croyait que la Sclérogène se précipitait et se concrétait en conglomérations libres.

Cet article est illustré d'une planche (tab. 67) dans laquelle la fig. 4 représente une portion très-grandie de la coupe horizontale d'une Poire. C'est une figure de convention, géométrique, plutôt explicative que vraie, dans laquelle l'auteur a seulement cherché, à l'aide de signes arbitraires, à établir la disposition générale du gisement des pierres par de petits groupes de cercles, et la direction rayonnante des vésicules allongées du tissu cellulaire parenchymateux par des séries moniliformes composées d'une suite croissante d'autres petits cercles, structure tout à fait contraire à la vérité.

Leeuwenhoek, dans son *Anatomie microscopique sur la structure de la Poire* (1), ne fait aucune mention des concrétions pierreuses ni de la disposition rayonnante des vésicules tubuleuses du tissu cellulaire, ou s'il en parle, c'est d'une manière si obscure, qu'il ne m'a pas été possible d'y reconnaître ces deux caractères.

Dans la mauvaise planche annexée à cet article, on ne trouve qu'un pepin, un embryon, une coupe verticale et très-grandie de l'embryon, et un bout de trachée.

Duhamel, dans son *Examen anatomique de la Poire* (2), parle longuement des concrétions lapidiformes des Poires, auxquelles il donne les dénominations de corps aciniformes (3), de roches, d'enveloppes ou de capsules pierreuses,

---

(1) Épist. Phys., tome IV, pages 170, 182.

(2) *Physique des Arbres*, page 242.

(3) D'après Ruysch.

de canal ou de gaîne pierreuse. Sous le rapport de la distribution et de la formation de ces corps, Duhamel n'en dit pas plus que Grew, son devancier. Mais il commet une erreur lorsqu'il considère chaque pierre comme un peloton de vaisseaux très-fins ou comme une glande provenant de la partie terminale des autres vaisseaux. Cette erreur prouve que le microscope dont se servait cet illustre auteur était très-faible, puisqu'il n'a pas pu lui faire voir la vésicule organisée qui enveloppe ou contient la Sclérogène ou la matière concrétée de chaque pierre, et que les rides rayonnantes des vésicules devenues lapidiformes, mal observées, ont pu lui sembler des fibres pelotonnées. Si l'on consulte les figures originales relatives aux concrétions des Poires, figures exécutées sous la direction de Duhamel, on aura la preuve la plus complète du peu de connaissance que cet observateur avait sur la formation et la véritable structure des concrétions, ainsi que sur la disposition et la forme des vésicules rayonnantes composant le parenchyme. On verra, par les figures 227 et 231 de la pl. VIII, qui se rapportent le plus aux détails de ces deux composants, et dont je montre, parmi mes dessins, un calque exact, pl. II, fig. 7 et 7 *a*, que la première est de toute nullité et que la seconde pourrait être facilement prise pour une portion de tige aplatie d'un *Opuntia*, armée de ses aiguillons disposés en faisceau étalé, ou pour un fragment de feuille recouvert de poils étoilés.

Analyse chimique.

Sous le titre d'*Examen des concrétions vulgairement nom-*

mées pierres qu'on rencontre dans les Poires (1), Macquart et Vauquelin, dans l'intention d'être utiles à la chimie et de détruire en même temps une erreur populaire, consistant à croire que les concrétions des Poires, étant de même nature que celles urinaires, pouvaient occasionner la formation des pierres dans la vessie, ont donné conjointement, sur les concrétions pierreuses des Poires, une très-bonne analyse chimique, précédée de ce qu'on savait alors sur la partie physique et physiologique de ces concrétions.

Dans cette analyse on remarque les caractères suivants, qui tous confirment mes observations sur la formation et la véritable structure des concrétions pierreuses des Poires, dans lesquelles, comme je l'ai déjà dit, se trouvent trois parties bien distinctes, savoir : une vésicule de tissu cellulaire, la globuline ou fécule contenue dans la vésicule, et la Sclérogène ou matière indigeste confusément accumulée et mélangée avec les grains de fécule.

De tels corps devaient en effet, sous l'action destructive de l'expérience chimique, montrer : 1° qu'ils brûlent au feu en exhalant une odeur de pain grillé, puisque le pain n'est composé que des deux principales parties des concrétions des Poires, de la vésicule maternelle et de la fécule; 2° que, soumis à une forte ébullition, ils se dissolvent; c'est ce qui arrive à tous les tissus cellulaires végétaux et à leur fécule, chaque fois qu'on leur fait subir la même épreuve : quant à la matière indigeste, ainsi qu'on le sait pour celle qui solidi-

(1) *La Médecine éclairée par les sciences physiques, etc.;* par Fourcroy, tome I, page 232.

fie les tissus flexibles du bois, elle doit également se dissoudre sous la même action ; 3° qu'ils sont ductiles, élastiques et difficiles à pulvériser.

Ces corps, en raison de leur structure, ont tout à la fois le caractère de l'élasticité et celui du cassant; ils sont élastiques par la vésicule organisée et enveloppante, et cassants par la matière indigeste et inorganisée qui encroûte ou remplit la vésicule. C'est ce qui arriverait à une vessie remplie de résine ou de toute autre matière cassante. 4° Qu'ils sont formés d'une matière ligneuse semblable à celle des tissus du bois de l'arbre, confusément cristallisée et dans laquelle se trouve mélangée une petite quantité de fécule amylacée.

Ce dernier composant, qui s'isole sous l'action de l'expérience chimique, prouve combien il est utile, en chimie organique, de connaître préalablement l'organisation microscopique des corps que l'on se propose d'étudier par voie de division.

Si l'on se rappelle que toutes les vésicules du tissu cellulaire d'une très-jeune Poire sont encore vierges sous le rapport de l'incrustation, et que toutes contiennent maternellement leurs nombreux globulins de fécule, il paraîtra tout simple qu'on retrouve dans la vésicule incrustée les grains de fécule qui n'ont pu disparaître, mais seulement enveloppés ou empâtés dans la matière indigeste ou Sclérogène à mesure qu'elle s'est introduite par absorption dans la vésicule.

J'ai dit dans ce Mémoire que je croyais que la formation des concrétions pierreuses par incrustation de la cavité des vésicules du tissu cellulaire des fruits devait être une chose rare dans le règne végétal. Un nouvel exemple vient de s'ajouter au petit nombre de ceux que je connaissais. M. Decaisne, déjà bien connu de l'Académie par les excellents travaux qu'il a publiés, m'a communiqué, tout récemment, des dessins qui représentent des vésicules incrustées qu'il a observées dans le tissu cellulaire du péricarpe du *Lardizabala biternata*, et qui, en même temps, offrent, comme dans celles des Poires, le caractère remarquable d'une sorte d'ombilic central d'où partent, en rayonnant, un grand nombre de petites stries.

Comme on l'a vu, la formation et la solidification des concrétions isolées dans le tissu cellulaire pulpeux des Poires, des Coings et de la Nèfle, celles continues des noyaux, des noix et du bois durci, ont lieu par absorption, par dépôt ou incrustation de la Sclérogène indigeste, inassimilable, qui, peu à peu, remplit partiellement plus ou moins les organes creux et élémentaires des tissus flexibles, toujours diaphanes et sans couleur, de la même manière que s'encroûte quelquefois la paroi intérieure des conduites d'eau, lorsqu'elles sont en fonte.

Des concrétions partielles et isolées comme celles de la chair des Poires, mais d'une matière d'une nature différente, se forment de la même manière dans les vésicules du tissu cellulaire de certains animaux. Là aussi chaque vésicule devient un centre d'attraction et s'ossifie pour son compte en se remplissant successivement de carbonate calcaire.

Lorsque je poursuivais mes recherches relatives à la belle cristallisation des rhomboèdres que j'avais découverts dans l'intérieur des œufs des Hélices, je fus naturellement conduit à examiner des coquilles à leur début, et les coquilles rudimentaires et internes qui se trouvent sous la partie moyenne et gauche du manteau ou du bouclier des Limaces et autres mollusques dépourvus de coquilles extérieures.

Dans les véritables Limaces, je vis que la coquille rudimentaire, pour se former, n'avait eu qu'un centre d'action. Il y avait unité et subordination dans son accroissement, et sa matière élémentaire était amorphe et confuse, quoique disposée par couches. On n'y découvrait aucune cristallisation.

Mais il n'en fut pas de même lorsque ensuite j'examinai ce qui, par position relative, devait être la même partie dans les Arions. Là c'était une petite masse ovoïde, molle, blanche, friable, et comme crétacée (pl. 4, fig. 2). Soumise au microscope, après avoir été étalée dans une goutte d'eau entre deux lames de verre, ce qui, pour l'œil nu, paraissait un corps unique dans sa formation, était au contraire une agglomération composée d'un grand nombre de corps cristalloïdes (pl. 4, fig. 3 et 4) parfaitement isolés les uns des autres. Ces corps ou ces cristaux imparfaits sont très-variables dans leurs formes et leurs grandeurs. Blancs et semi-transparents, ils paraissent assez légers, car on les voit souvent rouler dans l'eau dans laquelle on les observe; plusieurs sont groupés et soudés par deux, trois, quatre, et même en plus grand nombre. Beaucoup sont allongés, cylindroïdes, arrondis ou anguleux aux extrémités; d'autres, comme aplatis, plus symétriques, montrent six pans assez bien caractérisés. La surface de tous, comme dans les concrétions des Poires, offre un centre ombilical punctiforme ou ouvert en disque d'où rayonnent un grand nombre de stries fines et interrompues. Malgré cette grande variabilité de formes, qu'il est plus facile de figurer que de décrire, malgré les angles arrondis ou émoussés de ces corps, on voit que dans l'arrangement des molécules calcaires composantes, il y a eu une intention cristalline non équivoque, arrangement auquel l'élasticité naturelle des vésicules s'est prêtée. Ces corps cristalloïdes, dont la grandeur varie depuis $\frac{1}{200}$ jusqu'à $\frac{1}{10}$ de millimètre, soumis à l'action de l'acide acétique, se dissolvent promptement et ne laissent plus à leur place qu'une enveloppe membraneuse plus ou moins chiffonnée ou plissée, restée insoluble, et dans laquelle on aperçoit quelques-uns des globules de l'organisation qui s'y trouvaient avant le dépôt calcaire (pl. 4, fig. 5 et 6).

La grande analogie qu'offrent les concrétions calcaires et cristalloïdes agglomérées en sphéroïde dans la chair du bouclier des Limaces, désignées sous le nom générique d'*Arion*, avec les concrétions ligneuses des Poires, ou mieux avec les vésicules ossifiées et dissociées de la noix de Coco (pl. 4, fig. 1), me porte à croire que, comme dans la formation de celles-ci, les concrétions partielles du sphéroïde des Arions ont eu pour géode une vésicule du tissu cellulaire du manteau, et que ce sont ces mêmes vésicules organisées qui, inattaquables par les acides, restent intactes après la dissolution complète du carbonate calcaire qu'elles renfermaient.

Ces formations multiples et calcaires, qui n'ont jamais été observées (1), me paraissent autant d'osselets particuliers,

---

(1) Tous les zoologistes qui se sont occupés de l'anatomie des Limaces et des Arions, ayant porté toute leur attention sur les différents organes de ces mollusques, et la plupart ne s'étant point servis de microscopes dans leurs dissections, les corps cristalloïdes des Arions leur sont restés

comparables chacun à celui plus volumineux des Sèches, lequel présente une enveloppe unique et organisée qui, sur le dos de l'osselet, montre un grand nombre de stries progressives, granuleuses, en rapport avec la disposition des couches sous-jacentes et très-analogues avec celles de chacun des petits osselets microscopiques des Arions, qui, très-probablement, sont aussi formés intérieurement de couches superposées d'accroissement.

Entre ces deux sortes d'ossifications il y a, ce qui me semble d'une grande importance en organisation, pluralité de centre d'action et de corps chez l'osselet composé des Arions, et unité d'action et de corps dans l'osselet des Limaces et dans celui des Sèches.

L'osselet de la Sèche, très-petit et microscopique à son début, se forme, comme l'un de ceux des Arions, dans l'intérieur d'une vésicule organisée, susceptible de s'accroître à

---

inconnus; car ce n'est pas connaître que de dire seulement, en parlant des Limaces en général : « Dans l'épaisseur de la partie moyenne et gauche « du manteau est logée, tantôt une plaque calcaire, dure, formée de « couches comme les coquilles ordinaires, tantôt au moins un amas de « particules crétacées et friables. » Cuvier, *Ann. Mus.*, tome VII, 1806, pag. 140, 144.

M. le docteur Casimir Picard d'Abbeville, qui s'occupe avec autant de zèle que d'instruction des diverses productions naturelles de son département, sur lesquelles il a déjà publié plusieurs ouvrages très-remarquables, et à l'amitié duquel je dois la communication d'œufs contenant des cristaux rhomboëdres appartenant à plusieurs espèces d'Hélices indigènes, est le seul, à ma connaissance, qui se soit occupé de l'analyse microscopique de l'osselet composé des Arions, et qui en ait reconnu les corps cristalloïdes, mais sur lesquels, que je sache, il n'a rien publié.

mesure que la partie calcaire intérieure et lamelleuse s'étend unilatéralement du sommet, qui en a été le point de départ, jusque vers la partie inférieure et tranchante où le travail régulier de l'ossification s'est terminé.

La grande ressemblance qui existe entre les osselets calcaires et isolés des Arions et les vésicules remplies de Sclérogène qui forment, par contiguïté, la noix de Coco (1), prouve que chaque osselet de la masse crétacée des Arions a eu pour lieu de dépôt et de formation particulière une vésicule organisée du tissu cellulaire de l'animal.

CONCLUSIONS.

Des recherches contenues dans ce Mémoire il résulte :

1° Que le tissu cellulaire parenchymateux de la Poire, du Coing et de la Nèfle, si caractérisé par la présence des concrétions pierreuses ou des noyaux ligneux isolés et par la disposition rayonnante des vésicules tubuliformes, diffère entièrement de celui de la Pomme, toujours dépourvu de concrétions, et dont les vésicules sphéroïdes sont simplement agglomérées;

2° Que les concrétions pierreuses de la chair de la Poire, du Coing et de la Nèfle, sont formées d'un nombre variable de vésicules contiguës incrustées intérieurement par la Sclé-

---

(1) Les formes irrégulières, polymorphes, la grandeur variable et le granulé des vésicules de la noix de Coco, dissociées par la cuisson dans l'acide nitrique, et remplies de Sclérogène, leur donnent l'aspect d'un amas de Paramœcies (pl. 4, fig. 1).

rogène, matière indigeste qui les ossifie en les rendant dures et cassantes ;

3° Que la formation, la dureté et le cassant dans tous les sens des noix et des noyaux, ne diffère de celle des concrétions partielles des Poires qu'en ce que dans les fruits à noyaux toutes les vésicules du tissu cellulaire les plus rapprochées de la cavité du jeune fruit se remplissent également et uniformément de Sclérogène. C'est une ossification continuée ou sans interruption ;

4° Que les organes creux et élémentaires, mous, flexibles et herbacés des jeunes tiges ne s'endurcissent et ne deviennent bois qu'en s'encroûtant intérieurement de la même matière ;

5° Que la dureté, la compacité et le cassant des bois sont principalement dus à l'introduction et au dépôt d'une plus ou moins grande quantité de Sclérogène;

6° Que les organes élémentaires des tissus organiques, toujours incolores, diaphanes, inodores, insipides et innocents par eux-mêmes, doivent leurs couleurs, leur opacité, leurs odeurs, leurs saveurs et leurs qualités bonnes ou mauvaises aux matières étrangères suspendues dans l'eau, toujours pure par elle-même, ou concrétées, par évaporation, dans les divers creux ou espaces des masses tissulaires. C'est ainsi que, comme organes plus nouvellement nés, les fécules qui n'ont encore absorbé que la matière qui s'est assimilée à leur organisation, sont éminemment nutritives, qu'elles manquent tout à la fois d'odeur, de saveur et de qualités malfaisantes, quel que soit le végétal dont elles ont été extraites, pourvu que dans quelques cas on leur fasse subir des lavages;

7° Que la Sclérogène comme matière organique, mais sans organisation vitale, comme n'ayant été qu'absorbée par la succion des organes tissulaires, comme n'étant qu'un simple dépôt qui n'a joui d'aucune espèce d'assimilation, comme entièrement étrangère à l'organisme et à la vie, dont cependant elle dépend; la Sclérogène incolore, ou colorée, offrant moins de cohésion entre ses molécules qu'entre celles qui forment les organes élémentaires des tissus, se dissout plus facilement en abandonnant ses contenants organisés, différence favorable à l'extraction de la Sclérogène colorée et tinctoriale des bois de teinture.

Que la Sclérogène est une matière aussi étrangère à l'organisation tissulaire des végétaux que celle des concrétions urinaires, celle du carbonate et du phosphate de chaux, etc., le sont aux tissus des animaux.

Mais ce qu'il est important de ne pas perdre de vue, c'est que l'accumulation de ces matières inorganiques dépend d'un organisme particulier, soit chez certaines espèces, soit seulement chez certains individus, où encore cette faculté peut être constante pendant la vie ou simplement momentanée.

8° Que le dépôt de toutes ces matières étrangères à l'organisme, soit à l'état confus, soit à l'état cristallisé, a toujours lieu partiellement sous l'abri protecteur, le plus souvent d'une vésicule, et quelquefois d'un tube, comme dans le bois des végétaux;

9° Que toute espèce d'ossification, soit végétale, soit animale, est identique en ce qu'elle provient toujours de l'introduction d'une matière hétérogène aux tissus, matière qui leur nuit en les incrustant, mais aussi qui sert à l'ensemble de plusieurs espèces de végétaux et d'animaux, en les solidifiant et en leur donnant une sorte de charpente, sans laquelle ils seraient tous forcés de ramper;

10° Qu'enfin rien ne me paraît plus propre à démontrer la marche que suit l'ossification des os en général, par dépôt de phosphate de chaux dans chaque cellule ou vésicule du tissu encore gélatineux du squelette, que l'ossification en noyau ou en noix de la partie interne du tissu cellulaire d'une Pêche, d'un Abricot ou du Coco, dont les vésicules, partiellement incrustées de Sclérogène, peuvent être dissociées et parfaitement isolées les unes des autres par la cuisson dans l'acide nitrique.

A cette démonstration j'en ajouterai une autre plus convaincante encore en ce qu'elle a lieu dans un tissu cellulaire animal. Rien de plus ressemblant aux points d'ossification naissante des os ou à ces ossifications adventives qui se montrent parfois dans les parties molles, que le corps ovalaire et crétacé qui se forme sous le manteau des Arions. Ce corps, composé, comme on l'a vu, d'une agglomération de vésicules incrustées de carbonate de chaux, explique merveilleusement le travail de l'ossification par l'incrustation partielle de chacune des cellules composant, par agglomération, le tissu gélatineux et vivant du squelette avant son obstruction calcaire.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

Fig. 1. Morceau d'épiderme détaché d'une Passe-Pomme rouge. Il se ompose, par contiguïté, d'un grand nombre de vésicules irrégulières, dans lesquelles sont renfermés des globulins souvent teints en rouge.

Fig. 2. Une certaine quantité de vésicules simplement contiguës, variables de formes et de grandeurs, transparentes, incolores, contenant dans leur intérieur une globuline assez peu nombreuse et de grosseurs différentes. Ces vésicules, qui en outre sont remplies d'eau et d'air, ont été isolées du tissu cellulaire de la même Pomme. *aa* deux vésicules déchirées et répandant leur globuline; *b* une vésicule moyenne placée sur une échelle composée de 16 centièmes de millim., ce qui indique que sa grandeur réelle est d'environ $\frac{1}{6}$ de millim.

Fig. 3. Une agglomération de vésicules détachées du tissu cellulaire d'une Pomme de Calville blanc. Ces vésicules ne diffèrent des précédentes qu'en ce que, dans leur intérieur, plusieurs des globulins ont plus ou moins grandi. *aaa* vésicules maternelles normales, dans lesquelles les globulins n'ont pris que l'accroissement accoutumé. *bbb* vésicules maternelles prolifères, dans le sein desquelles plusieurs globulins ont végété et acquis des dimensions remarquables. *c* une vésicule dans l'intérieur de laquelle deux globulins accrus remplissent la presque totalité de la vésicule maternelle. *d* une vésicule déchirée et laissant échapper la globuline.

Observation. La globuline, rare et assez rudimentaire, contenue dans les vésicules du tissu cellulaire des Pommes, est incolore, ou colorée en rose dans la chair de cette couleur, et en roux par le contact de l'oxygène, soit par l'exposition à l'air du tissu, soit lorsque le tissu pourrit et se décompose.

Fig. 4. Quelques vésicules maternelles, agglomérées et isolées de la partie charnue d'un Melon. Ces vésicules, qui ressemblent beaucoup aux précédentes, sont presque toutes prolifères. Parmi un assez grand nombre de globulins jaunes et très-ténus, on en voit quelques-uns qui ont végété, et dont plusieurs ont donné naissance, dans leur intérieur, à une nouvelle génération de globulins, tantôt incolores et tantôt colorés en jaune. *a* vésicule maternelle du tissu cellulaire; *b* vésicule née, intérieurement, d'un globulin privilégié; *c* globulins de la troisième génération.

Observation. La couleur jaune de la chair du Melon, est due à la présence et à la couleur propre des globulins. Ces globulins, analogues à ceux que, dans d'autres tissus cellulaires, on nomme fécule, concentrant en eux-mêmes la substance la plus nutritive du végétal, on doit, quand on achète du Potiron comme aliment, choisir le plus jaune.

PLANCHE 2.

Fig. 1. Une fleur de Poirier de Saint-Germain, de grandeur naturelle, dont on a supprimé les cinq pétales, et par conséquent réduite à son ovaire inférieur, aux divisions de son calice, à ses étamines et à ses cinq pistils.

Fig. 2. Le même ovaire, coupé horizontalement pour faire voir les cinq loges et les deux ovules dans chacune d'elles, plus la situation relative des dix faisceaux de fibres qui forment plus tard la charpente ligneuse des Poires.

Fig. 3. Une petite masse de tissu cellulaire de l'ovaire, composée de vésicules distinctes et en simple contiguïté, transparentes, remplies de globulins rudimentaires, légèrement jaune-verdâtre, devenues plus ou moins polyèdres par pression mutuelle, et par conséquent faute d'espace. Quoique très-minces, elles laissent voir un double trait dans leur contour, qui indique leur épaisseur. Trois de ces vésicules ont été isolées de l'agrégation pour mieux faire sentir l'indépendance organique et vitale dont jouissent, dans les tissus cellulaires, chacun de ces organes vésiculaires et élémentaires des masses.

Observation. Les globulins exposés à l'air et à l'action de l'oxygène, prennent promptement la couleur ferrugineuse.

Fig. 4. Coupe verticale d'une Poire de Saint-Germain, représentée de grandeur naturelle.

Dans cette coupe on distingue le gisement des pierres. On voit qu'il en existe une couche sous la peau, que c'est particulièrement autour de l'axe central et des cinq loges qu'elles sont plus grosses et plus multipliées, mais qu'entre ces deux stations le reste du tissu ou de la chair en contient aussi. *a* pédicule ou queue du fruit; *b* ce petit renflement indique un nœud vital, duquel aurait pu résulter une petite feuille, et même un rameau rudimentaire, si la vie ne s'y était pas éteinte; *c* l'œil formé de quelques-uns des organes de la fleur, desséchés et persistants.

Observation. Les pierres, ou rochers, se distinguent de la chair pulpeuse, non-seulement par leur forme et leur saillie, mais encore par leur couleur jaunâtre. Celles si nombreuses qui avoisinent les loges, forment une sorte d'enveloppe qui explique celle plus complète ou plus achevée des noyaux osseux.

Fig. 5. Agglomération de vésicules plus ou moins anguleuses, incolores, contenant des globulins et ayant fait partie de l'épiderme de la Poire.

Fig. 6. Quatre pierres, ou rochers, entourées de leurs vésicules rayonnantes, isolées de la chair ou du tissu cellulaire de la Poire, et vues au microscope. Chaque pierre, ou petit rocher, se compose d'un nombre variable de vésicules, d'abord semblables à celles de la figure 3, agglomérées en sphéroïde, et qui se sont plus ou moins remplies ou incrustées de Sclérogène, de manière à devenir opaques, dures et assez résistantes sous la dent. Autour de ces petits rochers ligneux, toujours plus ou moins espacés entre eux, rayonnent en tout sens des vésicules tubuleuses, en forme de massue, transparentes et incolores, contenant des globulins rudimentaires vers leur extrémité et remplies en outre de l'eau de la Poire.

Ces vésicules, qui dans l'origine ressemblaient pour la forme à celles incrustées, ou à celles de la figure 3, se sont allongées en profitant de l'espace résultant de l'accroissement de la Poire. *6a*, *6a*, *6a*, Pierres plus ou moins isolées entre elles et des vésicules allongées et rayonnantes. Les trois supérieures du premier groupe offrent un ombilic élargi en disque Dans le groupe situé au bas de la planche, se voient deux pierres qui semblent offrir chacune deux ombilics : c'est qu'il y a deux individus soudés par approche. Au-dessous de ces pierres s'en trouvent sept autres, également soudées en deux séries. Où la tératologie ne se rencontre-t-elle pas? Partout où des tissus organique vifs et analogues, destinés à l'isolement, viennent à se toucher assez longtemps et qu'ils se soudent par approche. Que cette action si simple, si naturelle, ait lieu entre des tissus végétaux ou entre des tissus animaux, elle est identiquement la même. Il n'y a pas plus à admirer, pas plus à espérer, pas plus à découvrir, suivant nous, dans le collage physiologique des deux jumelles de Prunay, que dans celui de deux doigts, de deux Pommes, de deux feuilles, etc. Ce très-simple cas anormal nécessitait, tout au plus, d'être enregistré dans les annales de la science.

Observation. Pour rendre mes figures plus intelligibles, j'ai omis à dessein de mettre en-dessus les mêmes vésicules allongées qui rayonnent autour de ces quatre rochers.

Pourquoi l'incrustation n'a-t-elle lieu que chez un certain nombre de vésicules agglomérées en nombre variable? pourquoi s'arrête-t-elle nettement de manière à laisser des espaces entre les rochers?

La vésicule, voyez la figure 3, étant naturellement élastique et contenant des globulins féculants, puis se remplissant de Sclérogène, cela explique comment les rochers sont tout à la fois élastiques et cassants, et comment leur analyse chimique peut isoler et montrer une portion de fécule.

Fig. 7 et 7*a*. Duhamel, comme on le voit par ces figures, rigoureusement calquées sur les siennes, avait, dans son *Examen anatomique de la Poire*, entrevu la singulière structure du tissu cellulaire des Poires. Figure 7, un morceau de tissu, avec indication de rochers et de vésicules rayonnantes, plus nombreuses, mais semblables aux quatre de la figure 6.

Figure *7a*. Il faut deviner que c'est un rocher entouré de ses vésicules ; mais on ne peut se rendre compte de l'espèce de fibre rameuse qui s'en échappe.

PLANCHE 3.

Fig. 1. Une Poire de Messire-Jean, de grosseur naturelle, et dont on a enlevé une portion de l'épiderme pour faire voir la couche des innombrables petits rochers qui semblent sabler la surface de la chair. *a* queue ; *b* calice persistant et couronnant le fruit; *c* couche pierreuse.

Fig. 2. Morceau d'épiderme, composé de vésicules contiguës, incolores, polyèdres par pression mutuelle, remplies de globulins très-rudimentaires, et d'un ou de deux noyaux roux et opaques. *aaaa*, quatre de ces vésicules isolées et vues à un plus fort grossissement.

Observation. Les noyaux roux sont dus à des globulins privilégiés qui ont végété dans la vésicule maternelle, et qui, de leur intérieur, ont produit une nouvelle génération de globulins colorés. C'est à la présence et au grand nombre de ces noyaux qu'est due la couleur rousse de la peau des Poires de Messire-Jean.

Fig. 3. Six rochers avec leurs vésicules rayonnantes, pris parmi ceux situés sous l'épiderme. Parmi les vésicules rayonnantes, on en voit qui sont articulées, c'est-à-dire, dont l'extrémité d'une première vésicule en a poussé une seconde. Les vésicules composant les rochers sont incrustées d'une Sclérogène d'un brun-roux, et celles allongées qui rayonnent, contiennent vers leurs extrémités des globulins très-ténus.

Fig. 4. Un rocher isolé, avec ses vésicules rayonnantes, pris dans le centre de la chair de la Poire. Là tout est plus grand, et les vésicules rayonnantes sont uniques ou d'une seule venue. Quelques-unes des vésicules incrustées, situées sur le bord du rocher, sont transparentes. *4a*, quelques pierres isolées, dont cinq soudées côte à côte ; *4b*, un Acarus trouvé, avec plusieurs autres semblables, sous l'épiderme de la Poire. Ils étaient remarquables en ce qu'ils n'avaient que quatre membres appendiculaires.

Fig. 5. Un rocher, avec ses vésicules rayonnantes, isolé de la chair d'un fruit de Cognassier. Très-semblable à ceux des Poires, ce rocher n'en diffère qu'à cause de ces pierres moins opaques, et dont l'ombilic est très-discoïde. Plusieurs des vésicules rayonnantes sont articulées ou composées de deux vésicules nées l'une de l'autre.

Fig. 6. Une graine mucilagineuse du Coing, représentée de grandeur naturelle.

Fig. 7. Une portion du tégument de cette graine, vue au microscope pour indiquer que ce qui paraît à l'œil nu un simple mucilage, est un véritable système pileux, dont chaque poil est tubuleux, incolore, d'une transparence extrême, généralement en forme de coin, contenant de l'eau et bien rarement quelques globulins très-ténus. 7*a*, 7*b*, 7*b*.

Fig. 8. Un rocher entouré de ses vésicules, isolé de la chair d'une Nèfle. On voit que c'est toujours le même système d'organisation que dans les Poires et les Coings; mais ici les pierres sont plus grandes, mais aussi moins nombreuses dans chaque rocher; elles sont plus transparentes, et leur ombilic est discoïde et très-ouvert. Les vésicules rayonnantes sont plus robustes, souvent articulées, de formes obtuses très-variées, totalement remplies de globulins ponctiformes, parmi lesquels on en aperçoit de plus gros. 8*a*, 8*a*, 8*a*, vésicules de formes diverses, isolées et détachées d'un rocher. Les deux traits qui les bordent, indiquent leur notable épaisseur. 8*b*, deux pierres de formes et de grandeurs diverses, placées sur une échelle micrométrique, représentant $\frac{7}{100}$ de millimètre, ce qui fait connaître que la grandeur réelle de ces pierres est d'environ $\frac{1}{14}$ de millimètre.

Observation. Le bord de ces pierres, ou bien mieux de ces vésicules incrustées de Sclérogène, est épais et comme crénelé. Le disque, très-grand, est parsemé de points tuberculeux et opaques, d'où rayonnent de petites lignes qui, en se rencontrant, simulent un réseau.

PLANCHE 4.

Fig. 1. Vésicules de grandeurs et de formes variables, solidifiées par absorption, sécrétion et incrustation de Sclérogène colorée, ayant fait partie, par contiguïté, d'une noix de Coco, et ayant été isolées par l'action de la chaleur dans l'acide nitrique.

Observation. Il est facile de reconnaître la grande analogie qui existe entre l'incrustation de la Sclérogène dans ces vésicules, et celle des pierres du tissu cellulaire des Poires, des Coings et des Nèfles. On y reconnaît également l'épaisseur de la vésicule, cette espèce d'ombilic qui n'indique autre chose que le centre de la vésicule vers lequel l'enduit pariétal a marché en s'épaississant. On y distingue aussi des points opaques et de petites lignes rayonnantes.

Pour dissocier toutes les vésicules incrustées qui, par contiguïté, constituent la noix si dure d'un Coco, il faut la casser par petits morceaux, que l'on plonge ensuite dans un petit bocal rempli d'acide nitrique, et qu'après avoir été bouché on fait bouillir dans de l'eau ordinaire. C'est ainsi que l'on peut isoler toutes les individualités particulières qui font partie de l'individualité composée d'un morceau de bois. La noix de Coco doit sa couleur noire, sa dureté et son poli à la Sclérogène qui obstrue toutes les vésicules de son tissu cellulaire.

Fig. 2. Corps ovoïde, blanc et crétacé, qui se forme sous le manteau des Limaces du genre *Arion*, représenté de grandeur naturelle. Ce corps est une simple agglomération de vésicules incrustées de carbonate de chaux.

Fig. 3. En froissant seulement ce corps, mis dans un peu d'eau entre deux lames de verre, tous ses éléments vésiculaires s'éloignent et s'isolent. Alors on peut les étudier au microscope dans toutes leurs formes extrêmement variées, et, comme on le peut voir, bien plus faciles à figurer qu'à décrire; plusieurs sont simples, tandis que beaucoup d'autres sont groupées et soudées plusieurs ensemble. Il semble que les molécules du carbonate de chaux, en s'introduisant dans les vésicules du manteau des Arions, aient eu une tendance à s'y arranger sous la forme cristalline. On ne peut s'empêcher d'être frappé de l'analogie que présente cette incrustation calcaire, avec celle de l'incrustation de Sclérogène dans certaines vésicules et dans certains tubes des végétaux. Même ombilic et mêmes petites lignes ou rides rayonnantes. Parmi ces vésicules, remplies de carbonate calcaire, on voit une sorte de Pulviscule.

Fig. 4. Plusieurs vésicules calcaires, de formes et de grandeurs différentes, placées sur une échelle micrométrique, représentant $\frac{10}{100}$ de millimètre. *ab*, vésicules simples de $\frac{1}{200}$, de $\frac{1}{100}$ et de $\frac{1}{50}$ de millimètre. *cd*, vésicules simples, de forme cristalloïde, grandes, l'une d'environ $\frac{1}{17}$ et l'autre $\frac{1}{10}$ de millimètre. *efg*, vésicules groupées et soudées par approche.

Fig. 5. Deux vésicules soudées, sur lesquelles on a agi à l'aide de l'acide acétique, et dans l'intérieur desquelles le carbonate calcaire est déjà réduit.

Fig. 6. Trois vésicules, soumises plus longtemps à l'action du même acide, et chez lesquelles tout le carbonate calcaire a disparu, de manière à ne laisser que les membranes organisées des vésicules sur lesquelles l'acide n'avait aucune prise. Dans l'intérieur de la vésicule inférieure on voit quelques globules qui appartenaient probablement à la graisse de l'animal.

MÉMOIRE

SUR LA CAUSE ET LES EFFETS

DE LA

FERMENTATION[1]

ALCOOLIQUE ET ACÉTEUSE.

Par M. TURPIN.

Lu à l'Académie en sa séance du 20 août 1838.

Comme physiologiste et comme nous étant, depuis longtemps, occupé de l'étude des corps organisés microscopiques, nous nous sommes associé à la belle découverte de M. Cagniard-Latour, parce que nous en avons reconnu, dès le début, toute l'exactitude, toute la portée scientifique, soit qu'on la consi-

---

(1) Fermentation comme effet et végétation comme cause, sont deux choses inséparables dans l'acte de la décomposition du sucre.

dère sous le rapport de la physique, de la chimie et de la physiologie, soit sous celui de la fabrication industrielle; car, comme on le sait, de la connaissance approfondie des corps sur lesquels on opère, résulte toujours leur meilleur emploi.

La physiologie végétale jouant le principal rôle, le seul peut-être dans cette découverte, nous avons pensé qu'à la physiologie seule appartenait de porter la lumière dans l'acte jusqu'alors si mystérieux ou si obscur, de la fermentation.

C'est dans cette vue que, depuis une année, nous nous sommes constamment livré aux recherches expérimentales et aux observations microscopiques qui font l'objet de ce Mémoire.

En ne nous occupant d'abord que de la fermentation de la bière, nous avons successivement examiné au microscope (1): 1° le Périsperme de l'Orge avant et après la germination de l'embryon; 2° la Trempe; 3° la Lupuline du Houblon; 4° le Moût, composé de la Trempe et du principe amer de la Lupuline; 5° la Levûre (2) fraîche avant sa mise en levain ou avant d'être versée dans le Moût; 6° la même Levûre suivie dans toutes

(1) Toutes nos observations ont été faites à l'aide de l'excellent et très-commode microscope vertical, à table tournant sur son axe, de MM. Trécourt et Georges Oberhaeuser, avec les grossissements de deux cent soixante à trois cents fois, maximum de nos microscopes actuels quand il s'agit de bien voir et de faire de bonnes et sérieuses observations.

(2) La dénomination de Levûre, sans que l'on s'en soit douté, se trouve maintenant doublement bonne, car elle exprime deux caractères à la fois : celui des seminules qui *lèvent* ou germent, et celui du liquide ou de la pâte *soulevée* par le dégagement des bulles d'acide carbonique et de la chaleur qui résulte, comme effet, de la végétation des seminules de la Levûre.

les phases de la végétation des globules seminulifères dont elle se compose pendant la durée de la fermentation dans la cuve; 7° la Bière terminée; 8° la Levûre nouvelle ou reproduite.

Comme production due à un plus grand achèvement de la végétation des seminules de Levûre, nous avons ensuite étudié ces prétendues matières mucilagineuses (1) qui se forment peu à peu à la surface, soit de la Trempe, soit du Moût, soit de la Bière, soit du Lait, soit enfin de tous les liquides fermentescibles en contact avec l'oxygène, mucilages que les botanistes mycologues désignent sous le nom de *Mycoderma* (2) ou d'*Hygrocrocis*.

Toujours dans l'intention de nous éclairer de plus en plus par l'analogie, nous avons observé, heure par heure, le développement des Levûres produites par le blanc d'Œuf, par les jus de Pommes, de Raisin, et autres fruits pulpeux, et enfin nous avons terminé cette série de recherches microsco-

---

(1) La dénomination de matière mucilagineuse, bonne tout au plus à l'œil nu, pourrait laisser croire que ce mucilage en apparence n'est qu'une substance homogène, continue dans ses éléments moléculaires, qu'une substance organique sans organisation appréciable, que le chaos ou les simples matériaux élémentaires de l'organisation.

Dans le cas dont il s'agit il y a beaucoup plus que cela. C'est bien de la matière organique, mais c'est de la matière organique employée sous l'influence de la vie dans la construction de diverses espèces de végétaux infusoires, qui tous appartiennent à la famille des Mucédinées (Mucors ou Moisissures). C'est une immense forêt, composée de petits végétaux microscopiques, dont chaque individu provient de l'un des innombrables globulins suspendus dans toutes les eaux susceptibles de fermenter, et dont la cause de la fermentation est due au développement de ces végétations.

(2) *Mycoderma cervisiæ*, Desmaz.

piques par celle de la Mère ou du *Mycoderma* du Vinaigre (1).

Avant d'aller plus loin, nous éprouvons le besoin de dire que l'une des causes qui nuit le plus à l'enseignement des sciences et à leur avancement, se trouve dans ce qu'une même chose est considérée tout différemment suivant l'esprit et les besoins particuliers de chaque science, besoins qui amènent tout naturellement diverses dénominations. Ce mal s'étend jusque dans les sciences spéciales. De là ces synonymies fort embrouillées qui bouleversent les idées, qui dégoûtent de l'étude si simple des choses, et qui sont aux sciences ce que la rouille est au fer.

Le tissu cellulaire végétal, quelque part qu'on l'observe, est une agglomération de vésicules maternelles distinctes en organisme et en vitalité (pl. 1, fig. 4). De la paroi intérieure de ces vésicules naissent, par extension, des globules *organisés* (2), véritables gemmules internes et reproductrices, soit de la vésicule maternelle, soit de la plante, en passant

(1) *Mycoderma vini*, Vallot, *Ulvina aceti*, Kütz.

(2) Nous devons prévenir que, ne connaissant point où s'arrête l'organisation et la vie chez les corps organisés, qui, suivant nous, sont formés de corps organisés plus simples, ayant tous leur centre vital particulier d'action, tout en contribuant plus ou moins à l'action générale du végétal ou de l'animal, nous considérons le globule et la fibre élémentaire des masses tissulaires, le globule des diverses sécrétions, le poil, etc., comme autant d'individus organisés à l'aide de leurs propres composants; individus tellement indépendants entre eux, que les uns peuvent mourir successivement et se décomposer dans l'organisation générale, comme cela se voit parfois chez le poumon, sans que les autres en souffrent ou semblent s'en apercevoir dans leur vitalité, ou quelquefois en être séparés

par l'état de bulbille; soit, étant isolées et plongées dans un liquide sucré, d'un végétal infusoire, mucédiné et filamenteux dans les fermentations. Ces globules organisés, ces bulbilles intestinales (fig. 5), tous d'origine identique, tous émanant de la paroi d'une vésicule de tissu cellulaire, ont été méconnus comme organe fondamental et élémentaire dans les masses tissulaires végétales, à cause des diverses couleurs qu'ils sont susceptibles de prendre, des divers développements auxquels ils peuvent arriver selon la nature des influences extérieures, de leurs diverses qualités chimiques, et enfin à cause du défaut de bonnes observations microscopiques comparatives. Il est donc bon, pour l'intelligence du sujet de ce Mémoire, que l'on sache que les globules contenus dans les vésicules du tissu cellulaire végétal sont nommés par les chimistes : *Fécule, Amidon, Levûre, Ferment, Chlorophylle* (1), etc.; par les physiologistes : *Fécule, Globuline, Sphériole, Chromule* (2), etc.

---

vivement et en grandes masses, comme dans les amputations majeures opérées sur des végétaux ou sur des animaux.

Comme on le voit, tous les corps temporaires, formés dans l'espace, soit les inorganiques, soit les organisés muqueux, sont assujettis à la même loi de composition; tous ne sont que des agglomérations plus ou moins compliquées, plus ou moins étendues, plus ou moins durables, de corps plus simples, doués, chacun, de son centre d'action. Où est la vie? partout; mais, comme la chaleur, inégalement répartie, inégalement et temporairement accumulée en foyers distincts et variables, suivant la nature intime des corps qu'elle imprègne, qui la retiennent, et suivant certains points des mêmes corps.

(1) Lorsque le globule organisé est détruit par l'action chimique.

(2) Dénomination bonne tout au plus pour les globules vus de loin,

Bien convaincu de l'insuffisance des descriptions, même les plus détaillées, quand il s'agit de faire connaître les formes et les couleurs si variées des corps, et plus particulièrement lorsque ces corps sont microscopiques, nous avons cru nécessaire d'appeler à notre secours l'Iconologie, en figurant tous les composants qui peuvent servir à prouver l'origine, la nature et les divers développements des Levûres.

---

c'est-à-dire à la vue simple, et alors pouvant être considérés comme une matière colorante, ainsi qu'on pourrait aussi dire que le sol est quelquefois coloré en rouge par la présence de nombreux coquelicots.

Entre celui qui n'observe les corps temporaires qu'à l'œil nu ou avec une simple loupe, et celui qui les étudie à l'aide du microscope composé, il n'y a aucun moyen de se comprendre. Tous les deux ont des idées toutes différentes et doivent, par conséquent, s'exprimer tout autrement en parlant d'une même chose vue de fort loin par l'un, et de fort près par l'autre. Le premier, placé très-haut, soutiendra qu'il a vu et bien vu sur le sol une grande membrane fauve, avec un mouvement général de simple trémulation, tandis que le second, les pieds sur la terre, attestera qu'il a reconnu, dans la prétendue membrane tremblottante, un grand troupeau composé de bœufs et doués de leurs mouvements individuels. C'est ainsi que là où le mycologue ne voyait, avec les yeux, qu'un mycoderme dans les membranes informes et gélatineuses qui se forment à la surface des liquides fermentescibles, et le chimiste une simple matière mucilagineuse dans les Levûres, l'observateur micrographe trouvait l'existence d'un nombre prodigieux d'individus organisés de tout âge, végétant en filaments mucédinés, et n'ayant de commun entre eux, comme les arbres d'une forêt, que de vivre en masse sur le même territoire et sous les mêmes influences. Les mêmes choses, vues à des distances si différentes, ont dû nécessairement être fort différemment conçues, fort différemment dénommées par les naturalistes, ce qui a souvent mis dans l'impossibilité de se comprendre sur la véritable nature des mêmes objets.

§ I.

Du tissu cellulaire du Périsperme de l'Orge commune, trempé dans l'eau.

Sous les enveloppes dures et écailleuses d'un grain d'Orge (fig. 1, 2 et 3 *b.*) on trouve la graine; sous l'enveloppe de celle-ci (1), une masse de tissu cellulaire qui en est le Périsperme et à la base duquel est situé extérieurement et latéralement l'embryon. Ce tissu cellulaire, dans lequel réside presque toute la matière nutritive des céréales, est formé d'une agglomération de vésicules maternelles, incolores et diaphanes, variables de formes et de grandeurs, quoique généralement ovoïdes; elles contiennent une grande quantité de globulins ou grains de fécule. Lorsque les vésicules mères se déchirent, elles versent dans l'espace toute leur fécule et ne

---

Cette difficulté est bien autrement grande lorsqu'il s'agit de discuter, avec la plupart des chimistes qui ne font point encore usage du microscope, sur des corps qui ne peuvent être appréciés que par cet instrument. Autant vaudrait mettre en rapport deux hommes parlant deux langues fort étrangères l'une à l'autre. Ces difficultés disparaissent chaque jour; les jeunes gens qui se destinent à l'étude des différents corps temporaires de la nature sentent tous le double besoin de l'inspection microscopique et de l'art du dessin dans le signalement des corps, comme étant le plus expressif et comme devant, dans l'ordre naturel des choses, précéder celui du discours ordinaire.

(1) Dans cette enveloppe se trouvent le Péricarpe et le tégument de la graine, intimement unis par un simple collage.

paraissent plus ensuite que comme des chiffons (fig. 5, *a.*)(1). La fécule très-abondante varie en grosseur depuis le point apercevable jusqu'à environ un $\frac{1}{50}$ de mill., et, comme toutes les fécules, particulièrement celle de Pomme de terre, cette fécule commence à être sphérique, puis, en grossissant et en se gênant mutuellement dans la vésicule maternelle, elle devient ovoïde et quelquefois obtusément triangulaire. Sa transparence est si grande, que lorsque deux grains se croisent, le contour de la partie de celui placé en-dessous se dessine aussi nettement que si ce grain était isolé. Les grains, même les plus gros, n'offrent jamais à la vue le point hilaire ou ombilical par lequel ils ont adhéré à la paroi intérieure de la vésicule maternelle. On ne voit point non plus ces espèces de zones concentriques ou d'accroissement qui se remarquent sur les grains de fécule de la Pomme de terre et de quelques autres espèces. Quelques légères dépressions, occasionnées par la gêne que ces grains ont éprouvée dans leur accroissement, se montrent seulement à leur surface. Tous ces grains, comme nous l'avons déjà démontré ailleurs et comme nous le prouverons incessamment par de nouveaux faits, sont, dans toute la rigueur de l'expression, de véritables *bulbilles* intestinales et microscopiques qui, sous certaines influences favorables à leur développement, peuvent germer et reproduire la plante mère, ou, étant isolés et plongés dans un liquide sucré, faire l'office de Levûre en germant ou en végétant sous la forme très-amoindrie d'une

(1) Ce sont ces mêmes chiffons qui, étant agglomérés, forment, en grande partie, le gluten des chimistes.

mucédinée filamenteuse. Les plus petits et les plus nombreux de ces grains bulbifères offrent, au microscope, un mouvement de fourmillement non équivoque (1).

§ II.

Du tissu cellulaire du Perisperme de l'Orge germée, trempé dans l'eau.

Le changement le plus remarquable survenu dans les grains d'Orge était la germination plus ou moins avancée des embryons. Terme moyen, cette germination consistait dans le développement extérieur de deux à cinq petites radicelles filiformes, longues de quelques lignes (pl. 1, fig. 3, *c.*), et dans celui intérieur, peu considérable, du cotylédon engaînant et de la gemmule. Les vésicules du tissu cellulaire étaient les mêmes, mais les grains de fécule paraissaient généralement avoir perdu de leur substance; ils étaient plus transparents et plus flasques. L'embryon, en se développant un peu, s'était-il nourri aux dépens de la substance saccharine con-

(1) Les grains de globuline ou de fécule qui naissent, par extension, aux parois intérieures des vésicules maternelles dont se composent les tissus cellulaires végétaux, sont, comme nous l'avons annoncé depuis longtemps, de véritables *bulbilles internes* qui, dans certaines conditions favorables à leur végétation, peuvent, en continuant de se développer, reproduire la plante qui leur a donné naissance, comme nous en avons donné un très-bel exemple dans celles des feuilles de l'*Ornithogalum thyrsoides*.

Ces innombrables bulbilles intestinales et microscopiques, d'abord tenue dans le Périsperme? On ne peut en douter, et c'est pour cela qu'après avoir été le véritable acteur, le véritable excitateur de la formation du sucre dans le Périsperme, il en devient le décompositeur, et que si l'on ne veut pas qu'il le décompose entièrement à son profit, il faut, après s'en être servi comme d'un instrument vivant, s'empresser de le tuer par la chaleur et une entière siccité, comme cela se pratique chez les brasseurs (1).

---

sphériques, se déforment souvent en grandissant dans la vésicule maternelle, sorte d'ovaire dans lequel elles manquent presque toujours d'espace.

La plupart des espèces se bornent à une simple tigelle lisse, d'autres offrent, à leur surface, des stries circulaires et progressives, analogues à ces dépressions, également progressives, qui se voient sur les rhizomes ou tiges souterraines. D'autres, comme celle de la Pomme de terre, sont formées d'une courte tigelle conique, munie d'un assez bon nombre de tuniques ou de petites feuilles rudimentaires, écailleuses, qui se recouvrent plus ou moins les unes les autres, comme, par exemple, celle d'un Chou-pommé. C'est un petit bourgeon écailleux et microscopique.

(1) Comme on le verra plus tard, les innombrables embryons d'un tas de grains d'Orge en germination jouent absolument le même rôle, par rapport au sucre de l'Amidon du périsperme, que les petits végétaux infusoires des Levûres dans le liquide sucré des fermentations ordinaires. Dans les deux cas, ces végétaux sont les *décompositeurs* du sucre, afin d'absorber et de se nourrir de l'un des éléments de cette matière, en isolant et en délaissant, soit l'alcool, soit l'acide acétique. Dans cette dernière opération, il convient aux besoins de l'homme de laisser agir plus longtemps les végétaux des Levûres sur la décomposition du sucre, mais il en est autrement de la première. Là on ne veut qu'une simple excitation qui puisse déterminer la formation du sucre d'Amidon dans le Périsperme de l'Orge, aussi se dépêche-t-on de détruire l'embryon

Le Périsperme de l'Orge germée est sensiblement plus sucré qu'avant l'acte de la germination de l'embryon (1).

§ III.

De la Trempe fraîche.

Ce liquide, ou cette infusion, dans lequel il n'est encore entré, comme matière organique, que celle des globulins du Périsperme et de l'embryon de l'Orge, est trouble, sa couleur d'un jaune roux et sa saveur assez sucrée. Vu au microscope, ce liquide contient en suspension un nombre prodigieux de très-petits globules provenant de ceux si abondants dans la fécule de l'Orge et qui ont traversé le filtre en bois du brasseur. Ce sont tous ces globulins, développés d'abord dans

---

excitateur qui, naturellement et justement, dévorerait une substance formée pour lui directement et non pour l'homme qui s'en empare. C'est le cochon que l'on emploie à la recherche des truffes, et qui ne les mange pas.

(1) Le Périsperme de l'Orge germée et bouillie offre toujours son abondante fécule, mais les grains sont déformés, les gros, particulièrement, semblent s'être dilatés et s'être crevés par l'action de la chaleur.

Après s'être crevés, plusieurs de ces grains avaient vomi une matière granuleuse un peu bistrée ou jaunâtre. Les plus petits, moins dilatables par la chaleur, étaient restés intacts. Les vésicules de ce tissu cellulaire étaient flasques, isolées les unes des autres, mais entières et renfermant leurs globules de fécule dilatés et crevés pour la plupart.

les vésicules du tissu cellulaire du Périsperme de l'Orge, qui forment ensuite, et après s'être isolés, la Levûre primitive de bière. Telle est la source ou l'origine organique et physiologique de cette Levûre, comme de toutes les autres Levûres végétales toujours produites par des globulins organisés, seminulifères ou bulbifères, extraits de divers tissus cellulaires végétaux. Telle est l'origine de ces végétations qui, sous l'influence de l'oxygène, forment à la surface du liquide de la Trempe, du Moût, de la bière achevée et de tous les liquides qui contiennent des globulins seminulifères, ces masses mucilagineuses mycodermiques dont nous allons bientôt nous occuper.

§ IV.

De la Lupuline du Houblon.

A la base extérieure (1) des bractées scarieuses du cône fertile du Houblon (pl. 1, fig. 7, 8 et 9) et à la surface de l'ovaire, et, par suite, du péricarpe sphérique et osseux qui se trouve à l'aisselle de chaque bractée (fig. 11), il se développe un grand nombre de glandules vésiculeuses, très-petites (environ de $\frac{1}{8}$ mill.), sphériques, d'un jaune doré et luisant, sessiles ou presque sessiles. Ces glandules, qui ré-

(1) Il ne faut pas oublier que cette face des bractées correspond absolument avec celle que présentent extérieurement les deux feuilles ovariennes qui composent, par soudure, le péricarpe du Houblon.

pandent une odeur forte et qui sont considérées comme une poudre, constituent la Lupuline de Ives (fig. 10).

Examinées au microscope (1), et placées dans l'eau entre deux lames de verre, ces glandules vésiculeuses paraissent vertes, et leur membrane est munie d'un réseau dont les mailles assez régulières partent ou aboutissent à un centre commun (2); point par lequel la glandule adhérait à la bractée ou à l'ovaire (pl. 1, fig. 12). En cet état, on les voit peu de temps après émettre, par une sorte d'explosion analogue à celle que l'on connaît chez les vésicules polliniques, un nombre prodigieux de très-petits globulins incolores qui se répandent dans l'espace et dont le mouvement de fourmillement est très-vif (pl. 1, fig. 12 *a*). Ce même mouvement des globulins se maintient et reparaît dans la Lupuline conservée pendant plusieurs années. D'autres fois la vésicule se rompt et laisse sortir, par sa déchirure, une enveloppe interne, non réticulée, qui s'étend au dehors sous des formes très-variées en entraînant avec elle les globulins intérieurs (pl. 1, fig. 13, 13, 13, *a b c*). Ces extensions prouvent que le grain de Lupuline, comme celui des pollens, est composé de deux vésicules emboîtées, et dont l'intérieure contient, tout à la fois, les globulins fourmillants et l'huile essentielle aromatique et verdâtre, dans laquelle se trouve le principe amer et conservateur de la bière (3). Cette huile, la seule chose qui nous

(1) 280 fois le diamètre.

(2) Ces mailles sont-elles des cellules vides comme celles des épidermes? ou, dans la supposition de l'existence de cellules, chacune d'elles secrète-t-elle et contient-elle une substance particulière, comme l'a avancé M. Raspail, *Chimie organique*, p. 178.

(3) On ne sait comment est venue l'idée d'employer le principe amer

paraisse utile dans l'emploi du Houblon et qui devrait être séparée de toutes les parties végétales des cônes qui ne peuvent que donner de l'âcreté à la bière, s'étend sur le porte-objet sous la forme de gouttelettes circulaires et aplaties (pl. 1, fig. 15), ou sous des formes irrégulières (pl. 1, fig. 14). Elle est toujours unie à un grand nombre de globulins qu'elle entraîne avec elle (1).

Comme dans tous les organes creux des tissus végétaux, la vésicule de la Lupuline, indépendamment des globulins fourmillants et de l'huile aromatique, contient encore une certaine quantité de gaz qui s'échappe au moment de l'explosion. Ce gaz, en se dégageant dans l'eau placée entre les deux lames de verre, y forme des bulles tantôt circulaires (pl. 1, fig. 16), et tantôt allongées (pl. 1, fig. 17); mais ce qu'il y a de remarquable, c'est que dans ces bulles gazeuses, comme en un lieu d'abri, et sans doute de provocation, on voit se former un nombre prodigieux de petits cristaux en forme de bâton, variables en longueur, simples ou groupés, droits, et quelquefois plus ou moins arqués (pl. 1, fig. 19). Pourquoi ces cristallisations, qui n'avaient point encore été remarquées, n'ont-elles lieu que dans les chambres formées par les bulles et jamais en dehors? Quelle est leur nature chimique? Tout ce que l'on peut dire en toute sûreté, c'est que la matière élé-

---

de la Lupuline du Houblon dans la bière pour l'empêcher d'aigrir trop tôt; mais il est remarquable qu'un moyen semblable soit en usage pour obtenir la plus longue conservation du cidre, moyen qui consiste à mélanger, parmi les Pommes douces et sucrées, une certaine quantité de Pommes très-amères.

(1) Mélange de deux choses fort distinctes : l'une organisée, les globulins; l'autre sans organisation, l'huile; mélange qui a reçu le nom de *Lupulite* par MM. Payen, Chevallier et Pelletan.

mentaire de ces cristaux existait dans la vésicule de la Lupuline avant son explosion.

§ V.

Du Moût.

Ce liquide, composé de la Trempe et du Houblon bouillis ensemble, est plus coloré que celui de la Trempe seule, et sa saveur, toujours sucrée au fond, est devenue plus piquante, plus styptique, par l'addition du principe amer de la Lupuline.

Si l'on filtre ce liquide composé et qu'on examine au microscope le dépôt formé par tous les corps qui s'y trouvent en suspension, on y reconnaît un grand nombre de globules vésiculeux de Levûre, dont la grosseur varie depuis le point jusqu'à un 100ème de millimètre, sphériques ou plus souvent ovoïdes, légèrement verdâtres et contenant des globulins de diverses grosseurs. Ces globules vésiculeux de Levûre, évidemment produits par la transformation des globulins de la fécule du périsperme de l'Orge, placés sous des influences nouvelles, sont, pour la plupart, dans un état de végétation plus ou moins avancée. On en voit qui n'ont encore poussé qu'un bourgeon (pl. 2, fig. 4), tandis que d'autres, plus développés par des bourgeons successifs, se composent de cinq articles et d'un nouveau bourgeon terminal (pl. 2, fig. 6). Parmi ces globules vésiculeux et ces mêmes globules végétants, la seule chose qui constitue la Levûre, on trouve quelques enveloppes chiffonnées de Lupuline et des petites masses composées des nombreux globulins (1) que ces enveloppes contenaient, mais qui ont perdu toute espèce de mouvement par l'ébullition. Quelques petits flocons de matière granuleuse et de couleur roussâtre forment le fond de ce dépôt.

Comme on vient de le voir, le moût de bière contient déjà une assez grande quantité de Levûre primitive pour pouvoir, étant abandonné à ses propres moyens, fermenter et arriver, par cette fermentation, à l'état alcoolique de la bière (2). Mais comme ce travail trop long ne donnerait qu'une bière médiocre, on s'est avisé, pour hâter l'opération et pour donner plus d'énergie à l'action de la conversion de la matière saccharine en alcool, d'ajouter une certaine quantité de Levûre produite et recueillie dans une fabrication précédente de bière (pl. 2, fig. 1 et 2).

---

(1) Ces globulins, par un effet de contraction et de mort, avaient pris pour la plupart la forme d'un petit carré.

(2) C'est ainsi que le lait, par ses propres globules, qui sont sa Levûre, se suffit dans sa fermentation et dans la décomposition de son sucre par la végétation filamenteuse de ses globules.

C'est encore ce qui arrive dans l'intérieur des fruits pulpeux et sucrés dont les globulins naturels, en germant et en végétant sous la forme d'un filament confervoïde, décomposent le sucre, rendent ces fruits acides, en isolant l'acide acétique et quelquefois l'alcool. Ces fermentations, qui s'opèrent dans une cerise, dans un grain de raisin, dans une pomme, dans une pêche, sont entièrement comparables à celle qui a lieu, sur une plus grande échelle, dans la cuve du brasseur, ou, sur une bien plus grande échelle encore, dans tout espace occupé par des végétaux et des animaux dont les organes élémentaires de leurs tissus, comparables aux petits végétaux des Levûres ordinaires, sont aussi les décompositeurs des substances qui les environnent.

§ VI.

De la Levûre fraiche ou nouvellement produite et recueillie.

Là nous retrouvons M. Cagniard-Latour, là est le point le plus important de ses intéressantes recherches sur l'organisation, la végétation, la reproduction et la multiplication ou l'augmentation de la masse des Levûres. C'est ici que, près de nous, nous allons le suivre, en répétant avec soin ces curieuses observations, de manière à pouvoir assurer positivement si les Levûres, comme on l'avait cru, ne sont que des matières organiques sans organisation, que de simples produits chimiques, ou si, au contraire, elles sont des agglomérations composées de diverses espèces de petits végétaux, résultant tous de la germination d'un globule échappé d'une vésicule d'un tissu cellulaire végétal.

Pour cela, il fallait, comme l'avait déjà fait M. Cagniard-Latour, aller passer une nuit dans une brasserie, afin de pouvoir suivre, étudier, décrire et dessiner à l'aide du microscope, toutes les phases du développement des petits végétaux provenant des seminules composant la Levûre de bière, pendant toute la durée de la fermentation d'une cuvée.

M. Chapellet, qui dirige avec autant de savoir que d'habileté la grande brasserie du Luxembourg, voulut bien nous recevoir et nous permettre d'y faire nos observations. C'était au mois d'octobre dernier : la cuve contenait le Moût suffisant pour faire 76 quarts de bière, et la mise en levain devait avoir lieu à dix heures du soir. Arrivés une demi-heure plus tôt, nous examinâmes d'abord la Levûre fraîche qui devait être employée; elle fermentait; sa densité était celle de la crème, sa couleur celle du café au lait, sa saveur très-amère, et son odeur voisine de celle qui s'exhale de la fleur du sureau (pl. 2, fig. 1) (1). Observée ensuite au microscope, nous trouvâmes qu'elle était entièrement composée de globules vésiculeux, sphériques, ovoïdes, et quelquefois légèrement pyriformes (pl. 2, fig. 2). Ces globules transparents et d'un fauve pâle, variant de grosseur depuis $\frac{1}{300}$ jusqu'à $\frac{1}{100}$ de mil., étaient tous libres, tous indépendants les uns des autres et entièrement dépourvus de mouvement. Sous certains jours, on apercevait clairement l'épaisseur plus transparente de la vésicule, et la capacité de celle-ci plus opaque et plus colorée par la présence des globulins intérieurs. Lorsqu'un certain nombre de ces globules de Levûre se trouvaient emprisonnés dans une bulle d'air, de manière à être pressés les uns contre les autres, ils s'affaissaient en se gênant mutuellement, devenaient polygones, et, par cet effet, prouvaient leur mollesse et expliquaient en même temps la véritable formation des tissus cellulaires dans lesquels les vésicules sphériques prennent cette forme par la même cause (pl. 2, fig. 2*b*). Tous, dès ce moment, ne laissaient plus aucun doute sur leur existence organisée végétale; tous étaient des individus doués de la vie

---

(1) Les globules extraits du tissu cellulaire des fraises (Levûre des chimistes) ont, d'après l'observation de M. Cagniard-Latour, la même odeur que ceux de la Levûre de bière, qui proviennent du Périsperme de l'Orge.

organique, tous avaient déjà végété et grandi depuis le point jusqu'au 100^{me} de mill. Mais en cet état de simples globules vésiculeux et remplis de globulins seminulifères, étaient-ils arrivés à leur dernier terme de développement? Devaient-ils se reproduire sous la forme si simple d'un *Protococcus*, ou étant d'un ordre plus compliqué, ces globules, considérés seulement comme des seminules, ou mieux, comme des boutures, devaient-ils se développer en autant de petits végétaux moniliformes ou composés de plusieurs articles, comme nous l'avait annoncé M. Cagniard-Latour? Comme l'un ou l'autre de ces deux états pouvait exister, il était nécessaire de suivre ces globules dans le Moût, et pendant toute la durée de la fermentation : c'est ce que nous fîmes.

Nous venons de dire que la quantité de Moût contenu dans la cuve était destinée à produire 76 quarts de bière; dans ce liquide, on versa 35 livres de Levûre (pl. 2, fig. 1 et 2), laquelle fut ajoutée à celle qui s'était naturellement formée dans le Moût. Que fit-on réellement par cette addition de Levûre? On augmenta, comme nous venons de le dire, l'énergie fermentescible de la Levûre naturelle qui se trouvait déjà dans le Moût, et, comme on va le voir tout à l'heure, on *ensemença* dans un territoire (1) particulier, le Moût, un nombre prodi-

---

(1) Sur l'observation de M. Poinsot, nous supprimâmes, dans notre Rapport sur le sujet qui nous occupe, le mot *territoire* qui s'y trouvait, non parce qu'il nous parut mal appliqué, tout au contraire, mais bien parce qu'il s'agissait d'un Rapport. Ici, comme c'est un Mémoire dont seul nous sommes responsable, nous persistons à employer la dénomination de *territoire*, parce qu'elle nous paraît exprimer parfaitement l'habitation des végétaux infusoires des Levûres.

gieux de seminules ou de corps reproducteurs qui devaient s'y développer et reproduire avec bénéfice. Une heure environ après cet ensemencement, à onze heures, la fermentation étant commencée, nous fîmes retirer de la cuve un premier échantillon, lequel étant examiné au microscope, nous montra que le plus grand nombre des globules avaient poussé un et quelquefois deux petits bourgeons qui étaient comme plus jeunes, plus transparents que le globule maternel ou producteur (pl. 2, fig. 4).

Dans un second échantillon puisé à une heure du matin, la fermentation augmentant, tous ou presque tous les globules, qui n'avaient lors de la première observation que de très-petits bourgeons incolores, étaient doublés ou composés de deux articles ou mérithalles, le bourgeon ayant atteint le même diamètre que celui de son producteur. Quelques nouveaux bourgeons se montraient déjà sur un certain nombre de ces individus didymes ou géminés (pl. 2, fig. 5).

Dans une suite d'échantillons tirés d'heure en heure jusqu'à six heures du matin, moment où l'on entonna la bière, nous vîmes ces petits végétaux continuer de croître et de se compliquer d'articles. Dans le dernier, ils étaient presque tous formés de quatre ou de cinq articles vésiculeux remplis de globulins, et terminés la plupart par un bourgeon naissant et par un ou deux autres bourgeons latéraux, ce qui annonçait que ces petits végétaux n'étaient point encore achevés, et qu'il y avait chez eux une intention à la ramescence (pl. 2, fig. 6). Parmi ces individus moniliformes, il s'en trouvait beaucoup d'autres qui se bornaient encore à un, deux ou trois globules; les uns étaient droits, les autres légèrement arqués.

Plusieurs fois nous vîmes, comme M. Cagniard-Latour avait cru l'observer deux fois, des globules, soit solitaires, soit faisant partie d'une tige moniliforme, émettre à l'extérieur, sous forme de fusée, une partie ou la totalité de leurs globulins intérieurs.

Dans cet échantillon, nous aperçûmes quelques filaments plus ténus que les globules des petits végétaux de la Levûre; les uns simples, les autres rameux, tubuleux, et contenant de très-petits globules placés à la suite et à distance les uns des autres (pl. 2, fig. 7). Ces filaments, qui appartenaient à une espèce d'*Hygrocrocis*, étaient entièrement étrangers aux végétaux de la Levûre.

Pendant cette longue et froide séance de nuit, qui avait duré près de neuf heures, nous ne cessâmes de dessiner et d'avoir l'œil fixé sur l'oculaire du microscope, tant cette observation avait d'attrait et nous paraissait riche en explications sur le produit de la Levûre, et sur le rôle actif que ces milliards de petits végétaux doivent jouer dans le phénomène de la fermentation pendant leur courte mais très-énergique végétation. Il suffisait de regarder durant un quart d'heure les bourgeons naissants pour les voir successivement atteindre le diamètre qu'ils étaient destinés à avoir comme l'un des articles de la tige moniliforme.

Rentrés chez nous, nous étions satisfaits de notre récolte, mais il nous restait des regrets. Nos petits végétaux, pour lesquels nous proposons le nom de *Torula cervisiæ* (1), n'étaient

(1) Nous n'ignorons pas que ces petits végétaux ne sont que le premier état de ceux qui, n'étant point arrêtés dans leur végétation et qui peuvent jouir de l'oxygène, constituent, en s'achevant et en fructifiant, le *Myco-*

point achevés, ce que prouvaient les jeunes bourgeons dont ils étaient terminés. Le brasseur, en finissant son opération, les avait brusquement arrêtés dans leur végétation et mis dans le cas de se désarticuler et de paraître sous la forme d'une Levûre nouvelle, c'est-à-dire d'une masse composée d'articles globuleux dissociés, masse comparable à celle d'un tas de blé dont chaque grain possède, comme individu, son centre vital de reproduction.

Bien convaincus que ce qui s'était fait en grand chez le brasseur pouvait se faire en petit, nous préparâmes, dans un bocal, un territoire composé d'eau et de sucre dans lequel nous semâmes les globules de la Levûre de bière (pl. 2, fig. 2); le tout exposé à une température d'environ 25° cent. Cet ensemencement avait eu lieu le 3 novembre, à huit heures du matin; le 5, vers la même heure, le liquide était en pleine fermentation, et la plupart des globules germaient ou étaient en végétation plus ou moins avancée (1). Le 6 ayant observé de nouveau, au microscope, l'état de nos *Torula cervisiæ*, nous trouvâmes qu'un grand nombre d'individus présentaient des

---

derma cervisiæ, Desmaz., et, plus tard, le *Penicillium glaucum* (pl. 6, fig. 1, *ccc*.)

(1) Lorsque la fermentation commence, des bulles gazeuses apparaissent à la surface des petits morceaux de Levûre, formés de globules agrégés, et comme ces bulles y restent plus ou moins de temps adhérentes, comme autant de ballons, elles déterminent l'ascension de quelques-uns de ces morceaux vers la surface du liquide, jusqu'au moment où, venant à les abandonner, ils retombent de tout leur poids au fond du vase. C'est ce que tous les chimistes, qui se sont occupés de fermentation à l'aide de la Levûre de bière, ont observé.

développements plus riches en articles que dans ceux de la cuve du brasseur. Plusieurs se composaient de six ou de sept articles et de rameaux latéraux formés de deux ou même de trois globules (pl. 3, fig. 1, *h, i, l.*) Tous végétaient encore, car leurs extrémités étaient munies de petits bourgeons transparents. Quoique plus compliqués en articles que ceux de la brasserie, ils étaient plus maigres, moins pourvus de globulins intérieurs, et, par conséquent, plus translucides. La cause de cet étiolement nous parut être dans la différence des deux territoires. Dans le nôtre, il n'était entré que du sucre, tandis que dans celui du brasseur, indépendamment de la matière saccharine, se trouvait encore le mucilage nutritif de l'Orge, et, de plus, l'huile essentielle du Houblon qui pouvait avoir agi comme stimulant sur le développement des *Torula.*

Le 8, la fermentation cessa, et l'écume, soulevée par le dégagement de l'acide carbonique, s'affaissa à la surface du liquide dont l'odeur était celle d'une pâte aigre et la saveur celle de l'acide de la reinette grise un peu échauffée. Ce liquide ou ce territoire, entièrement épuisé par nos petits végétaux qui, pour leur accroissement, en avaient absorbé toute la matière nutritive, devint impropre à la fermentation, et tous les *Torula,* mourant de faim, se désarticulèrent et se précipitèrent en Levûre nouvelle au fond du bocal. Encore ici, nous n'eûmes que des végétaux incomplets, puisque, comme on l'a vu, tous, au moment de leur dissociation, étaient en train de pousser des bourgeons.

Si l'on met des globules vésiculaires de Levûre de bière dans de l'eau pure, ces seminules, ne trouvant point dans ce milieu aqueux privé de sucre, le stimulant et la matière nutritive qui convient à leur germination et à leur développement en *Torula*, il n'y a point de fermentation ; elles y meurent de faim, s'y décomposent, se putréfient assez promptement, et répandent une odeur infecte (1).

Pendant cette décomposition elles se vident de leurs globulins intérieurs, globulins qui en se mêlant à l'eau, la troublent et la rendent laiteuse. Les globules vésiculaires restants sont alors plus transparents, et les globulins devenus libres offrent un mouvement de fourmillement.

§ VII.

De la bière terminée.

Dans l'épaisseur du liquide de la bière entonnée ou mise

---

(1) Il est très-remarquable que l'odeur fétide qui s'exhale des corps organisés après leur vie d'association, n'a lieu qu'au moment où les organes élémentaires se rompent dans leurs propres éléments. Tant que chez un animal mort les globules de ses diverses sécrétions, ceux de sa pulpe nerveuse et autres, tant que ses fibres musculaires restent intacts dans leur organisation individuelle, il ne s'exhale aucune fétidité. C'est ce que nous avons observé tout récemment sur les laits morbides provenant des vaches atteintes de la *cocote*. Les laits les plus viciés, les plus dégoûtants à voir, et dont tous les globules déformés et précipités en masse au fond d'un sérum altéré étaient bien évidemment morts, restaient tous parfaitement inodores, même plus d'un mois après leur extraction du pis de la vache. Ceux, au contraire, qui, arrêtés dans les voies lactées surirritées, y étaient décomposés dans leurs globules morbides de manière à ne plus guère offrir au microscope que des globulins monadaires et fourmillants, répandaient l'odeur la plus infecte.

en bouteille, vivent et croissent un grand nombre d'individus de *Torula cervisiæ ;* mais, influencés par un milieu différent de celui de la cuve à fermentation, ils subissent quelques modifications de formes et de couleurs. Ils sont plus robustes, un peu plus compliqués, plus rameux; leurs articles, légèrement verdâtres, sont ovoïdes, pyriformes ou quelquefois remarquablement allongés (pl. 3, fig. 3). Parmi eux se voient des masses composées de globulins échappés des vésicules de Lupuline, globulins qui, par la cuisson, ont perdu leur mouvement de fourmillement (pl. 3, fig. 3 *a a*).

On obtient en plus grande quantité cette modification du *Torula cervisiæ,* soit en faisant mousser la bière, ce qui les fait monter à la surface, soit en les arrêtant sur un filtre. Comme on le voit, en buvant de la bière, surtout de la mousse, on avale des myriades de ces petits végétaux, et sans s'en douter on boit et l'on mange tout à la fois. C'est donc à leur présence qu'est due en grande partie la qualité nutritive, l'onctuosité, ainsi que le filant désagréable que prend cette boisson en vieillissant. C'est encore à ces mêmes petits végétaux, véritables *éliminateurs,* dont les générations se succèdent rapidement, qu'il faut rapporter la cause de la longue agitation ou fermentation de la bière et à la promptitude de ce liquide à passer à l'acide et au gras : au premier de ces états, par la partie sucrée éliminée et absorbée par les *Torula cervisiæ,* qui s'en nourrissent; et au second par les nombreux détritus de ces petits êtres végétaux morts de faim, au milieu du liquide acide, faute d'aliments saccharins. Mais ici il faut remarquer qu'il n'y a que les enveloppes maternelles qui périssent et non les globulins, ou la nouvelle génération qu'elles contenaient, et qui, comme seminules, peuvent continuer de végéter en *Mycoderma cervisiæ* (pl. 5, fig. 6), si on leur offre un lieu, l'oxygène, et des aliments convenables à leur existence.

§ VIII.

De la Levûre nouvelle.

Avant la découverte de M. Cagniard-Latour, on savait que chaque cuvée de bière produisait 5, 6 ou 7 fois plus de Levûre que celle employée dans la mise en levain. On savait que cette augmentation en poids comme en volume variait suivant la plus ou la moins grande quantité d'Orge employée, et suivant la température et les mois de l'année; mais l'explication de la cause du produit et de ses variations ne pouvait être positivement donnée. Aujourd'hui cette cause nous paraît presque aussi simple, presque aussi naturelle que celle qui fait qu'un grain de blé jeté dans un sol préparé pour le recevoir peut, en s'y développant, s'y multiplier un grand nombre de fois.

Si la cause du produit est la même dans les deux cas, si la multiplication de part et d'autre est soumise au même mode de développement végétal, si la séparation et l'isolément des articles de la tige moniliforme du *Torula cervisiæ* peuvent justement et rigoureusement être comparés à celle des grains de blé détachés de l'épi, elle ne peut cependant offrir un chiffre aussi exact, car on ne peut savoir la quantité de Levûre primitive produite dans le Moût, de même que l'on ne peut connaître celle qui reste dans la bière terminée. Mais il y a produit, et pour en donner la mesure approximative, nous dirons que la cuvée sur laquelle nous avons fait nos observations devait, comme nous l'avons déjà dit, produire 76 quarts ou 5700 litres de bière. La Levûre employée fut de 35 livres, et celle recueillie après la fabrication, de 247 livres pressée, ce que les brasseurs appellent de la Levûre sèche. Si l'on déduit de ce produit les 35 livres jetées dans le Moût, il reste un bénéfice de 212 livres de Levûre nouvelle.

Avant d'aller plus loin, nous croyons devoir faire remarquer trois choses qui touchent l'origine, l'organisation et la physiologie des *Torula cervisiæ* ou petits végétaux de la bière.

La première, dans ce qui concerne les trois sources ou les trois modes de production : 1° l'origine primitive par transformation des globulins du Périsperme de l'Orge; 2° celle que l'on peut appeler par bouture, provenant des articles dissociés des tiges moniliformes (la Levûre); 3° celle par les globulins seminulifères qui s'échappent de l'intérieur des articles vésiculaires.

La seconde, qui vient à l'appui de l'origine primitive des *Torula cervisiæ*, consiste dans cette remarque faite par les brasseurs, que, plus la Trempe est nourrie d'Orge, plus la bière achevée rend de Levûre, observation qui prouve le développement des globulins de l'Orge en globules de Levûre.

La troisième, non moins curieuse, est dans ce que les mois de mars et d'avril, suivant quelques brasseurs, sont ceux de l'année qui produisent la plus grande quantité de Levûre, différence qui peut être d'un douzième ou d'un quatorzième. Les mêmes matières et les mêmes quantités relatives étant employées pendant ces deux mois, on est tenté d'admettre que la cause de cette augmentation peut se trouver dans l'atmosphère, et de se rappeler que cette époque est celle où la végétation extérieure fait effort, où elle montre une grande énergie, et qu'alors on pourrait presque croire que les *Torula* de la bière également influencés peuvent, dans leur développement, se composer d'un article de plus que dans les autres mois de l'année. Mais ceci demande à être sérieusement observé.

§ IX.

Des Mycodermes de la bière.

A la surface du liquide, soit de la Trempe, soit du Moût, soit de la bière achevée, exposée au contact de l'air, comme de celle de tous les liquides qui contiennent en suspension des globulins de matière organique susceptibles de végéter et de s'étendre, ou, en d'autres termes, capables de fermenter, on voit apparaître et se former peu à peu des pellicules circulaires qui s'épaississent en membranes, puis en des fongus gélatineux, toujours sans limites dans leur étendue et sans formes autres que celle que leur donne le vase dans lequel ces coagulums se forment par des additions successives de petits végétaux qui viennent s'y agglutiner ou s'y enchevêtrer. (pl. 5, fig. 1.)

Persoon ayant observé, sans le secours du microscope, quelques-uns de ces coagulums qui s'étaient formés sur de l'Oseille cuite renfermée dans des cruches, coagulums si comparables à une masse de Levûre, en fit un nouveau genre de Champignon sous la dénomination de *Mycoderma* (1), et cette première espèce fut désignée sous le nom d'*ollare*. Quelques autres espèces ont été ajoutées depuis, soit par Persoon, soit par M. Desmazières (2). Faute d'observations exactes et microscopiques, faute d'avoir suivi la méthode du *voir-venir*, si féconde en explications, Persoon, en considérant son *Mycoderma* comme provenant d'une seule seminule dé-

---

(1) *Mycologia Europæa*, 1822.

(2) *Mycoderma mesentericum*, Pers., qui se développe sur la liqueur dans laquelle se trouvent des fruits abandonnés. Cette membrane, souvent solide et épaisse, est d'un beau blanc soyeux en-dessus avec des impressions ou des enfoncements. L'autre face, celle qui regarde la liqueur et les fruits qui ont donné naissance à cette singulière Mycoderme, est d'un vert sombre, gaufrée et recouverte d'une infinité de petits mamelons. *M. Lagenæ* et *M. Pergamenum*, Pers.

M. Desmazières ajouta les espèces suivantes : *Mycoderma cervisiæ*, Fleurs ou Matons de la bière, *M. Malti cervisiæ* qui végète sur la Drèche de bière ou marc d'orge, après avoir servi pour la trempe; *M. Malti-juniperini* qui croît sur la Drèche de Genièvre ; *M. Glutinis farinulæ* croissant sur la vieille colle de farine; *M. vini*, Vallot, considéré à tort, nous pensons, comme étant semblable aux *M. Lagenæ* et *Mesentericum* de Pers. A toutes ces espèces on aurait pu ajouter encore celle du lait, *Mycoderma lactis*, *nob.*, et celle du vinaigre, connue sous le nom de Mère; celle du cidre *, celle de l'encre, *Hygrocrocis atramenti*, Ag., etc., etc., c'est-à-dire, celles de tous les liquides aqueux qui contiennent en suspension des globulins vifs de matière organique, provenant par détrition de quelques corps organisés, et susceptibles, sous ces nouvelles influences, de germer et de croître en de petits végétaux de la famille des Mucédinées.

* *Mycoderma malina* ou *Hygrocrocis malina*, Brébisson.

veloppée, comme un unique individu, comme ayant des formes arrêtées, une étendue déterminée et une vie d'association bornée, comme chez tous les corps organisés, commit une grande erreur, puisqu'il ne sut pas voir que son prétendu végétal était toute une forêt de petits végétaux distincts, et qui, tous, résultaient chacun d'une seminule particulière.

M. Desmazières, dans un Mémoire très-remarquable (1), en voulant se rendre compte de l'organisation des Mycodermes, de leur vitalité et de leurs moyens de reproduction, les étudia avec soin dans leurs développements successifs et démontra clairement dans une suite d'observations microscopiques, que dans les Mycodermes il n'y avait point unité d'organisation et de vie, et que la membrane mycodermique, examinée au microscope, était une agglomération, un troupeau de petits individus, tous nés pour leur compte et qui, enfin, n'avaient d'autres rapports entre eux que de vivre pêle-mêle dans un lieu commun.

Si à cette époque, M. Desmazières, au lieu de croire avec M. Gaillon que les petits êtres rameux et articulés qu'il observait étaient des Némazoaires, c'est-à-dire, le produit d'animalcules qui venaient s'ajuster symétriquement bout à bout (2), avait dit : Les membranes ou coagulums des Mycodermes ne sont que des amas composés de globules et de ces

---

(1) *Recherches microscopiques et physiologiques sur le genre Mycoderma.* Mémoire accompagné de figures, publié dans les *Annales des Sciences naturelles*, t. X, p. 42.

(2) Autant vaudrait dire qu'une antenne moniliforme de Capricorne s'est formée d'articles qui préalablement se trouvaient répandus çà et là dans l'espace.

mêmes globules plus ou moins développés en autant de petits végétaux articulés, simples ou rameux; amas très-analogues à ceux des Levûres, qui ne sont elles-mêmes formées que de globules vésiculaires et seminulifères susceptibles de végéter dans l'acte de la fermentation, il aurait complété ses belles observations, et serait arrivé par le chemin si sûr de l'organisation et de la physiologie, dix ans avant M. Cagniard-Latour, à prouver l'organisation et la végétation des Levûres. Mais telle est la marche accoutumée des sciences que chacun de nous ne peut apporter que sa faible part à la ruche commune.

Nous pensons que, trop occupé du mouvement *réel* de fourmillement que présentent les globulins très-ténus des Mycodermes et des Levûres avant leur développement en globules et la germination de ceux-ci en tigellules; que trop partisan de la merveilleuse théorie des Némazoaires de son ami Gaillon, M. Desmazières fut arrêté au milieu d'une route qu'il était si capable de parcourir et de nous en montrer si habilement la fin.

Nous allons maintenant faire connaître nos propres observations sur l'origine, la nature et le développement du *Mycoderma cervisiæ*. Nous allons le décrire et le figurer dans toutes ses phases, telles qu'elles se sont déroulées sous nos yeux armés du microscope, et nous allons y apporter d'autant plus de soin que cette production a beaucoup de rapport avec celle de la Levûre qui la précède, dont elle ne nous paraît qu'un développement plus achevé, dans lequel s'est épuisée la propriété fermentescible (1), et surtout parce

(1) Nous pensons que les *Torula cervisiæ* qui forment la Levûre de bière,

que l'étude de ce *Mycoderma* peut servir à prouver l'organisation purement végétale de ses composants, et par là faire disparaître la théorie, toute fabuleuse, des Némazoaires.

Si l'on expose au contact de l'air, comme nous venons de le dire, soit de la Trempe, soit du Moût, soit de la Bière, soit enfin un liquide capable de fermenter, on ne tarde pas à voir apparaître à la surface de légères pellicules froncées, d'abord isolées et circulaires, puis n'en formant plus qu'une en se réunissant toutes, d'un blanc mat, puis soyeuses, enfin d'un vert-glauque, poudreuses et gélatineuses au toucher. (pl. 5, fig. 1).

Ces pellicules naissantes, vues au microscope, sont formées par la réunion d'un nombre prodigieux de globulins excessivement ténus, ponctiformes (1) et jouissant d'un mouvement de fourmillement d'autant plus vif qu'ils sont plus petits. Ces globulins, qui se trouvaient dans l'épaisseur du liquide et qui ne s'élèvent à sa surface que pour y satisfaire à un besoin d'air atmosphérique nécessaire à leurs développements, nous paraissent provenir de la même source que ceux qui produisent la Levûre, nous voulons dire des globulins échappés du Périsperme de l'Orge qui, selon l'état différent des milieux, subissent de légères modifications de formes dans l'achèvement de leur végétation. A chaque instant de

---

ne conservent héréditairement leur propriété fermentescible que parce que toujours on les arrête brusquement dans leur développement, qui n'est jamais achevé lorsque se termine le travail d'une cuvée, tandis que, au contraire, les petits végétaux du *Mycoderma cervisiæ*, ayant subi toutes leurs évolutions, sont dans un état d'épuisement.

(1) $\frac{1}{700}$ ou $\frac{1}{600}$ de mill.

nouveaux globulins s'élevant et venant à la surface du liquide, s'il reste encore des places, ou se poser sous ceux de la veille, la masse s'épaissit de plus en plus jusqu'à ce que le liquide soit épuisé des globulins qu'il contenait. Les plus anciens, en continuant de végéter, augmentent en diamètre et perdent, par cette augmentation, ce mouvement de fourmillement qu'ils possédaient lorsqu'ils étaient très-petits (1). Arrivés à la grosseur d'environ $\frac{1}{150}$ de mill., ils sont vésiculeux, remplis d'une fine granulation et, pour la plupart, s'ovalisent ou s'allongent sous la forme d'un petit parallélogramme à angles arrondis. Cette première période du développement de ces petits êtres est comparable à celle des seminules en général et des embryons encore contenus sous leurs enveloppes protectrices, c'est-à-dire, jusqu'au terme où tous ces corps reproducteurs peuvent commencer à germer. Une fois

---

(1) Plus les globules des corps organisés sont petits, plus ils montrent de mouvement sous le microscope. C'est la même chose pour les filaments végétaux ou animaux; plus ils sont ténus, plus ils sont susceptibles de se mouvoir. Tels sont les cils vibratoires des animalcules infusoires. A mesure que le filament des Oscillaires s'épaissit dans les différentes espèces, le mouvement diminue et cesse entièrement dans l'Oscillaire des murailles (*Lyngbya muralis*, Ag.). Si de cette remarque on passe à celle que les particules suffisamment réduites de tous les corps inorganiques sont d'autant plus douées de mouvement qu'elles sont plus atomiques, on est porté à admettre que les particules élémentaires de tous les corps temporaires possèdent la propriété du mouvement, propriété qui se perd à mesure que les particules s'enchaînent les unes aux autres dans la formation des corps où, forcément, elles restent immobiles, faute de l'espace nécessaire pour se mouvoir. N'oublions pas que tous ces mouvements ne peuvent se manifester que dans l'eau.

parvenus à l'état de seminule vésiculeuse, soit sphérique, soit ovale, soit allongée, ces petits êtres germent ou poussent sur un, deux ou trois points, des bourgeons plus transparents que la vésicule maternelle. Lorsque la pousse, véritable gemmule, a lieu sur une seminule allongée en parallélogramme, c'est toujours des angles arrondis qu'elle part. Dans tous les cas, ces germinations prouvent que la seminule se compose de deux vésicules emboîtées, car on distingue facilement que le bourgeon perce une enveloppe extérieure et qu'il n'est véritablement que l'extension d'une vésicule intérieure. Ce premier bourgeon ou ce premier mérithalle s'allonge plus ou moins selon les individus, et de son sommet il se développe un second article, puis successivement un grand nombre d'autres semblables, mais très-variables dans leurs longueurs. Sur le sommet latéral des articles, rarement ailleurs, il naît tantôt un et tantôt deux ou trois rameaux opposés et composés d'articles comme la tige maternelle. En continuant de croître ces petits végétaux finissent par se terminer en des rameaux moniliformes disposés en ombellules et dont les articles globuleux sont d'un vert-glauque. On a le *Penicillium glaucum* entièrement achevé (1). Dans ces petits végétaux, toujours d'une grande transparence, tout est creux, les se-

---

(1) Le développement du *Mycoderma* de la bière offre trois états assez distincts : celui des pellicules mates, celui de ces pellicules devenues soyeuses, blanches et byssoïdes, et celui où ces byssus se couvrent successivement d'une poussière vert-glauque dans laquelle réside l'odeur de moisi.

Dans le premier état, il n'y a encore que des seminules globuleuses agglomérées à la surface du liquide; bien peu ont commencé à germer.

Dans le second, les seminules germent dans leur territoire liquide, et minules sont vésiculeuses, et les tigellules simples, articulées ou rameuses qui en résultent sont tubuleuses, toutes contiennent des globulins reproducteurs qui, dans les articles de la tigellule, se développent quelquefois en globules sphériques ou ovoïdes, et toutes se composent de deux enveloppes emboîtées. (pl. 6, fig. *q*.) On voit souvent les tigellules, lorsqu'elles sont composées d'un grand nombre d'articles courts, se désarticuler avant de se terminer par les articles globuleux et seminulifères. Voici comment ces séparations s'opèrent : L'enveloppe extérieure, qui est un boyau continu, se flétrit

---

par un besoin d'oxygène élèvent dans l'air leur tigellule diaphane et sans couleur. Ce n'est encore qu'un champ de blé sans épis.

Dans le troisième et dernier état, les tigellules s'achèvent en se terminant par des ombellules composées de courts rameaux moniliformes et d'un vert glauque. Ce sont les épis du champ de blé dont chaque article globuleux peut, concurremment avec les globulins naturels de la bière, servir à reproduire le même mucor.

Toute reproduction végétale est toujours produite par un article de tige séparé de la plante à laquelle il a appartenu. Chez les végétaux simples les articles des tigellules et ceux plus terminaux des mêmes tigellules que l'on nomme des Seminules ou des Sporules, parce que seulement ils sont plus courts et plus globuleux que les autres, possèdent la même faculté reproductive. Les uns et les autres de ces articles germent de la même manière.

Chez les végétaux appendiculés on retrouve toujours la même structure et le même mode de reproduction, par les articles inférieurs des jeunes tiges et par ceux terminaux que l'on appelle des embryons.

Dans tous ces végétaux se présente encore un moyen plus fondamental de reproduction : c'est celui du développement des globulins contenus dans l'intérieur des organes élémentaires vésiculeux ou autrement dit dans les vésicules des tissus cellulaires.

et se contracte sur les articles courts et intérieurs qu'elle retient toujours, comme, pour nous servir d'un exemple, les longs chapelets de saucissons distincts, mais retenus dans un boyau commun que l'on voit chez les charcutiers. L'enveloppe commune, en se rompant dans ses étranglements, permet aux articles de s'isoler dans l'espace et de devenir, en ce nouvel état, autant de boutures reproductives qui poussent sur un ou sur plusieurs de leurs angles et reproduisent la plante par ce nouveau moyen. (pl. 6, fig. o, *n*, *n'*.) Nous pensons que c'est à cet état de désarticulation plus ou moins avancée des tigellules et au pêle-mêle de ces divers états avec les seminules primitives de la bière, dans la masse mycodermique, qu'est due la théorie erronée des Némazoaires, théorie qui consiste, comme nous l'avons déjà dit, à croire qu'un très-grand nombre de végétaux simples placés au début du développement de ce règne, ne sont que des agrégations d'animalcules qui, las de leur indépendance et de leurs mouvements particuliers, viennent s'ajuster symétriquement et volontairement sous des formes rigoureusement végétales. Si l'on se rappelle le moment où à l'automne les parties constitutives d'un marronnier d'Inde se désarticulent et couvrent le sol, si l'on se souvient bien d'avoir vu les pétioles communs et leurs folioles, les pédoncules des fruits, les valves de l'enveloppe hérissée de ceux-ci et leurs grosses graines jetées en désordre sur la terre pendant que des parties semblables restent encore attachées sur l'arbre; si nous ajoutons à cela, ce qui aurait lieu sous le climat de l'Amérique du Sud, que les graines germent immédiatement après être tombées, et qu'autour de l'arbre mère on ait des individus de tout âge; si enfin on suppose que tout cela est microscopique et peu connu, on pourrait croire aussi que les parties isolées, en se plaçant bout à bout, composent l'arbre tout entier, ce qui serait une erreur, car ici, comme dans les petits végétaux des Levûres et des Mycodermes, le développement est extensif et rayonnant, tout en admettant cependant les greffes *accidentelles* qui peuvent avoir lieu, soit côte à côte entre deux ou un plus grand nombre de tigellules, soit entre deux articles bout à bout, puisque le propre de tous les tissus organiques analogues et vivants est de se coller physiologiquement dès qu'ils se touchent.

Voilà tout ce que nous avions à dire sur l'organisation végétale des petits mucors agglomérés et enchevêtrés en masse dans le *Mycoderma* de la bière; nous avons tenu à le bien faire connaître, parce que ceux des autres productions mycodermiques sont, à quelques modifications de formes près, tout à fait semblables, et enfin, parce qu'ils offrent la plus grande analogie organique avec ceux qui produisent les Levûres, quoique possédant très-faiblement la propriété de faire fermenter.

§ X.

De la Levûre produite par l'albumine de l'Œuf.

Sur l'invitation de M. Thénard, et d'après ses propres indications, nous avons fait et répété plusieurs fois l'expérience suivante :

Si dans 380 grammes d'eau on met un blanc d'œuf battu et 60 grammes de sucre, et qu'après avoir filtré la liqueur ainsi composée, on la verse dans un bocal bouché et surmonté d'un tube deux fois courbé à angle droit, de manière à permettre au gaz carbonique de se dégager à mesure qu'il doit se former, on finit par avoir, à la température de 30 à 35 degrés, une fermentation vineuse assez prononcée, et en même temps une production de Levûre qui, après le travail de la fermentation, se précipite au fond du bocal sous l'aspect d'un sédiment ou d'une pâte d'un blanc fauve. En conservant ce liquide, il ne tarde pas à se colorer successivement en jaune clair, en jaune couleur de cidre ou de bière rouge, et en brun assez foncé; sa saveur est acide.

Voilà tout ce que l'on savait de ce produit, très-remarquable tant qu'on n'en connaissait pas l'origine et le développement purement végétal; voilà tout ce que l'observation faite à l'œil nu pouvait apprendre.

Nous allons maintenant, à l'aide du microscope, faire connaître l'histoire de cette Levûre, qui, comme on va le voir, est, comme toutes les autres Levûres, comme tous les *Mycoderma,* un amas de petits végétaux plus ou moins développés et plus ou moins désarticulés.

Si l'on se reporte au moment où la fermentation commence, le liquide muqueux, par la présence du blanc de l'œuf et du sucre, est soulevé par l'acide carbonique, qui, restant encore quelque temps engagé à la surface, y forme ce que l'on appelle l'*écume.* Cette surface, en devenant en même temps mate, annonce qu'il y a production. En effet, si l'on soumet au microscope une petite portion de cette sorte de pellicule, on voit qu'elle est produite par des myriades de globulins, fourmillants, jaunâtres et transparents, dont le diamètre n'est guère au-dessus de $\frac{1}{600}$ de mill. (pl. 7, fig. 1.)

De jour en jour ces globulins grossissent, perdent successivement leur mouvement, et finissent par atteindre le diamètre de $\frac{1}{100}$ de mill., qui est celui du globule de la Levûre de bière et celui du lait avant leur germination. (pl. 7, fig. 2, 3, 4.)

Une fois arrivés à ce développement globulaire, on les voit germer sur plusieurs points à la fois, s'allonger en de petites tiges articulées, rameuses, souvent terminées par deux ou trois articles plus gros, seminulifères, et réunies par touffes plus ou moins étalées (pl. 7, fig. 6, 6). Ces petits végétaux, que l'on ne peut rapporter qu'au genre *Leptomitus* (1), et auxquels nous proposons comme nom d'espèce celui d'*albuminis*, ont beaucoup d'analogie avec une autre espèce que nous a communiquée M. Biot, et qui s'était développée au fond d'un flacon bien bouché, rempli d'eau distillée et dans laquelle on avait mis une petite quantité de Dextrine.

La densité, le collant et le filant du blanc de l'œuf (2), prou-

---

(1) *Leptomitus*, Agardh, syst. xxiij et 49.

(2) Le blanc d'œuf se concrète par la cuisson. En cet état, il devient d'un beau blanc luisant à sa surface; sa consistance est assez ferme, élastique et bondissante; sa cassure, comme celle du verre, a lieu dans tous les sens indistinctement; elle est irrégulière et luisante. L'odeur qui se développe par la cuisson n'a rien d'agréable, et la saveur a peu gagné; il se divise sous la dent en grumeaux; vu au microscope, il paraît jaunâtre et composé d'une pulviscule composée de globulins excessivement fins et rapprochés les uns des autres. C'est un coagulum pulvisculaire, dont les éléments sont retenus par une force de cohésion.

Le jaune de l'œuf, plus richement organisé, se concrète aussi par la cuisson. En ce nouvel état, il devient friable, perd un peu de l'intensité de sa couleur, et verdit souvent à sa surface; son odeur et sa saveur se dévent qu'il est le composé d'un grand nombre de globulins qui, en raison de leur excessive ténuité et de leur grande transparence, sont invisibles au microscope; mais comme ils existent véritablement, et que chacun d'eux a son centre vital particulier, ils doivent, toutes les fois qu'on leur offre un milieu et des aliments convenables, croître, devenir bientôt visibles, et enfin, comme seminules, germer et se développer en de petits végétaux rameux et articulés, comme nous l'avons déjà dit pour ceux du Périsperme de l'Orge, d'où résultent toutes les végétations de la Levûre et du *Mycoderma* de la bière.

§ XI.

De la fermentation acéteuse et alcoolique du Lait (pl. 8 et 9).

Le lait peut être considéré comme une sorte de Moût naturel, composé en grande partie d'eau, de sucre dissous et de globules organisés, très-analogues, quant à la vie organique

---

veloppent; il est agréable au goût et il sèche la bouche, ce qui le rend difficile à avaler. Vu au microscope, on n'aperçoit plus les globules normaux, mais bien des masses plus ou moins polyédriques, de grandeurs variables, $\frac{1}{10}$ de millimètre environ, qui se séparent facilement les unes des autres, sont d'un jaune de laiton et très-finement ponctuées. Sont-ce des agglomérations de globulins très-ténus? Dans tous les cas, c'est à leur facile séparation qu'est dû le caractère de friabilité du jaune cuit, et à leurs angles leur peu de coulant sur la langue.

ou végétale, aux globules des Levûres tirés du règne végétal, Moût produit par les tissus mammaires et sous l'influence de la vie d'association de l'animal. Ce Moût lactifère contient donc en lui-même tous les éléments nécessaires à sa fermentation. Dans ses globules organisés se trouve sa propre Levûre, et dès que ces globules, après s'être élevés à la surface du sérum pour y jouir de l'oxygène (1), germent et végètent comme ceux de toutes les Levûres, en cet état ils séparent les éléments du sucre, absorbent et s'assimilent ceux qui leur conviennent, en laissant les autres de côté, comme l'alcool et l'acide.

Lorsque, dans un de nos derniers Mémoires, nous annonçâmes la curieuse vitalité organique des globules du lait, et leur végétation en une Mucédinée, nous savions que ce qui se passait dans le lait était comparable à ce qui a lieu dans la cuve du brasseur; nous savions que c'était une véritable fermentation qui commençait au moment de l'ascension des globules, et dans laquelle la végétation de ces globules ou de leurs globulins, était la cause de la décomposition du sucre naturellement formé dans ce liquide; mais, dans la crainte de devancer les nombreuses observations physiologiques que nous faisions alors sur la fermentation en général, nous prîmes un titre tout physiologique (2) au lieu de celui plus simple,

(1) Les globules du lait, comme corps organisés végétants, sont très-susceptibles d'être influencés par l'électricité dans leur physiologie; aussi remarque-t-on que par les temps d'orage, les globules, pressés de jouir de l'oxygène et de végéter, montent quelquefois au bout de 12 heures, au lieu de 24, qui est le terme le plus ordinaire.

(2) *Recherches microscopiques sur l'organisation et la vitalité des globules*

mais aussi plus vague : *De la fermentation acéteuse ou alcoolique du lait.* Ces végétations du lait purent étonner, parce qu'on ne savait pas encore cet axiome nouveau : *Point de décomposition de sucre, point de fermentation sans l'acte physiologique d'une végétation.*

§ XII.

De la Levûre produite par les jus de Pomme et de Raisin.

Ces Levûres, qui nous ont été remises fraîches et toutes développées par M. Cagniard-Latour, présentaient toujours au microscope, des végétations articulées et fort analogues aux précédentes (pl. 4, fig. 1 et 2). Le jus de ces deux sortes de fruits fut filtré par l'auteur. En cet état il était limpide et n'offrait encore rien de visible au microscope. Mis ensuite dans un flacon, dont le bouchon en verre servait de soupape, de manière à laisser sortir le gaz carbonique pendant la durée de la fermentation, ils y furent abandonnés séparément pendant un mois environ, temps durant lequel les globulins, provenus du tissu cellulaire parenchymateux des fruits, grossirent, devinrent visibles et se développèrent en autant de petits végétaux assez semblables à ceux qui vivent dans la bière achevée. Ces petits végétaux croissaient sous la forme globuleuse depuis

---

du lait; sur leur germination, leur développement et leur transformation en un végétal rameux et articulé. (*Compte rendu*, séance du 11 décembre 1837, et *Annales des Sciences naturelles*, 2e série, décembre 1837.)

le globulin apercevable jusqu'au diamètre de $\frac{1}{100}$ millim.; arrivés à ce développement, ils montraient deux vésicules emboîtées dont l'intérieure contenait des globulins légèrement verdâtres. Quelques-uns étaient ovoïdes ou pyriformes. Immédiatement après, ils poussaient un ou deux bourgeons qui devenaient des articles pyriformes ou allongés. Ces végétaux, que nous supposons incomplets dans leurs développements, se composaient de trois ou quatre articles vésiculeux et remplis de globulins d'autant plus colorés qu'ils font partie des articles les plus anciens. Parmi les végétations du jus de Pommes on voyait des rhomboèdres (fig. 2, *aa*) et une foule d'autres très-petits cristaux en aiguilles, du genre de ceux que l'on nomme des raphides et qui se trouvent réunis en faisceau dans les vésicules du tissu cellulaire d'un grand nombre de végétaux (fig. 2, *bb*).

§ XIII.

Du Mycoderme ou de la Mère du vinaigre.

Mycoderma vini, VALLOT, *Bibl. phys. écon.* aug. 1822. *Ulvina aceti*, KÜTZ.

Si l'on expose à l'air et sous une température de 10 à 30° une liqueur vineuse, elle devient acide. Si l'on ajoute à cette liqueur une certaine quantité de Levûre quelconque, on accélère, par cette addition, la fermentation, l'acidification ou la conversion du vin en vinaigre.

On sait que les vieux vins dépouillés de leur matière végétale ou globulins vifs et suspendus, éprouvent peu ou point la fermentation acide, à moins qu'on ne leur rende l'équivalent de ce qu'ils ont perdu, comme des fragments de ceps de vigne, de feuille, de grappe de raisin, de la Levûre, etc. On sait aussi que si l'on ajoute du sucre dans une eau chargée de gluten de froment, on détermine la fermentation acide et que cette eau se convertit en vinaigre (1). On sait encore que le moût de bière, qui est si riche en matière végétale provenue des globulins du Périsperme de l'Orge, devient promptement acide.

Ce qui veut dire, en général, que tout liquide aqueux et sucré qui contient des globulins vifs ayant appartenu à des tissus végétaux ou animaux, est susceptible de fermenter et produire, pendant le temps de la fermentation, des développements végétaux, lesquels étant amoncelés et agglutinés paraissent à l'œil nu sous l'aspect de masses informes et gélatineuses appelées tantôt du nom de Levûre et tantôt du nom de Mycoderme. Telle est formée la Mère du vinaigre. Des globulins ayant appartenu au jus de raisin qui a servi pour faire le vin, et ces globulins se trouvant pendant assez longtemps en suspension dans ce liquide, y végètent sous l'influence de l'air et forment de petits végétaux (pl. 7, fig. 11) analogues à ceux que nous avons déjà décrits, puis s'entassent et se feutrent faute d'espace, de manière à produire, par la dessiccation, des masses solides, élastiques et toujours

(1) Si le gluten en dissolution n'est pas pur, s'il est mal lavé, de manière à ce qu'il contienne encore des globulins de fécule, il suffira de fournir à ceux-ci le sucre comme pâture pour qu'ils végètent, et pour que par cet acte physiologique ils décomposent le sucre et produisent le mouvement de la fermentation acide.

très-hygrométriques ou très-avides de l'eau qu'elles ont perdue (1). On voit quelquefois de ces Mères du vinaigre qui ont des étendues considérables, et des formes qui étonnent au premier abord. M. Bory de Saint-Vincent nous communiqua, il y a quelque temps, une Mère qui représentait un boudin, long de 22 pouces et d'un pouce de diamètre. Ce boudin, qui avait l'aspect et la consistance de la chair, s'était formé dans une seule bouteille remplie de vinaigre et s'était contourné en spirale à mesure qu'il augmentait, par addition de nouveaux petits végétaux. Si l'on ne savait pas combien était grande la quantité de liquides interposés entre les composants de ce boudin mycodermique, on ne devinerait pas comment, dans une seule bouteille de vinaigre, il avait pu se trouver assez de globulins organiques pour construire une masse d'une aussi grande étendue.

Nous nous arrêterons à cette série d'expériences et d'observations, auxquelles nous pourrions en ajouter beaucoup

---

(1) Les prétendus filaments qui s'agitent et se meuvent en tous sens dans cette fermentation, sont les anguilles du vinaigre, *Vibrion aceti* (pl. 7. fig. 12 et 13). Il n'y a rien de plus amusant que de voir, au microscope, ces anguilles paître ou dévorer les petits végétaux moniliformes qui ont produit la fermentation en décomposant le sucre et en se nourrissant de l'un de ses éléments. A la fin de la fermentation, animaux et végétaux se décomposent dans leur vie d'association, tombent pêle-mêle en une sorte de magma dans lequel restent intacts les œufs des uns et les seminules des autres, ce qui fait qu'une portion de ce magma, qui est la Mère du vinaigre, peut servir à une nouvelle fermentation par les développements et la multiplication de nouveaux végétaux et de nouvelles anguilles.

d'autres, mais qui, se ressemblant toutes au fond, n'apprendraient rien de plus sur l'objet principal de ce Mémoire.

Nous avons déjà dit que, sans certaines idées d'animalité et d'agrégations organiques singulières, M. Desmazières ne se serait pas détourné de la ligne savante sur laquelle il s'était si habilement placé, et que cette route l'aurait indubitablement conduit, longtemps avant M. Cagniard-Latour, à reconnaître la végétation des Levûres, qui n'est que le commencement de celle des Mycodermes.

Cette découverte, destinée à déchirer le voile mystérieux qui masquait le phénomène de la fermentation et de la production des Levûres, ne pouvait se faire attendre bien longtemps dans un moment où il se fait tant d'observations microscopiques.

M. Frédéric Kützing, très-accoutumé aux observations et à l'étude des végétaux microscopiques, comme le prouvent les excellents travaux qu'il a publiés, s'occupait à Berlin, en même temps que M. Cagniard-Latour, à Paris, à faire des recherches sur la Levûre de bière, sur la Mère du vinaigre, sur le mucilage du Coing et autres produits analogues, et y découvrait, de son côté, que toutes les Levûres et tous les Mycodermes étaient des agglomérations fortuites composées de tous les petits végétaux développés dans le liquide pendant la durée du travail de la fermentation (1).

---

(1) Recherches microscopiques sur le ferment et la Mère du vinaigre, et de quelques autres formations qui en dépendent. (*Répertoire de Chimie*, t. III, p. 257), et (*Journal für praktische Chemie*, Band. S.)

Un autre observateur, non moins capable, M. Schwann, attestait le même fait.

Chercher à savoir lequel de ces trois savants est arrivé le premier à découvrir l'organisation et la végétation des Levûres, nous paraît une chose trop peu importante en elle-même pour que nous nous y arrêtions un moment, et surtout dans un temps où tant d'observateurs sont en action sur tous les points du globe, et où il faut, vu les nombreux moyens de publication, faire de la science de détail. Il nous suffit de savoir, et nous en avons la conscience, que ces trois expérimentateurs, sans se connaître, sont arrivés au même résultat.

Nous aimons à lire dans le Mémoire de M. Kützing le passage suivant qui est relatif aux petites querelles de priorité, qui font perdre si inutilement le temps aux savants, et auxquelles le public, mieux avisé, ne prend jamais part : « Je me « félicite, dit-il, de voir mes expériences concorder avec celles « de deux autres expérimentateurs dont les travaux ont été « faits comme les miens, sans que chaque auteur ait eu con- « naissance des résultats obtenus par ses antagonistes. Peu « importe pour la science que l'honneur de la priorité appar- « tienne à tel ou tel (1) ! »

---

(1) Aujourd'hui, qu'en toutes choses, tout le monde pousse confusément à la roue, il n'est plus guère possible aux individus en action de prouver qu'ils ont dépensé plus de force que leurs voisins pour atteindre tel ou tel but. Il fait pitié de voir encore les chercheurs venir se chicaner sur la priorité de la découverte d'une aspérité microscopique à la surface d'un poil de souris.

Tout à l'heure, par la force des choses, on sentira cette vérité : que la science est l'œuvre du temps et l'œuvre de tous.

Chaque fois que l'on analyse sérieusement une découverte d'un genre

Il est un point fondamental d'organisation sur lequel nous ne sommes point d'accord avec M. Kützing, c'est celui de l'origine des petits végétaux qui constituent, par agglomération, la masse des Levûres et celle des Mycodermes.

Ce savant micrographe pense que ces végétations sont le produit d'une formation primitive ou spontanée, ce qui veut dire d'une combinaison ou d'une agrégation de matière organique réduite à la division moléculaire absolue. Ce n'est que comme cela que l'on pourrait entendre la spontanéité d'une organisation vivante. Ces sortes d'organisations ne nous paraissent pas possibles, surtout dans le cas des végétaux des Levûres et des Mycodermes, comme de toutes les Mucédinées qui, suivant nos observations, résultent chacune du développement partiel d'un *seul* des globulins dissociés des matières organisées qui ont été employées ou qui se trouvent dans les liquides qui servent de territoires à ces végétaux infusoires.

La découverte des globules vésiculeux dont est composée la Levûre de bière, et l'organisation végétale de ces globules date déjà de fort loin. Leeuwenhoek, bien certainement inconnu de M. Cagniard-Latour, comme il l'est de la plupart des physiciens et des chimistes, l'a démontrée en 1680, dans un Mémoire particulier, sous le titre : *De la fermentation de la Bière* (1).

---

quelconque, on la voit le plus souvent disparaître en entier ou être réduite à fort peu de chose lorsqu'elle vient à être dépouillée de tout ce qui était déjà inscrit dans la science.

(1) *De fermento cerevisiæ. De bullulis aëreis ex eo propullulantibus, ut et ex oculis cancrorum. Additur quæstio an animalcula in vasis obturatis nutriri ac vivere possint. Arcana nat. detect. Edit. Nov.* 1722, tom. II, pag. 1, fig. 1, 1, 1, et fig. 2, pag. 2.

Cet auteur vit clairement que la Levûre de bière était formée d'une agglomération de globules vésiculeux qui en contenaient de plus petits, et dont il fixait le nombre à six (pl. 2, fig. 3). Il n'eut aucun doute sur leur nature végétale, puisqu'il pensait que ces globules de Levûre prenaient leur origine de ceux de la farine, soit du blé, soit de l'orge, soit de l'avoine, soit du sarrasin, etc. Mais cet habile naturaliste micrographe en resta à cette première observation : il ne sut point que les globules vésiculeux de la Levûre de bière étaient de véritables seminules capables de germer et de végéter dans le liquide sucré du Moût de la bière et d'être, dans la fermentation, les acteurs de la décomposition du sucre et des produits qui en résultent. Il ignora donc tout ce qu'il y avait d'intéressant à connaître pour arriver à la découverte de la cause toute physiologique des fermentations, car pour celle des globules, il s'agit seulement de soumettre au microscope un peu de Levûre de bière pour avoir à l'instant la conviction de leur existence.

Quant au groupement des globulins par six, dont parle longuement Leeuwenhoek, nous n'avons jamais rien vu de semblable dans nos observations répétées sur la Levûre de bière. Si nous avons bien compris cet auteur, ces groupes se seraient formés dans l'intérieur d'une vésicule maternelle qui, ensuite, se serait dissoute.

Les végétaux infusoires qui résultent de la germination des globules seminulifères des Levûres restent incomplets tant qu'ils sont plongés dans l'épaisseur du liquide. Ils ne s'achèvent, ils ne se terminent que lorsqu'ils peuvent s'élever au-dessus de la surface du liquide et lorsqu'ils parviennent à se mettre en contact avec l'oxygène. C'est seulement sous l'influence bienfaisante de cet agent qu'ils fructifient par le développement terminal d'articles globuleux, seminulifères et souvent colorés en vert-glauque. Tels sont ceux de la Levûre de bière dans le *Mycoderma cervisiæ* (pl. 5, fig. *m*), ceux des globules du lait dans les crèmes abandonnées et en contact avec l'oxygène, ou *Mycoderma lactis*, nob. (pl. 9, fig. *h*, *i*), ceux des Levûres de fruits sur les confitures, ou à la surface des fruits entiers.

C'est au défaut d'achèvement chez les petits végétaux de la bière que l'on doit attribuer le maintien de la propriété incessante des Levûres successives à produire la fermentation et la décomposition du sucre. Plus développés ou terminés, cette propriété vitale tendrait à s'épuiser de générations en générations; elle finirait par s'éteindre. Nous n'aurions plus que la ressource de la production primitive de cette Levûre, celle de la transformation des globulins du Périsperme de l'Orge. Mais grâce à cet arrêt artificiel de végétation, les articles, en se désunissant après la durée de la fabrication de la bière, ont encore toute leur énergie, et alors, à l'exemple des boutures, à l'aide desquelles on perpétue les qualités des variétés des grands végétaux, ils végètent de nouveau, et font fermenter toutes les fois qu'on les sème dans un territoire composé d'eau et de sucre, ou pour parler un langage plus rigoureux, *toutes les fois qu'on les bouture;* car les globules vésiculaires de la Levûre de bière ne sont encore véritablement, pour la plupart, que des mérithalles de tiges désarticulées, ce qui fait qu'un grand nombre sont pyriformes.

C'est ainsi que la Canne à sucre s'épuiserait en matière saccharine, si on laissait sa végétation s'achever par la floraison et la fructification, au lieu, comme on le fait, de l'arrêter longtemps avant ce terme, et si on ne la reproduisait que de graines au lieu de la bouturer. Par ce moyen de culture nous contrarions la nature afin de perpétuer la jeunesse de cette plante et sa plus grande énergie à sécréter la matière sucrée.

Ce que nous avons dit relativement à l'achèvement seminulifère des végétaux infusoires des fermentations sous l'action de l'oxygène est une loi à laquelle sont soumis tous les végétaux. Ceux qui croissent dans les eaux et qui ne sont que de plus grands infusoires, ont également besoin, pour se terminer par la fructification, de s'élever dans l'air atmosphérique. Ce besoin est si impérieux que, par exemple, un *Calitriche*, privé d'eau, peut fleurir et fructifier quoique n'ayant que deux ou trois lignes de longueur, tandis que, s'il se trouve dans une eau profonde de quelques pieds, sa tige s'allonge jusqu'à ce qu'elle ait atteint l'air sans l'influence duquel elle ne peut fleurir et fructifier. C'est toujours par la même raison que les végétaux terrestres et aériens tout à la fois, lorsqu'ils sont enfermés ou trop avoisinés par d'autres corps, dirigent leurs rameaux du côté où il y a le plus à pâturer soit d'humus accumulé sur la terre ou dans la terre, soit de lumière, d'oxygène et d'humus volatilisé dans l'atmosphère (1).

---

(1) De temps en temps on voit reparaître, comme sujet d'étonnement, qu'un végétal puisse se développer dans l'eau et dans l'air seulement sans l'assistance de la terre, et que dans ces deux milieux il puisse prendre de l'étendue et du poids, qu'il puisse même fleurir et fructifier, beaucoup moins cependant que si l'une de ses parties était plongée dans un sol meuble et riche de matière organique nutritive.

Pour qu'un végétal puisse vivre et croître autant que son espèce le

Les végétaux infusoires des Levûres agissent dans le liquide sucré où ils vivent comme le font tous les autres végétaux

---

permet, il faut absolument que toutes ses parties soient plongées dans un milieu formé d'air, de lumière et d'oxygène, comme stimulants, et d'éléments provenant de la division moléculaire de matières organiques comme nutritifs. Si maintenant on voit le végétal tout entier comme s'il était suspendu dans l'espace, si l'on sait bien qu'il absorbe plus ou moins sa nourriture par tous les points de sa surface, si l'on sait bien que la matière nutritive ambiante ne peut être absorbée, mais surtout assimilée, qu'à son plus grand état de division moléculaire, état dans lequel, comme celle des miasmes, elle cesse d'être visible et dans lequel elle s'unit à l'eau ou se volatilise dans les couches de l'atmosphère les plus voisines de la terre, on ne s'étonnera plus de voir un végétal vivre tant bien que mal en pâturant seulement dans l'eau et dans l'air, quoique dans ces deux milieux la nourriture soit moins abondante que dans le sol, qui, en raison des lois de la pesanteur, en recèle une plus grande quantité. Mais dans tous les cas, soit que la matière nutritive soit encore en fragments organisés (fumier), ou dissoute et amoncelée en engrais délayé, soit qu'elle soit moléculairement divisée dans l'eau ou dans l'air, cela revient au même, puisque toujours la division moléculaire est une préparation nécessaire à l'absorption et à l'assimilation végétale. Tout cela nous paraît avoir un tel degré de simplicité que nous sommes toujours fort étonné de voir des hommes, si capables d'ailleurs, revenir sans cesse sur une chose si simple et si naturelle.

Une propriété d'une petite étendue, qui serait entourée de plusieurs grandes propriétés, dont les propriétaires seraient prodigues d'engrais, pourrait se couvrir d'assez bonnes récoltes nourries par l'atmosphère dans laquelle se trouverait à l'état volatil l'excédant de l'engrais employé par les voisins. Ce serait bien un engrais qui ne coûterait rien au petit propriétaire du centre, mais il aurait coûté à ceux environnants qui l'auraient acheté. Ce sont ces mêmes engrais volatilisés, inappréciables dans l'atmosphère, même aux plus forts grossissements de nos microscopes, dans le milieu où ils se trouvent plongés. Dans tous les cas, il y a toujours décomposition et triage des matériaux environnants, il y a succion, absorption et assimilation des parties qui conviennent à l'organisme et rejet et abandon de celles que repousse l'organisation tissulaire. D'après cela on peut dire que tout espace terrestre, aquatique ou aérien, occupé par des végétaux vivants, offre une fermentation générale et incessante.

En déposant ou en accumulant la matière saccharine dans les fécules des Périspermes ou, à défaut de ceux-ci, dans les épais cotylédons qui ne se développent pas dans la germination (1), la nature a prévu aux premiers besoins de l'alimentation des plantules. Les bourgeons, qui ne sont que des

---

qui s'élèvent assez pesamment dans l'air, à l'aide de la chaleur, au-dessus des marais remplis de détritus végétaux ou animaux et que l'on nomme miasmes; ce sont, disons-nous, ces engrais volatils qui, comme matière organique, sont nutritifs pour les végétaux, les favorisent dans leurs développements, tandis qu'ils sont funestes à l'homme, qu'ils tuent sous les symptômes de la fièvre jaune.

(1) Ces premières feuilles de la plantule, qui ne sont point des mamelles pourvues de vaisseaux mammaires destinés à sécréter et à charrier le lait nourricier de l'embryon, comme plus d'un botaniste l'a avancé, dans l'intention de rendre la science plus aimable ou plus poétique, ces feuilles ayant acquis tout le développement dont elles sont susceptibles, se flétrissent, meurent, se décomposent en véritable fumier ou en engrais, et, en cet état de décomposition, servent à la nourriture de la plantule, comme le font les feuilles de l'arbre qui, tombées sur le sol, pourrissent autour de lui et le nourrissent comme le ferait toute matière organique étrangère, comme, enfin, nous pourrions nous nourrir momentanément de l'un de nos membres.

embryons qui, comme des enfants paresseux, au lieu de s'en isoler et de se suffire, restent entés sur leur mère, sont approvisionnés de la même manière, ainsi que tous les jeunes tissus, à mesure que la masse végétale s'étend en rayonnant sur tous les points.

Si l'on a présent à l'esprit qu'une masse tissulaire est une agglomération d'individus (1) élémentaires vésiculeux ou fibreux, on comprendra que chacun de ces petits êtres, placés au milieu de la matière saccharine délayée, décompose cette matière pour son propre compte et qu'il se nourrit absolument comme le font leurs analogues, les petits végétaux des Levûres. Il y a donc, où la végétation s'accroît, fermentation et décomposition du sucre, comme dans les fermentations ordinaires.

CONCLUSION.

Toutes les expériences et toutes les observations physiologiques que nous avons faites, dont une partie seulement se trouve consignée dans ce Mémoire, ont servi à nous prouver :

1° Que toutes les Levûres naissent ou tirent leur origine des tissus organiques d'où elle s'isolent, après la vie d'asso-

---

(1) C'est comme cela que nous entendons qu'un végétal est une individualité composée, qui jouit d'une vie d'association formée d'une prodigieuse quantité de vies individuelles, dont le centre existe dans chaque globulin du tissu cellulaire et dans chaque fibre vers son extrémité croissante.

ciation (1) de ces tissus, sous forme de globulins souvent invisibles au microscope au moment de leur dissociation, comme

---

(1) La pluralité d'individus, le plus souvent microscopiques, et, par conséquent, la pluralité de vies particulières qui servent, par agglomération, à constituer l'individu composé et la vie d'association chez les végétaux et les animaux, est un fait général dont la preuve se trouve partout. Ce fait est en rapport avec celui, non contesté, de la formation des masses inorganiques dans lesquelles il y a toujours agrégation de corps plus petits. Dans la division organique des individus constitutifs, le physiologiste s'arrête au globulin le plus ténu que le microscope puisse faire apercevoir, et il faut que ce globulin soit doué des attributs fondamentaux de la vie organique qui sont : l'absorption, l'assimilation, l'accroissement déterminé et souvent la reproduction. Nous reviendrons en temps et lieu sur cette vérité importante, sans laquelle l'organisation et la vie ne peuvent être que très-incomplétement comprises.

Si dans cette division on procède du plus simple au plus composé, du Globulin monadaire et élémentaire des masses tissulaires organiques jusqu'aux Hommes agglomérés en sociétés, on trouvera l'organisation muqueuse et la vie qui l'imprègne dans cinq états bien distincts, dus à des conglomérations successives des plus simples aux plus composées.

1° Celui du Globulin monadaire, microscopique, le plus ténu possible, jouissant au degré le plus simple (par rapport à nos moyens de perception) de la vie organique individuelle et du mouvement. Non que nous pensions que ce Globulin ne puisse être encore le composé de Globulins plus ténus.

2° Celui qui résulte de l'association, par contiguïté, de l'organisation et de la vie particulière des Globulins dans la formation des organes pleins ou creux, globuleux ou vésiculeux, fibreux ou tubuleux qui servent à la tissure des masses organisées.

Dans ces organes, constitués par le rapprochement d'un grand nombre de Globulins monadaires qui n'ont perdu de leur vitalité organique et ceux, par exemple, de l'Albumine de l'œuf, du jus filtré de raisin, de pomme, de prune, de groseille, etc., qui n'apparaissent que quelque temps après à la surface des liquides sucrés, sous la forme de légères pellicules composées de la réunion d'un nombre prodigieux de globulins qui n'ont guère alors qu'un 800^{me} de millim., et qui, en raison de cette extrême ténuité, jouissent d'un mouvement de fourmillement bien prononcé.

2° Que ces globulins, doués chacun d'un centre vital particulier, sont autant de corps producteurs, autant de seminules de diverses espèces de Mucédinées qui n'attendent que

---

individuelle que le mouvement de locomotion, se trouve sensiblement l'organisme et la vie d'association.

3° Celui qui existe dans la réunion des deux précédents chez les organes composés et ayant des fonctions vitales particulières à remplir, soit dans le végétal, soit dans l'animal, tels, par exemple, que le cœur, le poumon, l'estomac, etc.

4° Celui, toujours plus composé, dans lequel on reconnaît l'organisation et la vie d'association dans un végétal ou dans un animal plus ou moins complexe.

5° Celui enfin, plus composé encore, que l'on remarque lorsque les Hommes s'agglomèrent en corps et que dans cette agglomération chaque individu composé confond sa vie d'association avec celle des autres. De là cet esprit de corps si connu et si permanent tant qu'on n'en dissocie pas les éléments. Cette dernière vie d'association n'aurait pas lieu si les Hommes, pleins de leur vie d'association particulière, n'étaient que simplement rapprochés; dans ce cas il ne s'établirait pas plus de liaison, pas plus d'unité vitale qu'entre les cailloux roulés du bord de la mer. C'est le cas d'un peuple dont les individus s'isolent et ne s'occupent que de leur bien-être particulier.

des milieux convenables à leur nature pour se développer, ce que leur offrent toujours l'eau, le sucre, une certaine température et le contact plus ou moins grand de l'air et de l'oxygène.

3° Que tous ceux que nous avons eu l'occasion d'observer n'ont commencé à germer qu'après avoir atteint l'état d'un globule vésiculaire du diamètre de $\frac{1}{100}$ de millim., époque à laquelle ils poussent leurs tigellules articulées, simples ou rameuses.

4° Que les Levûres produites, soit par les globules vésiculaires primitifs dont nous venons de parler, soit par la désarticulation de ceux dont se composent les tigellules, paraissent assez semblables, en ce que toujours elles sont des masses sèches ou molles composées, par simple agglomération, de seminules reproductives, sphériques, ovoïdes ou légèrement pyriformes ; qu'elles ne diffèrent que par leur qualité ou leur propriété à faire fermenter plus ou moins activement le liquide sucré dans lequel elles se trouvent plongées ; que ces masses de Levûres, comme corps reproducteurs végétaux, sont comparables à un tas de blé, de millet ou de toutes autres menues graines.

5° Que comme toutes les Levûres se ressemblent sous le rapport de leur organisation végétale, et sous celui du rôle que ces petits végétaux jouent, comme principaux acteurs, dans l'acte de la fermentation, nous allons seulement nous occuper de la Levûre de bière, parce que tout ce que nous en dirons s'appliquera plus ou moins à toutes les autres espèces.

6° Que les études microscopiques que nous avons faites du Périsperme de l'Orge (pl. 1, fig. 4) nous ont amené à reconnaître que les très-petits globules de la fécule, et peut-être les nombreux globulins échappés des gros globules crevés (fig. 5), étaient la source ou l'origine de la Levûre de bière, et de toutes les végétations qui résultent successivement, et par voie de générations, des globules seminulifères de celle-ci, c'est-à-dire, depuis la Levûre primitive du Moût, jusqu'au *Mycoderma cervisiæ* le plus achevé (pl. 5, fig. 8, *m*).

7° Que les globulins provenus du Périsperme de l'Orge, ayant déjà végété et grossi pendant le travail de la décoction ou de la Trempe, se trouvent, dans ce liquide, assez développés, pour pouvoir être considérés comme de la Levûre nouvelle et primitive. En continuant de la même manière, ils sont bien plus nombreux dans le Moût. En cet état, ce sont de véritables seminules vésiculaires, remplies de globulins très-vraisemblablement reproducteurs de l'espèce, seminules qui maintenant n'attendent plus que l'occasion de germer et de végéter en une Mucédinée.

On peut demander ici comment les globules seminulifères de la Levûre ont pu n'être pas détruits par l'ébullition du Moût, qui a duré plusieurs heures, et pendant lequel temps, au contraire, ils se sont multipliés. Le fait existant ne nécessite point de réponse. Cependant, nous dirons que les seminules des Champignons que l'on fait bouillir n'en sont nullement altérées, et qu'étant ensuite versées avec l'eau sur le territoire qui leur convient, elles y germent parfaitement et abondamment. Toutes les seminules doivent être dans ce cas. Les globûles vésiculaires du lait restent toujours intacts après avoir bouilli.

8° Que si l'on abandonne à lui-même ce Moût de bière, composé d'eau, de matière mucilagineuse, de sucre, de seminules globuleuses de Levûre, de l'huile essentielle aromatique ou principe amer de la Lupuline du Houblon, et des globules morts de cette dernière (pl. 1, fig. 14), ce Moût fermente faiblement, il y a indolence dans l'action, le sucre se décompose lentement, l'alcoolisation se fait incomplétement, et l'on a une mauvaise bière qui tourne très-promptement à l'acide, parce que le nombre des décompositeurs n'est pas assez considérable.

9° Que si au nombre des seminules primitives de la Levûre naturelle, qui se trouve dans le Moût, on en ajoute une certaine quantité d'autres, obtenues de la récolte précédente, c'est-à-dire, d'une des dernières cuvées, à l'aide de ces nombreux auxiliaires (pl. 2, fig. 2) le travail de la fermentation est prompt, énergique; sept ou huit heures suffisent, le gaz acide carbonique se dégage des petits végétaux et s'élève abondamment sous forme de bulles et d'écume, et le sucre bientôt converti, en grande partie, en alcool, la bière dans ce cas peut être de bonne qualité.

Que cette addition de Levûre, qui consiste en des milliards de seminules, est un véritable ensemencement dans un territoire particulier qui est le Moût.

10° Que les nouvelles seminules, versées dans la cuve à fermentation et réunies à celles qui s'y trouvaient déjà, germent et se développent en autant de petits végétaux moniliformes, composés de cinq ou six articles, avec une tendance à la ramescence (pl. 2, fig. 6). Que la durée de l'existence de ces petits végétaux subordonne celle de la fermentation, de manière à ce que la première qui précède est la cause de la seconde. Ce qui veut dire qu'au moment où la végétation cesse le mouvement s'apaise, tombe et s'évanouit, comme un feu de paille qui manque d'aliment.

11° Que l'existence, bien reconnue aujourd'hui, des innombrables *Torula cervisiæ,* dont la Levûre offre les séminules agglomérées en pâte, explique très-simplement le revenu considérable de la Levûre à chaque fermentation, la cause du mouvement et de la chaleur, la décomposition du sucre, la production de l'alcool et de l'acide carbonique, l'augmentation incessante de la Levûre dans chaque cuvée ou à chaque récolte par la multiplication des nombreux individus, celle de leurs articles globuleux, dissociés ou désarticulés, mode d'augmentation ou de multiplication comparable à celui de tous les autres végétaux.

12° Que toute fermentation étant l'effet d'un acte vital dû au développement d'un nombre considérable d'individus organisés, le plus souvent végétaux, mais aussi quelquefois animaux, qui, dans le liquide, jouent le rôle de divisateurs, ne peut avoir lieu sans la présence d'une matière organique, c'est-à-dire, sans la présence de globulins dissociés d'une masse de tissu, ayant fait partie d'un végétal ou d'un animal, ou, ce qui revient au même, d'une portion de Levûre, puisque celle-ci n'est composée que d'une agglomération de globules désagrégés de la tigellule articulée des *Torula* après leur vie d'association, et de ceux provenus du Périsperme de l'Orge précédemment employé.

13° Que les petits végétaux *Levûriens,* soumis aux lois de l'organisation, ont besoin pour se nourrir et se développer de la pâture que leur offre l'une des parties du sucre, sans laquelle substance ils meurent de faim et se décomposent chaque fois que, plongés dans l'eau pure, ils sont privés de stimulant et de nourriture.

14° Que par fermentation on doit entendre : association composée d'eau, de sucre, de corps vivants se nourrissant et se développant, par absorption, de l'une des parties du sucre, et en isolant, soit l'alcool, soit l'acide acétique; action toute physiologique qui commence et finit avec l'existence des infusoires végétaux ou animaux qui la déterminent, et dont la vie ne cesse que par l'épuisement total de la matière saccharine et nutritive. C'est alors que mourant d'inanition et ne pouvant plus se soutenir dans l'épaisseur ou à la surface du liquide, on les voit se précipiter les uns sur les autres et s'entasser au fond du vase sous forme de lie mucilagineuse, de sédiment ou de Levûre.

15° Que toute fermentation alcoolique ou acéteuse n'a pu être produite jusqu'à ce jour que par la présence de globulins organiques, vivants, capables de végéter dans le liquide sucré, et jamais par les matières inorganiques essayées; matières qui, étant ajoutées aux globulins vifs des Levûres, peuvent, *seulement,* ou rester neutres, comme la gomme ou de la poussière de marbre, ou agir comme stimulants pouvant servir à relever de leur indolence les globules de Levûre, ou enfin à les détruire quelquefois complétement, comme le font les acides plus ou moins concentrés qui, comme l'on sait, en tuant les acteurs vivants arrêtent toute action fermentante.

SUPPLÉMENT.

LEVURES PRODUITES PAR LE JUS FILTRÉ DE LA PULPE DE DIVERS FRUITS.

Par le mot pulpe on entend le tissu cellulaire charnu, mou et aqueux du Sarcocarpe ou Mésocarpe du Péricarpe de certains fruits mûrs. Ce tissu cellulaire, très-abondant dans la pêche et tous les fruits à noyaux, dans la Pomme et la Poire, dans l'Orange, dans le Raisin, etc., est le même que celui, souvent si mince, qui forme l'épaisseur d'une feuille. Composé partout d'une simple agglomération de vésicules maternelles contiguës, toujours remplies de globulins plus ou moins développés, plus ou moins colorés, doués individuellement d'un centre vital particulier, il n'est pas étonnant que ces globulins, une fois libres et isolés de l'organisation composée et de la vie d'association du végétal, puissent, étant placés dans un milieu convenable, végéter et se transformer, sous ces nouvelles influences, en une Mucédinée filamenteuse et articulée.

Il n'est pas étonnant de voir que toutes les Levûres capables de faire fermenter, et de décomposer la matière saccharine, doivent *toutes appartenir au règne organique* et être des agglomérations de globulins vivants, dissociés des masses tissulaires, soit d'un végétal, soit d'un animal après la vie d'association.

On dira peut-être que le jus filtré de la pulpe d'un fruit mûr est réduit à un liquide simplement laiteux, mais dans lequel les plus forts grossissements du microscope sont souvent insuffisants pour déceler les globulins excessivement ténus qui ont traversé le filtre et qui, suspendus dans l'eau, en troublent la limpidité.

Ce sont ces globulins si ténus et par conséquent si transparents qui, lorsqu'on les abandonne dans leur eau sucrée, croissent, deviennent vésiculeux en produisant d'autres globulins dans leur intérieur, germent ensuite, végètent en filaments mucédinés, décomposent le sucre, et sont la cause de tous les effets qui constituent ce que l'on appelle la fermentation alcoolique.

1. *Levûre de Pêches.*

Jus blanchâtre, légèrement acide.

Vue au microscope.

Globules nombreux, isolés, sphériques, gradués depuis le globulin punctiforme jusqu'au 100^e de millimètre. Les moyens et les plus gros devenus vésiculaires et remplis d'une nouvelle génération de globulins. Épaisseur de la vésicule maternelle indiquée par un double cercle. Mouvement brownien chez les globulins extérieurs les plus ténus.

2. *Levûre de Prunes.*

Jus d'un jaune ambré. Odeur légère de Séné. Saveur acide assez prononcée. Fermentation lente qui a duré quatorze mois. Dépôt de Levûre couleur terre de Sienne.

Vue au microscope.

Globules nombreux, isolés, les uns sphériques, les autres ovoïdes, gradués depuis le globulin punctiforme jusqu'au 150e de millimètre. Les plus gros montrant un centre lumineux qui indique la vésiculation commençante. Point encore de globulins intérieurs. Mouvement brownien chez les plus petits globulins extérieurs. Formation, parmi tous ces globules, de gros cristaux agglomérés en sphéroïdes rayonnants. Quelques-uns isolés ou seulement groupés par deux ou trois.

3. *Levûre de Cerises.*

Jus transparent. Odeur de Séné. Saveur légèrement acide. Levûre déposée rougeâtre.

Vue au microscope.

Globules nombreux, les uns sphériques, les autres ovoïdes, pyriformes, d'autres allongés et ayant poussé, par bourgeon, un second article; tous formés d'une vésicule mince et remplie d'une nouvelle génération de globulins bien prononcés.

Gradués depuis le globulin punctiforme et fourmillant jusqu'à un 60^{e} de millimètre.

4. *Levûre de Fraises.*

Jus transparent. Odeur de Séné. Saveur très-légèrement acide. Levûre déposée d'un noir ardoisé, violacé.

Vue au microscope.

Globules nombreux, les plus petits punctiformes et fourmillants, les moyens sphériques et commençant à se vésiculiser, les plus développés ovoïdes, allongés, vésiculeux, quelques-uns ayant poussé un article terminal, contenant dans leur intérieur une nouvelle génération composée de deux, trois ou quatre globulins, gradués depuis le globulin punctiforme et fourmillant jusqu'au 100^{e} de millimètre.

5. *Levûre de Framboises.*

Jus légèrement teint de rose ou de violâtre. Odeur un peu framboisée. Saveur légèrement acide et framboisée. Levûre déposée violacée.

Vue au microscope.

Globules nombreux, sphériques, ovoïdes, pyriformes, allongés, vésiculeux, jaunâtres, contenant peu de globulins, gradués depuis le globulin punctiforme et fourmillant jusqu'au 100^{e} de millimètre.

6. *Levûre de Cassis.*

Jus rougeâtre. Odeur faible, agréable. Saveur légèrement acide. Levûre déposée d'un gris violacé.

Vue au microscope.

Globules nombreux, les uns punctiformes et fourmillants, les autres plus développés, sphériques, ovoïdes, pyriformes, simples ou ayant poussé des bourgeons terminaux, tous vésiculeux et contenant une nouvelle génération de globulins. Ils sont gradués depuis le globulin punctiforme jusqu'au 100e de millimètre.

Cette Levûre offre une particularité remarquable qui consiste dans la présence d'un bon nombre de gros globules vésiculaires, remplis de globulins bien distincts, et dont le diamètre est d'environ un 30e de millimètre. Elle présente en outre un grand nombre de cristaux aciculaires, d'épaisseurs et de longueurs variables, les uns isolés, les autres groupés en sphéroïdes rayonnants, d'autres en forme de pinceaux opposés.

7. *Levûre de Groseilles rouges.*

Jus rose. Odeur de Séné. Saveur acide assez prononcée. Levûre déposée rose clair.

Vue au microscope.

Globules nombreux, les uns punctiformes et fourmillants, les autres sphériques, ovoïdes, pyriformes, vésiculeux, nettement arrêtés dans leur contour, marqués du double cercle qui indique l'épaisseur de la vésicule, et remplis d'une nouvelle génération de globulins. Gradation depuis le globulin punctiforme jusqu'au 100^e de millimètre.

8. *Levûre de Groseilles à maquereau.*

Jus blanchâtre. Odeur légère de Séné. Saveur légèrement acide. Levûre déposée blanche.

Vue au microscope.

Globules seminulifères, nombreux, sphériques ou légèrement ovoïdes, transparents, à peine vésiculisés, gradués depuis le globulin punctiforme et fourmillant jusqu'au 150^e de millimètre.

9. *Levûre de baies de Sureau.*

Jus roussâtre. Odeur de Séné. Saveur légèrement acide.

Vue au microscope.

Globules seminulifères, nombreux, sphériques, transparents, très-vésiculeux, épaisseur de la vésicule marquée par un double cercle, remplis de globulins très-distincts. Gradation depuis le globulin punctiforme, fourmillant, jusqu'au 100^e de millimètre.

Cette Levûre est remarquable en ce que, parmi ces globules, il s'en trouve bon nombre qui, sans gradation, ont un diamètre plus d'une fois plus grand, $\frac{1}{40}$ de millimètre.

10. *Levûre du Melon.*

Jus jaunâtre. Odeur de Séné. Saveur légèrement acide et framboisée. Levûre déposée d'un blanc de lait.

Vue au microscope.

Globules seminulifères, peu nombreux, diaphanes, peu consistants, sphériques, ovoïdes ou allongés, gradués depuis le globulin punctiforme, fourmillant et excessivement multipliés jusqu'au 130e de millimètre. Dans cette Levûre très-pauvre, il se forme des agglomérations sphéroïdes ou discoïdes composées des globulins les plus ténus. Les seminules de ces dix espèces de Levûres, obtenues des vésicules du tissu cellulaire du fruit d'autant d'espèces différentes, nous furent successivement remises par M. Cagniard-Latour; elles étaient contenues, avec leur eau sucrée de végétation, dans des flacons bien bouchés.

Toutes avaient végété plus ou moins, sous la forme d'une vésicule globuleuse ou allongée, toutes étaient parties d'un globulin de la plus grande ténuité possible, toutes contenaient une nouvelle génération de globulins. Un petit nombre avaient germé extérieurement de manière à produire, par bourgeon, un second article. Cette végétation peu avancée, à cause du défaut d'air et d'oxygène, avait cependant suffi pour produire une légère fermentation acéteuse, et par conséquent la décomposition d'une petite quantité de sucre.

Mises en contact direct avec l'air et l'oxygène, toutes les seminules de Levûre se seraient développées en mucédinées et, par l'effet de ce développement et de l'absorption, auraient augmenté l'activité de la fermentation, achevé la décomposition du sucre, et isolé une plus grande quantité d'acide acétique.

EXPLICATION DES PLANCHES.

PLANCHE I.

ORGE COMMUNE (HORDEUM VULGARE.)

Fig. 1. Un grain d'orge de grandeur naturelle enveloppé par les écailles ou feuilles rudimentaires de la fleur.

Fig. 2. Le même grandi.

Fig. 3. Le même vu par l'autre face. *a* partie terminale de la tige ou du rachis de la fleur. *b* écailles florales. *c* radicelles annonçant la germination de l'embryon.

Fig. 4. Six vésicules maternelles isolées du tissu cellulaire du Périsperme. Ces vésicules, de grandeurs variables, transparentes et incolores, contiennent une abondante globuline féculente.

Fig. 5. Globuline féculente éparse. Cette globuline, incolore et transparente, est très-variable sous le rapport de la grosseur et un peu sous celui des formes. Plusieurs globules montrent des déchirures dans lesquelles on aperçoit des sortes de couches ou d'enveloppes d'un aspect granuleux.

Fig. 6. Échelle micrométrique indiquant $\frac{3}{100}$ de millim., et sur laquelle on a placé une lignée progressive de grains de globuline ou de fécule depuis le minimum jusqu'au maximum de développement de ces grains, dont les plus gros, comme on le voit, ont à peu près $\frac{1}{35}$ de millim.

Fig. 7. Un Cône fertile de Houblon (*Humulus Lupulus*) de grandeur naturelle.

Fig. 8. Une écaille isolée ayant un fruit dans son aisselle.

Fig. 9. La même grandie et sur laquelle on voit plus distinctement les nombreuses glandules de Lupuline situées sur la partie inférieure de l'écaille ou bractée.

Fig. 10. Trois glandules de Lupuline isolées d'une bractée, grossies, pour faire voir qu'elles sont généralement sessiles.

Fig. 11. Un fruit séparé de la bractée protectrice et recouvert aussi d'une grande quantité de glandules de Lupuline. *a* base des deux styles.

Observation. Il faut remarquer que la surface de ce péricarpe, comme celle de tous les péricarpes toujours formés de feuilles diversement soudées, correspond exactement avec celle extérieure de la base de la bractée, ce qui explique comment c'est le même siége qui produit la Lupuline et comment le péricarpe est formé de deux bractées réduites, latérales, et dont les nervures médianes de ces bractées, en se prolongeant, produisent les deux styles, et les nervures latérales les côtes longitudinales du péricarpe.

Fig. 12. Une glandule vésiculaire de Lupuline vue au microscope et lançant à l'extérieur les innombrables globulins fourmillants qu'elle contient. *a* globulins épars.

Observation. Cette glandule, qui offre une très-grande analogie avec la vésicule pollinique, se compose d'une vésicule extérieure qui semble munie d'un réticule, mais qui est plus probablement formée, comme les épidermes végétaux, de vésicules contiguës. Mise dans l'eau et entre deux lames de verre, on la voit bientôt, comme les pollens, émettre au dehors ses nombreux globulins en même temps que l'huile aromatique et le gaz qui occupaient l'intérieur de ce corps vésiculaire; vue au microscope, la

Lupuline, de jaune qu'elle est à la vue simple paraît d'un vert clair et comme vitrée.

Fig. 13, 13, 13, *abc.* Trois glandules de Lupuline dont la vésicule extérieure déchirée laisse sortir en partie la vésicule intérieure entraînant avec elle les globulins. *dd* vésicules extérieures déchirées; *e* deux vésicules intérieures, isolées et chiffonnées.

Fig. 14. Huile aromatique, essentielle, échappée au moment de l'explosion des globulins d'une glandule de Lupuline et telle qu'elle s'étend et se forme sur le porte-objet du microscope. En elle on observe un grand nombre de globulins très-ténus qui s'y sont mêlés.

Fig. 15. Trois gouttes d'huile contenant aussi des globulins et dont l'une renferme une bulle gazeuse. Cette huile, dans laquelle réside le principe amer, est la seule chose qui agit dans la conservation de la bière.

Fig. 16. Une bulle gazeuse, circulaire, dans laquelle il s'est formé un nombre très-grand de cristaux.

Fig. 17. Une autre bulle qui s'est allongée en cornemuse et dans laquelle se sont formés les mêmes cristaux.

Observation. Je n'ai jamais vu ces cristaux se former en dehors des bulles gazeuses. Il semble que la présence du gaz et l'abri produit par la chambre de la bulle soient deux conditions nécessaires à cette cristallisation.

Fig. 18. Cristaux sortis d'une bulle.

Fig. 19. Cristaux dont quelques-uns sont courbes et d'autres formés successivement les uns sur les autres.

PLANCHE II.

TORULA CERVISIÆ, Turp.

Végétation des globules vésiculaires de la Levûre de bière pendant la fermentation considérée comme la cause physiologique de la décomposition du sucre et de l'isolement de l'alcool.

Fig. 1. Levûre molle, étalée, vue à l'œil nu, de couleur fauve.

Fig. 2. Vue au microscope. Ce sont de véritables seminules globuleuses, ovoïdes ou pyriformes, vésiculeuses, transparentes et remplies de globulins dont un, deux ou trois sont plus gros. Parmi ces seminules, il en est un certain nombre qui proviennent originairement des globulins du Périsperme de l'orge, d'autres des globulins contenus dans les seminules de la Levûre produite, et enfin d'autres, particulièrement les pyriformes, qui ne sont que des articles dissociés de ces petits végétaux représentés figure 6. *a* Agglomération de seminules dans laquelle on voit les cercles se croiser et être sensibles par transparence. Toutes ces seminules, dont le diamètre est à peu près $\frac{1}{100}$ de millimètre, sont parfaitement immobiles. *b*. Une bulle d'air circulaire avec son cercle bleuâtre, renfermant et comprimant un grand nombre de seminules molles et devenues, comme cela arrive quelquefois aux vésicules du tissu cellulaire des végétaux, polygones par pression mutuelle. *c* Échelle micrométrique indiquant $\frac{1}{100}$ de millimètre, et sur laquelle on a placé une lignée progressive de seminules. Les deux premières montrent qu'elles commencent à se vésiculiser au centre. Les deux suivantes laissent voir l'épaisseur de la vésicule et leurs globulins intérieurs de grosseurs variables. Les deux dernières offrent la forme ovoïde et la forme pyriforme.

Fig. 3. Ces quatre figures empruntées à Leeuwenhœk, et dont nous reproduisons ici le calque exact, représentent, suivant l'auteur, des globules organisés de la Levûre de bière différemment groupés ou agglutinés. On s'étonne de ce que ces globules si grossis ne montrent pas leurs globulins intérieurs.

Fig. 4. Lorsque après avoir versé les seminules précédentes de la Levûre de bière dans le Moût, lorsqu'on les a véritablement ensemencées dans ce territoire aqueux et sucré, territoire qui contient déjà les seminules primitives qui tirent leur origine des globulins du Périsperme de l'orge, on voit environ une heure après, en même temps que se manifeste la fermentation, que le plus grand nombre de seminules germent et qu'elles sont munies d'un ou de deux petits bourgeons plus transparents que la seminule. *a* Échelle micrométrique représentant $\frac{1}{100}$ de millimètre, *b* seminules plus ou moins développées. *c* une seminule ovoïde. *d* une seminule sphérique poussant un bourgeon. *e* une seminule ovoïde, munie de deux bourgeons presque opposés.

Fig. 5. Deux heures après, les seminules, ayant continué de végéter, montrent presque toutes que le bourgeon a pris le même diamètre que celui de la seminule maternelle et qu'alors le plus grand nombre des individus sont devenus didymes ou composés de deux articles plus ou moins globuleux, et qu'en outre plusieurs poussent encore de nouveaux bourgeons. *a* Échelle micrométrique donnant $\frac{1}{100}$ de millimètre. *b* seminule sphérique poussant un bourgeon. *c* seminule ayant produit un second article dont l'un pousse un bourgeon. *d idem* munie de deux bourgeons ou de deux futurs articles.

Fig. 6. Au bout de huit heures de fermentation, au moment où le brasseur arrête son opération, les mêmes seminules portées de nouveau sous le microscope montrent que leur végétation a continué et que le plus grand nombre des individus sont devenus de petits végétaux mucédinés, composés de cinq ou six articles de diamètres différents, de formes un peu variables, transparents, remplis de globulins, terminés par des bourgeons naissants, soit terminaux, soit latéraux, ce qui annonce tout à la fois que ces petits végétaux ne sont point achevés au moment où le brasseur termine brusquement leur existence, et que, par la présence des bourgeons latéraux, ils annoncent leur tendance à la ramescence.

Lorsqu'on observe ces petits végétaux au microscope, on les voit assez souvent émettre une pulviscule composée de globulins très-ténus et sans doute susceptibles de croître et de reproduire l'espèce. *a* Échelle micrométrique offrant un centième de millimètre. *b* seminules croissant jusqu'au centième de millimètre. *c* seminule poussant un bourgeon. *d* individu composé de deux articles et d'un bourgeon naissant. *e idem* composé de deux articles, muni chacun d'un bourgeon. *f idem* composé de trois articles et d'un bourgeon terminal. *g idem* composé de quatre articles et d'un bourgeon. *hh* individus lançant leur pulviscule.

Fig. 7. Quelques bouts de filaments tubuleux, rameux, remplis de globulins situés à distance et à la file les uns des autres. C'est une espèce d'*Hygrocrocis* développée là par hasard.

PLANCHE III.

Fig. 1. Levûre de bière semée dans une eau sucrée et dont la végétation est plus ou moins développée. *a* globulins vésiculaires de Levûre ou seminules, contenant des globulins, et n'ayant pas encore germé. *b* seminule germant ou poussant son premier bourgeon, ou son premier article. *cc* seminules poussant deux bourgeons à la fois. *dd* seminules dont le premier bourgeon a atteint le même diamètre que celui de la seminule productrice, et dont l'un des deux individus est en train de pousser un second bourgeon. *e* végétation composée de deux articles complets et de deux bourgeons terminaux et opposés. *f idem* plus avancée. *g idem* plus avancée encore. *h* époque à laquelle les Torula *cervisiæ* commencent à devenir ramescents et à pousser des bourgeons latéraux. *ii* rameaux latéraux composés de deux articles. *l* un individu dont la seminule productrice avait poussé deux rameaux. Parmi ces végétations, on voyait un grand nombre de globulins plus ou moins ténus qui, très-probablement, étaient des seminules avortées.

Fig. 2. Un individu d'*Hygrocrocis* : développé parmi les *Torula cervisiæ*.

Fig. 3. Globules vésiculaires de Levûre de bière tels qu'ils se développent et se modifient dans les tonneaux ou dans les bouteilles de la bière achevée. *aa* globulins morts, échappés des vésicules de la Lupuline et amoncelés dans la bière. On voit quelques filaments très-ténus de Protonèmes. Les deux lignes placées au-dessous de la figure 3 indiquent $\frac{1}{100}$ de millim. Sur cette mesure on a figuré une lignée progressive des états successifs de cette végétation, qui n'offre que de très-légères différences de formes et de couleur avec celle de la figure 1. *a* accroissement de la seminule avant la germination; *b* germinations et végétations plus ou moins avancées.

Fig. 4. Mycoderme du Moût de bière. *Mycoderma cervisiæ*, Desmaz. Cette figure offre une certaine quantité de végétations d'âges différents et de formes variables, dues au développement plus ou moins avancé des globulins échappés des vésicules du tissu cellulaire du périsperme de l'Orge employée pour obtenir le Moût de la bière. Ce sont ces globulins qui, doués de leur centre vital particulier, s'élèvent à la surface du liquide pour y jouir de l'air et de l'oxygène, qui y végètent, s'y enchevêtrent et y forment cette espèce de feutre membraneux et comme charnu que l'on nomme Mycoderme, et, dans d'autres cas, la Mère du vinaigre. Ces végétaux, qui ne sont encore ici qu'à leur début, s'étendent plus tard en de longs filaments tubuleux, articulés, rameux, et se terminent par de petits bouquets ombellulifères, composés d'articles globuleux et reproducteurs de l'espèce, concurremment avec les globulins de l'Orge (voyez pl. 5, fig. 8, *m*). *aa* globulins accrus en globules vésiculaires et contenant de nouveaux globulins. *bb* globules vésiculaires commençant à germer ou à s'étendre: cette extension appartient seulement à la vésicule interne. *c* globule vésiculaire germant sur deux points à la fois. *d* cet individu offre inférieurement le globule seminulifère, et au-dessus un second globule, qui s'est allongé et arrêté, et duquel est résulté un autre article, long et contenant des globulins légèrement grossis. *e idem*, germant par deux points opposés. *f* un individu dont les rameaux terminaux contiennent des corps ovoïdes, provenus d'autant de globulins privilégiés et accrus. *gg*, on voit quelquefois des individus qui émettent des globulins punctiformes ou monadaires.

PLANCHE IV.

Levûre ou globulins provenus du tissu cellulaire pulpeux du Chasselas et de celui de la Pomme, plus ou moins avancés dans leur végétation pendant l'acte de la fermentation de ces deux liquides, qui avaient subi l'épreuve de la filtration.

Fig. 1. Globulins du jus filtré de Chasselas, plus ou moins avancés dans leur végétation. *aa* cristaux qui s'étaient formés dans le liquide.

Fig. 2. Globulins de jus de Pomme, également filtré, plus ou moins développés dans leur végétation. *aa* cristaux rhomboédriques formés dans ce jus. *bb* une quantité prodigieuse de très-petits cristaux en aiguilles, semblables à ceux que l'on nomme des raphides, et qui se rencontrent dans les vésicules d'un grand nombre de tissus cellulaires.

Fig. 3. L'espace indiqué par ces deux lignes représente $\frac{1}{100}$ de mill., sur lequel on a placé une lignée progressive de ces petits végétaux. *a* développement du globulin punctiforme plein, jusqu'au globule vésiculaire prêt à germer. *b* germinations et végétations plus ou moins avancées.

PLANCHE V.

MYCODERME DE LA BIÈRE. (MYCODERMA CERVISIÆ, Desmaz.)

Fig. 1. Ce double cercle représente l'épaisseur d'un verre rempli de bière, exposée à l'air, et à la surface de laquelle il s'est développé une membrane blanchâtre, mucilagineuse, froncée, plus ou moins épaisse. Cette membrane, analogue à celles qui se forment à la surface de tous les liquides fermentescibles, en contact avec l'air et l'oxygène, n'ayant d'abord été considérée qu'à l'œil nu, fut désignée par Persoon sous le nom générique de *Mycoderma*, croyant y voir une sorte de Champignon et une individualité distincte.

M. Desmazières étudiant ensuite ces productions à l'aide du microscope, vit clairement, et fit connaître qu'une Mycoderme n'était point un seul végétal, que c'était une colonie, un amas informe, composé d'une quantité innombrable d'individus, parfaitement distincts les uns des autres, et vivant simplement pêle-mêle sur le même territoire liquide, et dans une aussi grande indépendance que des individus de *Lemna*. Mais cet habile observateur eut le tort grave de croire que ces petits êtres appartenaient au règne animal, que, globuleux et ovoïdes d'abord et doués du mouvement locomotif, ils s'enchaînaient ensuite les uns au bout des autres, de manière à simuler des végétaux mucédinés et pour lors sans mouvement.

La vérité est que, lorsque les globulins de la bière, exposée à l'air, commencent à être visibles au microscope, ils jouissent du mouvement brownien, comme tous les autres corps de cette ténuité observés dans l'eau, et que ce mouvement diminue successivement jusqu'au moment où ce globulin allongé a acquis environ le 100e de millim. Mais ces globulins allongés ne s'ajustent point bout à bout. Là est une erreur. En cet état, véritables seminules vésiculaires, elles germent, s'allongent et végètent en une mucédinée dont le dernier terme de développement décèle un *Penicillium glaucum*.

Fig. 2. Une masse de globulins monadaires, provenant immédiatement de la matière organique de la bière, laquelle provient primitivement de l'Orge. Ces globulins sont recueillis au moment où se forme la première pellicule sur la bière. Ils fourmillent. Parmi eux on voit quelquefois de courts filaments moniliformes, ou comme formés de points d'une ténuité et d'une transparence extrême. Quelques-uns sont rameux. Ces globulins, devenus apparents au microscope, n'ont guère plus de $\frac{1}{700}$ de millim.

Obs. Lorsqu'une matière muqueuse n'offre rien d'apercevable au microscope, comme, par exemple, de la gelée, de la gomme dissoute, du blanc d'œuf, de la séve simplement épaissie en *Cambium* naissant, nous la nommons *Matière organique* ou *Matière organisable*. On lui accorde l'imprégnation de la vie organique au degré le plus simple, on la considère comme les matériaux encore isolés de l'organisation.

On suppose que les molécules invisibles, dont se compose cette matière organisable, se rapprochent, se combinent, et servent, par l'effet de cette association, à construire les divers organes élémentaires des futurs tissus.

N'est-il pas plus vrai de penser que la matière organisable est de toute origine formée d'innombrables globulins trop ténus et trop transparents encore pour pouvoir être appréciables à nos moyens microscopiques actuels, et que tous ces globulins, toujours doués de mouvement et de leur centre vital particulier, mais dont un grand nombre avortent, sont tous capables de se développer isolément, soit en un organe élémentaire de tissu, soit en un végétal mucédiné?

La matière organique ou organisable peut, suivant ses états successifs de développement ou d'âges, et suivant les diverses formes qu'elle prend dans les tissus, être distinguée par des dénominations particulières.

1° On peut l'appeler *Matière organisable*, tant que ses composants globulinés ne sont pas encore sensibles au microscope actuel (1).

2° *Tissu amorphe* ou *globuliné*, au moment où les globulins, d'abord invisibles, apparaissent au microscope après s'être accrus. Amorphe ou sans forme ne s'applique ici qu'à l'association des globulins et non aux globulins eux-mêmes.

3° *Tissu vésiculeux*, lorsque les globulins, en continuant de croître, se sont vésiculisés de manière à offrir une masse de vésicules contiguës, encore vides ou contenant déjà une génération nouvelle de globulins.

---

(1) Cette matière organisable, qui est la même pour tous les tissus du règne organique, puisque partout elle en est l'origine, a été nommée *Cambium*, d'abord chez les animaux, dénomination appliquée ensuite aux végétaux par Grew, Duhamel et par quelques physiologistes modernes. Grew ne nous paraît pas avoir suffisamment compris la véritable nature de son *Cambium*, puisque, au lieu d'y voir le début des tissus, il n'y voyait qu'un simple aliment à l'usage de ces derniers. *Anat. des plant.*, 2e édit., page 54.

4° *Tissu filamenteux* ou *tubuleux*, lorsque les globulins, au lieu de se vésiculiser, se filent ou se tubulisent.

Fig. 3. Les mêmes globulins, dont quelques-uns ont pris de l'accroissement.

Fig. 4. *Idem*, plus avancés, avec quelques individus devenus ovoïdes.

Fig. 5. *Idem*, dont le plus grand nombre, après avoir pris la forme allongée, ont déjà poussé un second article.

Fig. 6. *Idem*, dont la plupart ont germé et végété, au point de montrer de nombreux individus rameux et formés de dix à douze articles ovoïdes vésiculaires, et souvent remplis de granules.

Toutes ces masses présentent toujours, à l'exemple des populations, des individus de tous les âges. On voit quelquefois des articles émettre leurs granules à l'extérieur.

Fig. 7 et 8. Mycoderme plus ou moins avancée, recueillie à la surface d'un Moût de bière exposé à l'air. *a* région composée des plus jeunes individus, quoique déjà d'âges différents. *b* région composée d'individus plus avancés, et parmi lesquels plusieurs sont en germination. L'un d'eux, formé de deux articles germés sur deux points. *c* trois individus germant, dont l'un sur le côté. *d* plusieurs autres, de formes variables et de germinations multiples. *e id.* formes et complications variées. *f* germination sur un seul angle avec une tigellule sans articulation. *f'* germination sur un seul angle avec tigellules articulées. *g* germination d'une seminule presque sphérique sur deux points opposés. *h* vésicules ou seminule parallélogrammique germant sur trois angles à la fois. *i* seminule ayant poussé sur l'un de ses angles une tigellule rameuse avec quelques articles ovoïdes et intérieurs en *i'*. *l id.* plus développée. *m* végétation plus avancée et dont quelques rameaux se terminent par les articles globuleux de la fructification. *n*, *n*, *n*, quelques individus jeunes et dont les articles sont courts et ovoïdes.

Observation. Tous les individus représentés sur cette planche sont purement végétaux, quoique leur seminule soit douée du mouvement brownien à son début. Tous tirent leur origine d'un globulin qui a appartenu à l'existence composée du grain d'Orge. Plein d'abord, ce globulin se vésiculise à mesure qu'il grossit, et atteint au moins le 100e de mill. Sa forme peut varier de la sphérique à l'ovoïde, de celle-ci à l'allongée. C'est alors une seminule achevée, composée de deux vésicules emboîtées, et dont l'intérieure est susceptible de germer ou de s'étendre en un boyau tigellulaire. Dans cette seminule, comme dans l'utricule pollinique, on voit, par transparence, des globulins de grosseurs variables. La tigellule, unique *f*, double *g*, ou triple *h*, comme extension de la vésicule interne, est formée d'un seul tube plus ou moins articulé, plus ou moins rameux, rempli de globulins de diverses grosseurs, et dont quelques-uns, en se développant sous la forme ovoïde *i'*, *l'*, et en donnant lieu à de nouveaux globulins, produisent des articles intérieurs, qui, étant isolés par la destruction de la tigellule maternelle, peuvent servir à la reproduction de l'espèce. Les articles de la tigellule maternelle, en s'épuisant vers les extrémités, se raccourcissent, et, le plus souvent, brusquement, prennent la forme d'un globule sphérique. Ce sont ces articles terminaux qui forment les rameaux moniliformes et disposés en ombelles chez le *Penicillium glaucum*, et dans lesquels articles résident, tout à la fois, la couleur glauque, l'odeur de moisi et la faculté reproductive de l'espèce.

Cette Mucédinée, la plus commune de toutes, la plus répandue, celle qui ne manque jamais d'apparaître sur toutes les matières organiques qui ne font plus partie de la vie d'association, soit d'un végétal, soit d'un animal, comme toutes les autres espèces de cette famille, offre deux grands moyens de reproduction et de multiplication prodigieuse,

1° Par les globulins dissociés des masses tissulaires après la vie d'association d'un végétal ou d'un animal;

2° Par les globules terminaux et seminulifères des ombellules, globules très-susceptibles de germer et de reproduire la même espèce. A ce second moyen de reproduction, qui représente celui des graines, ou mieux des embryons terminaux des végétaux appendiculés, il faut encore en ajouter un troisième, qui consiste dans les articles intérieurs *i'*, *l'*, et qui peut être considéré comme une reproduction par boutures.

PLANCHE VI.

MYCODERMA CERVISIÆ, Desmaz.

Mycoderme de la bière exposée à l'air, ou amas d'articles de tigellules et de seminules allongées, germant et végétant entre deux lames de verre entretenues humides, et s'achevant en *Penicillium glaucum.*

Dans cette masse, on distingue des corps vésiculaires généralement ovoïdes, légèrement parallélogrammiques, remplis de globulins inégaux en diamètre, arrondis sur leurs angles, et montrant un double trait qui indique ou l'épaisseur d'une vésicule ou l'existence de deux vésicules emboîtées. Parmi ces articles vésiculaires qui germent sur un et quelquefois sur deux de leurs angles, se voient une quantité innombrable de globulins de grosseurs différentes, et doués, plus ou moins, du mouvement de fourmillement. *a* corps vésiculaire, seminule ou bouture n'ayant point encore germé ou poussé. *b idem* poussant deux bourgeons sur deux de ses angles. *c* végétations plus avancées, sur un seul angle. *d,d,d,d* végétations formées d'articles nombreux et très-distincts. *e,e* végétations se terminant, assez brusquement, par des articles abrégés, globuleux, colorés en vert glauque, odorants (odeur de moisi), et pouvant, par désarticulation, reproduire, comme seminules, la même Mucédinée. *f* deux tigellules qui, s'étant touchées dans une certaine étendue de leur longueur, se sont entre-greffées par approche, comme le font les masses tissulaires des autres végétaux entre un plus grand nombre d'individus, soit vésiculaires, soit tubuleux. *g* corps vésiculaire poussant deux tigellules sur un seul angle. *h idem* poussant d'une extrémité centrale une tigellule bifurquée. *i idem* ayant poussé une tigellule qui, après les quatre premiers articles ordinaires, a produit plusieurs articles globuleux seminulifères. *l idem* dont les articles offrent des formes différentes de celles accoutumées. *m idem* deux germinations différentes en ce que les tigellules, au nombre de deux, partent chez l'une de deux angles diagonalement opposés, et chez l'autre de deux angles opposés, mais situés du même côté. *n,n idem* deux germinations composées d'une seule tigellule articulée et dont les articles supérieurs *n'* se détachent et s'isolent par rupture, de manière à pouvoir ensuite germer et reproduire le même végétal. *o* bout supérieur de l'une des tiges précédentes plus grossie pour faire sentir qu'elles sont composées d'un tube ou d'un boyau commun, dans lequel se forment les articles ovoïdes et remplis de granules. Pour faire connaître que le boyau extérieur appliqué sur les articles intérieurs se resserre et s'étrangle entre chacun d'eux, jusqu'à ce qu'enfin il se rompe. C'est un chapelet de saucissons contenus dans un seul boyau. *p* une germination isolée sans articles inférieurs apparents, mais montrant quatre articles terminaux, globuleux, seminulifères, et un seul au bout d'un court rameau latéral. *q* une portion de tigellule dans la quelle on voit la disposition des articles intérieurs, et seminulifère. 1° *idem* plus grossie.

PLANCHE VII.

Fig. 1 à 10. Levûre produite par l'albumen de l'OEuf, dans tous les développements de sa végétation pendant la durée de la fermentation alcoolique. 1 globulins punctiformes, monadaires au moment où ils apparaissent à la surface du liquide sucré, et visibles au microscope. 2 les mêmes plus développés. 3 *idem* parmi lesquels plusieurs ont atteint leur diamètre, et quelques-uns en germination. 4 plus généralement avancés. 5, 5 un certain nombre d'individus germants et végétants. 6, 6 individus achevés, réunis en touffes, et constituant dans ce dernier état une espèce de *Leptomitus* à laquelle nous avons attaché le nom spécifique d'*albuminis*. Ces végétaux mucédinés se composent d'une tigellule incolore, transparente, moniliforme, ou formée d'un grand nombre d'articles courts, ovoïdes ou pyriformes, dont les deux ou trois derniers articles, plus gros que les autres, tiennent lieu de la fructification ou au moins d'organes reproducteurs secondaires. La base de ces touffes présente un grand nombre de globules seminulifères avortés. 7 on voit en *a* un globule seminulifère d'où sont parties plusieurs tigellules. *b* deux articles terminaux et fructifères. 8 un autre individu partant également de sa seminule, mais ne se terminant point encore par les articles de la fructification. 9 partie supérieure d'un individu dont les rameaux en *aa* se terminent par de gros articles fructifères, vésiculeux, remplis de globulins de grosseurs variables, et souvent terminés par un très-petit article qui s'est éteint. Dans cet individu, la tigellule, contenant des globules placés à la file les uns des autres, semblait d'une seule venue. 10 un centième de mill. sur lequel on a figuré quelques individus.

Fig. 11. Végétations (*Ulvina aceti,* Kütz) dont se compose, par enchevêtrement, cette masse informe et gélatineuse que l'on nomme la Mère du vinaigre (*Mycoderma vini,* Vallot), avec les Anguilles ou Vibrions qui se repaissent ou se nourrissent de ces petits végétaux. Dans cette masse on peut voir la végétation dans des états différents de développements plus ou moins avancés. 12 un individu femelle de *Vibrion aceti*, contenant trois œufs et plusieurs autres éclos en autant de petites anguilles vivantes et plus ou moins roulées en spirale. *a* vulve par laquelle sortent les jeunes individus. On voit quelquefois ces anguilles se promener dans le liquide avec de petites touffes de l'*Ulvina aceti* qui ont germé et végété sur le corps muqueux et collant de ces infusoires. 13 deux individus mâles, toujours de moitié plus petits que les femelles.

PLANCHE VIII.

Globules du lait germant et végétant, et considérés comme une véritable Levûre pendant la fermentation de ce liquide sucré.

Fig. 1. Une goutte de lait de grosseur naturelle.

Fig. 2. Globules du lait vus au microscope. Ces globules organisés varient en diamètre depuis le point apercevable jusqu'au 100^e de millim. Les plus petits se meuvent. Il n'y en a point de deux sortes distinctes, mais on en voit quelques-uns assez rares, *aa*, qui sont remarquablement plus gros que tous les autres.

Fig. 3. En promenant sa vue sur cette masse d'individus dans toutes sortes d'états, on en verra d'abord beaucoup qui semblent former le fond et qui, peut-être, comme avortons, n'étaient pas susceptibles de germer. *a*, *a*, *a* globules de lait germant ou poussant un, deux ou trois bourgeons, qui se distinguent du globule par leur grande transparence ou par le défaut absolu des globulins intérieurs qui se voient dans le globule. *b*, *b* germinations simples, plus avancées, tigellules d'une seule venue ou articulées, remplies de globulins moins aux extrémités. *c*, *c idem* germant et végétant sur deux points opposés. L'une de ces végétations étant déjà rameuse. *d* germination dont la tigellule articulée montre, dans chaque article, des globulins intérieurs; *e* j'ai plusieurs fois remarqué des globules du lait qui, après s'être dilatés sur les bords, étaient découpés irrégulièrement, en des sortes de petites cocardes, dont l'extérieur était entouré d'une pulviscule, composées de globulins très-ténus et qui paraissaient être sortis de la vésicule par explosion.

Fig. 4. Ces deux lignes parallèles indiquent arbitrairement $\frac{1}{100}$ de millim. Sur cette distance, on a placé une lignée progressive, composée de globules de lait, dont les quatre derniers montrent des commencements de germination.

Fig. 5. Boutures produites par la désarticulation des tigellules et poussant de nouvelles tigellules sur un, deux, trois et quelquefois sur les quatre angles. Parmi ces boutures ou articles de tigellules, on en voit beaucoup qui ne végètent point encore et dont un certain nombre peuvent être des globules de lait allongés ou ovalisés, mélangés avec des globules de toutes grosseurs. *a* un article poussant sur les quatre angles à la fois des tigellules très-articulées et dont une ne fait que commencer. Ces germinations sur quatre angles sont rares.

Fig. 6. Cristaux rhomboèdres, lamelleux, de grandeurs variables, marqués de fissures qui indiquent leur clivage, et de cristaux prismatiques, à base triangulaire, et qui, chose remarquable, sont des moitiés complètes des premiers, prises dans le sens des deux angles aigus. *a*, *a*, *a* cristaux rhomboèdres de différentes grandeurs. *b* cristaux prismastiques à base triangulaire. Ces cristaux s'obtiennent par évaporation, lorsqu'on abandonne du lait entre deux lames de verre. Le lait de femme est celui qui m'a toujours le mieux réussi pour la production de ces cristaux.

PLANCHE IX.

PENICILLIUM GLAUCUM, Linck.

Végétation achevée des globules du lait pendant la fermentation, globules considérés comme étant la Levûre naturelle de ce liquide sucré.

Agglomération de globules de lait, les uns globuleux et de grosseurs différentes, les autres ovoïdes ou allongés, mêlés avec un nombre prodigieux de globulins, germant et poussant de toutes parts leurs végétations. Ces globules, poussés les uns vers les autres par l'air qui s'introduit entre les deux lames de verre, forment des sortes d'îlots ou des masses que l'on pourrait assez justement comparer à un tas de graines de Millet ou de Pommes de terre plus ou moins avancées dans leurs végétations. Pour ne point embrouiller notre figure, nous n'avons fait partir les tigellules des globules de lait que de ceux situés au pourtour de la masse, quoique tous germent et poussent. *a*, *a* globules isolés de l'agglomération, plus ou moins avancés dans leur germination. *b*, *b* globules germant par deux points à la fois. *c* tigellule très-développée, rameuse, sans articulations apparentes et sans fructification. *d*, *d* tigellules très-articulées; articles souvent disposés en zigzag. *e* tigellule avancée, composée de six articles inférieurs, allongés, et de cinq terminaux, plus abrégés, globuleux et seminulifères. Sur l'un des côtés et du milieu du troisième article, il est parti un court rameau sans articulation, qui se termine par un seul globule seminulifère. *f* fructification composée d'une seule série de globules seminulifères. *g idem* de deux séries. *h idem* complète et offrant l'aspect d'un pinceau ouvert ou d'une petite ombelle. *i* une ombelle terminale, articulée, rameuse, fructifère ou seminulifère, composée de rameaux moniliformes, divergents en pinceau ouvert, formés d'articles courts et globuleux, et pouvant, par isolement, germer et reproduire la même végétation par un moyen secondaire. *l* globules isolés d'une ombelle, les uns simples, les autres plus ou moins avancés en germination. *m* partie supérieure d'une tigellule, articulée, rameuse, et dans l'intérieur de laquelle sont des globulins. *n* une autre portion de tigellule plus grossie, sans articulations, et dans laquelle les globulins sont devenus des articles ovoïdes ou allongés.

NOUVELLES RECHERCHES

SUR LE

DÉGAGEMENT DE LA CHALEUR

DANS LE FROTTEMENT.

PAR M. BECQUEREL.

Dans la dernière séance publique annuelle de l'Académie des sciences, j'ai donné lecture du précis d'un mémoire renfermant les recherches que j'avais faites sur le dégagement de la chaleur dans le frottement; aujourd'hui j'ai l'honneur de présenter à l'Académie le mémoire même, dans lequel se trouvent tous les résultats obtenus, classés avec le plus d'ordre qu'il m'a été possible.

On ignore jusqu'à présent, quand on frotte deux corps l'un contre l'autre, quelle est la portion de chaleur que prend chacun de ces corps, en raison de sa nature et de l'état de sa surface. La question étant des plus complexes, comme tout le monde le sait, on ne peut s'attendre à une solution complète; mais c'est être utile à la science que de faire connaître une méthode d'expérimentation qui manquait, et des résultats généraux qui peuvent éclairer sur les recherches ultérieures, relatives au même sujet.

Pour déterminer de quelle manière chaque corps intervient, il faudrait pouvoir écarter toutes les causes qui masquent les effets individuels; malheureusement on ne peut y parvenir complétement. En effet, lorsque l'on frotte plus ou moins rapidement deux corps l'un contre l'autre, sans que le contact cesse d'avoir lieu, il y a évidemment transmission de chaleur d'un corps dans l'autre. La quantité qui est transmise dans chacun d'eux dépend de la conductibilité du corps, de sa capacité pour la chaleur et de l'état de sa surface.

D'après cela, la chaleur dégagée dans un corps par le frottement ne saurait être accusée immédiatement, c'est-à-dire avant sa transmission dans l'autre corps, puisque les indications des thermomètres ordinaires ne sont jamais instantanées. Cependant, il est possible d'opérer dans des circonstances qui permettent d'écarter plusieurs des difficultés que nous venons de signaler; alors on est conduit à une série de faits que nous allons exposer.

L'appareil destiné à observer ces faits se compose d'une pile thermo-électrique en relation avec un excellent multiplicateur. Sa sensibilité est telle qu'une différence d'environ $\frac{1}{100}$ de degré centigrade entre les températures des deux faces de la pile fait dévier suffisamment l'aiguille aimantée, pour que l'angle d'écart soit appréciable.

Pour réduire autant que possible la question à sa plus simple expression, on prend deux corps de même nature, mauvais conducteurs de la chaleur, égaux dans toutes leurs dimensions, et ne présentant de différences que dans l'état de leurs surfaces seulement. Ces corps sont fixés convenablement à des tiges en verre, et les surfaces frottées sont mises en contact chacune avec l'une des faces de la pile. Quand ces deux surfaces ont la même température, l'aiguille aimantée reste en repos, attendu que les deux courants thermo-électriques étant égaux et dirigés en sens contraire se détruisent; mais quand la température n'est pas la même, l'aiguille aimantée est aussitôt déviée, et l'angle d'écart sert à apprécier la différence de température. Le frottement est produit avec une vitesse et une pression déterminées, afin que son intensité soit toujours connue. Les deux corps sont séparés rapidement l'un de l'autre, et mis immédiatement en expérience.

Outre ce procédé, j'en ai imaginé un autre, dont je n'ai pas encore fait usage et qui promet des résultats plus précis : on prend deux aiguilles, composées chacune de deux autres, l'une de fer et l'autre de cuivre, soudées par un de leurs bouts; puis on place chacune d'elles dans l'intérieur du corps qui subit l'effet du frottement, le plus près possible de la surface et la soudure au milieu de cette même surface. Si le corps est métallique, on soude les points de jonction de la double aiguille à sa surface inférieure. Les deux aiguilles sont mises en communication, d'une part par le bout cuivre avec un multiplicateur, de l'autre, par le bout fer, avec un fil de fer. Au moyen de cette disposition, pour peu que l'une des deux surfaces s'échauffe plus que l'autre, la soudure qui est contiguë s'échauffe aussi davantage que l'autre soudure, et le multiplicateur indique la différence de température.

Ce procédé, convenablement employé, est le plus exact dont on puisse, je crois, se servir, attendu que la différence des effets de chaleur produite sur chacune des surfaces, par l'action du frottement, est accusée immédiatement. Je me propose de l'employer dans de nouvelles recherches sur la chaleur dégagée dans les actions mécaniques. Ces recherches ont un tel intérêt pour établir les rapports entre les effets calorifiques et électriques du frottement, qu'on ne saurait trop multiplier les expériences pour y parvenir.

Voilà les moyens d'expérimentation, passons aux résultats: on commence par chercher l'effet produit sur l'aiguille aimantée par le contact d'une des surfaces frottées, possédant une température supérieure à celle de l'air ambiant, avec l'une des faces de la pile; effet dû à l'échauffement de cette face.

L'expérience prouve que quelle que soit la nature du disque frotté, que ce disque soit conducteur ou non de la chaleur, le temps que met l'aiguille pour atteindre son maximum d'écartement, pourvu que cet écartement ne dépasse pas 60°, est toujours de 10″; pour des écartements de 60 à 75° il est de 9″ $\frac{1}{2}$, et de 9″ pour des déviations de 75 à 90.

Les corps que j'ai soumis à l'expérience étaient des disques de verre, de liége, d'argent, etc.

L'aiguille aimantée se comporte donc ici comme un pendule qui oscille sous l'action de la pesanteur, entre de petites amplitudes, puisque les oscillations sont isochrones, mais avec cette différence néanmoins que dans le pendule, lorsque l'amplitude de l'oscillation augmente au delà d'une certaine limite, le temps de l'oscillation augmente également, tandis que le contraire a lieu dans les expériences que nous décrivons, c'est-à-dire que le temps diminue à mesure que l'amplitude augmente au delà de 60° jusqu'à 90°. Les faits suivants montrent l'isochronisme des déviations par première impulsion, en mettant en contact diverses substances pendant une seconde, avec une source de chaleur possédant une température constante, et les présentant ensuite à l'une des faces de la pile.

SUBSTANCES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.		DÉVIATION lors de la première IMPULSION.	TEMPS.	MOYENNE.
Verre poli	1re exp.	39	10	10,43.
	2 »	37	10	
	3 »	39	11	
	4 »	38	11	
	5 »	41	11	
	6 »	36	10	
	7 »	38	10	
Verre dépoli	1re exp.	48	10	10.
	2 »	49	10	
	3 »	51	10	
	4 »	55	10	
	5 »	50	10	
	6 »	52	10	

SUBSTANCES SOUMISES A L'EXPÉRIENCE.		DÉVIATION lors de la première IMPULSION.	TEMPS.	MOYENNE.
Liége.	1^{re} exp.	10	10	9,8.
	2 »	12	10	
	3 »	11	9	
	4 »	12	9	
	5 »	11	11	
Argent.	1^{re} exp.	56	10	10.
	2 »	55	10	
	3 »	57	10	
	4 »	55	10	
	5 »	57	10	

Ces résultats montrent bien l'isochronisme des déviations. S'il y a de légères différences, il faut les attribuer à des erreurs d'observations, car il est très-facile de se tromper d'une demi-seconde quand on évalue le temps de la durée d'une oscillation entière, attendu que l'on ne peut jamais saisir très-exactement l'instant précis où l'aiguille entre en mouvement et l'instant où elle s'arrête, surtout quand l'intensité du courant est faible, comme avec le liége. Nous avons fait un si grand nombre d'expériences pour constater l'exactitude de cette loi jusqu'à 60°, qu'il ne nous reste aucun doute à cet égard.

Pour savoir si cette loi avait encore lieu pour des déviations plus considérables, nous avons pris un disque d'argent dont nous avons élevé successivement la température, afin d'avoir des déviations par première impulsion depuis 1° jusqu'à 90. Voici les résultats obtenus en évaluant le temps en demi-secondes :

DÉVIATIONS.	TEMPS ÉVALUÉ en DEMI-SECONDES.	DÉVIATIONS.	TEMPS ÉVALUÉ en DEMI-SECONDES.
1°	20	59°	20
2	20	60	19
4	20	63	19
6	20	65	19
10	20	67	19
12	20	70	19
23	20	75	18
40	20	82	18
43	20	83	18
54	20	88	18
56	20	89	18

Nous voyons, comme nous l'avons avancé, que de 1° à 60° environ, la durée de chaque déviation est de 10′, de 60° à 70° elle est de $9''\frac{1}{2}$, de 70° à 90 de 9″. Nous ferons remarquer que les déviations de l'aiguille jusqu'à 20° seulement, répondent à des intensités égales du courant, et qu'il n'en est plus de même au delà.

Après avoir constaté les rapports qui existent entre les déviations de l'aiguille aimantée par première impulsion, et le temps employé pour les produire, quand une des faces de la pile est échauffée par le contact du disque, nous avons cherché ce qui se passe quand cette même face est échauffée par le rayonnement direct de la flamme d'une lampe ordinaire, placée à une distance plus ou moins grande, à la distance d'un mètre, par exemple, de la pile. On a trouvé des effets absolument semblables aux précédents, comme l'indiquent les résultats suivants :

DÉVIATIONS.	TEMPS en DEMI-SECONDES.	DÉVIATIONS.	TEMPS en DEMI-SECONDES.
6	20	61	20
8	20	69	19
25	20	71	19
60	20	75	19

Ces résultats nous montrent, comme du reste nous l'avons prouvé plus haut, que l'effet est indépendant du plus ou moins de conductibilité des disques employés. Pour voir jusqu'à quel point les faits précédents dépendent de l'action exercée par le magnétisme terrestre sûr l'aiguille astatique, j'ai recueilli quelques observations sur le temps d'une oscillation de l'aiguille astatique à laquelle on imprime une impulsion avec un aimant.

J'ai approché, à diverses distances, de l'aiguille astatique d'un multiplicateur un barreau légèrement aimanté, de manière à le faire dévier d'un certain nombre de degrés, puis, ayant retiré rapidement le barreau j'ai compté le temps d'une oscillation. Voici les résultats obtenus pour diverses amplitudes :

DÉVIATIONS.	TEMPS d'une oscillation EN DEMI-SECONDES.	DÉVIATIONS.	TEMPS d'une oscillation EN DEMI-SECONDES.
4	18	42	19
5	18	46	19
8	18	55	20
10	18	63	20
12	18	65	20
15	18	70	20
20	18	80	20

On voit qu'ici, comme dans le pendule, le temps des oscillations augmente à mesure que la déviation devient plus grande, tandis que lorsque l'aiguille aimantée est déviée par l'action d'un courant thermo-électrique, les effets sont inverses, que l'échauffement soit produit par rayonnement ou par contact. Pour savoir d'où pouvait dépendre cette inversion, j'ai porté le disque d'argent échauffé sur l'une des faces de la pile, au point de produire une déviation de 80°; puis, après un contact de quelques secondes, lorsque l'aiguille, par exemple, n'était encore qu'à 30°, on a interrompu le circuit : l'aiguille a continué à cheminer en vertu de la vitesse acquise jusqu'à 50° seulement; elle s'est alors arrêtée et est retournée à zéro après plusieurs oscillations. Cette expérience répétée plusieurs fois a donné constamment le même résultat. On doit en conclure que le disque ne se met pas immédiatement en équilibre de température avec la face de la pile, que le disque soit excellent ou mauvais conducteur, de sorte que l'isochronisme observé dépend de la propagation de la chaleur dans la face échauffée de la pile. Ce mode d'expérimentation peut servir encore à apprécier le refroidissement des corps solides, comme le montrent les expériences suivantes :

INDICATION DES DISQUES.	IMPULSION PRIMITIVE.	DÉVIATION DÉFINITIVE.	INTENSITÉ DU COURANT.
PREMIÈRE EXPÉRIENCE :			
Disque d'argent échauffé par frottement et présenté à l'une des faces de la pile.	40°	36°	52°
Le disque présenté cinq minutes après.	6	6	6
Le disque présenté de nouveau cinq minutes après.	0	0	0
DEUXIÈME EXPÉRIENCE :			
Disque échauffé par frottement.	19	18	18
Retiré et présenté une minute après.	8	8	8
Retiré et présenté une minute après.	4	4	4

Dans la première expérience, la perte est de 9,2 par minute, et dans la deuxième elle est de 10 pendant la première minute.

TROISIÈME EXPÉRIENCE :			
Disque frotté.	11°	10°,8	10°,8
Retiré et présenté une minute après.	4	4	4
Retiré et présenté une minute après.	2,50	2,50	2,50

Dans cette expérience, la perte de l'intensité du courant, et par suite celle de la chaleur par le refroidissement, est sensiblement proportionnelle au temps.

INDICATION DES EXPÉRIENCES.	INTENSITÉ DU COURANT.	INTENSITÉ CALCULÉE.
1o	10,8	10
2o	4	5,4
3o	2,5	2,5

Le même mode d'expérimentation peut servir encore à déterminer le rapport entre les quantités de chaleur prises par des disques de diverses substances, ayant même diamètre et même épaisseur, quand on les met en contact avec un corps dont la température est constante. La peau du bras dont la température change peu, quand il reste toujours couvert, est la source de chaleur dont j'ai fait usage.

On trouvera dans le tableau suivant les résultats obtenus en soumettant à l'expérience le verre poli, le verre dépoli, l'argent et le liége.

SUBSTANCES.	IMPULSION PRIMITIVE.	DÉVIATION DÉFINITIVE.	INTENSITÉ DU COURANT.	MOYENNES.
Verre poli.	15	14	14	15,1
	14	13,4	13,4	
	18	17	17,1	
	15	14	14	
	18	17	17,1	

SUBSTANCES.	IMPULSION PRIMITIVE.	DÉVIATION DÉFINITIVE.	INTENSITÉ DU COURANT.	MOYENNES.
Verre dépoli. . . .	29	26,9	31,5	30,40
	27	25,2	28,6	
	30	27,8	31,1	
Argent.	56	46,9	114	113,3
	55	46,3	108,4	
	57	47,5	118	
	55	46,3	108	
	57	47,5	118	
Liége.	10	9,9	9,9	10,8
	12	11,7	11,7	
	11	10,8	10,8	
	12	11,7	11,7	
	11	10,8	10,8	
	10	9,9	9,9	

Ces résultats nous montrent que le rapport de transmission au contact du verre poli et du verre dépoli avec l'une des faces de la pile est :: 15, 1 : 30, 40; dans une autre expérience il était :: 47, 1 : 81, 1, c'est-à-dire :: 15, 1 : 26. Il existe entre ces deux rapports une différence assez sensible : mais, quand on réfléchit à la difficulté des expériences, on n'est nullement étonné de cette différence, qui néanmoins n'est pas tellement grande, qu'elle ne puisse permettre de tirer une induction des faits observés : si l'on prend la moyenne entre ces deux rapports, on a le rapport 31, 1 : 55, 75, ou 1 : 1, 775, qui approche de 1 : 2. En comparant ensemble les pouvoirs de transmission du verre poli, du verre dépoli, du liége et de l'argent, on a les rapports 1,51 : 3,01 : 1,08 : 11,33. Ces nombres expriment approximativement les quantités de chaleur que prennent les quatre disques sus-mentionnés, quand on les met en contact, pendant une seconde, avec une source de chaleur dont la température est d'environ 37°. Voici encore des résultats obtenus avec d'autres disques :

Disque de liége mis en contact pendant une seconde avec une plaque de métal ayant une température de 38°.

INDICAT. DES EXPÉRIENCES.	INTENSITÉ DU COURANT.	
1re exp.	6,5	
2	6,5	
3	7	
4	7	$\frac{48,5}{7} = 7$
5	7	
6	7	
7	7,5	

Disque d'argent en contact pendant une seconde avec la peau du bras.

	DÉVIATION par IMPULSION.	DÉVIATION DÉFINITIVE.	INTENSITÉ DU COURANT.	
1re exp.	41	36,7	54,4	
2	36	32,6	42,3	
3	41	36,7	54,4	
4	37	33,5	44,3	$\frac{388.4}{8} = 48,5$
5	37	33,5	44,3	
6	40	36	52	
7	36	32,6	42,3	
8	41	36,7	54,4	

Rapport du liége à l'argent :: 7 : 84,5
:: 1 : 7.

Disque de plomb soumis au même mode d'expérimentation.				
INDICATION DES EXPÉRIENCES.	DÉVIATION par IMPULSION	DÉVIATION DÉFINITIVE.	INTENSITÉ DU COURANT.	
1re	24	22,6	24,3	$\frac{124,5}{6} = 20,7$
2	19	18	18,2	
3	19	18	18,2	
4	20	19,3	19,8	
5	23	21,8	23,30	
6	21	20	20,7	
Disque de verre soumis au même mode d'expérimentation.				
1	15	14	14	$\frac{74,9}{6} = 12,5$
2	14	13,4	13,4	
3	11	10,8	10,8	
4	13	12,5	12,5	
5	13	12,5	12,5	
6	12	11,7	11,7	

Rapports des intensités de chaleur acquises par le liége, l'argent, le plomb et le verre :: 1 : 7 : 3 : 1,8.

On avait eu précédemment pour le liége, l'argent et le verre les rapports 1,08 : 11, 33 : 1,53. Ces nombres présentent des différences avec les précédents, surtout pour celui qui est relatif à l'argent, différences que l'on doit attribuer soit à l'état des surfaces, soit au refroidissement qu'éprouvent les disques quand on les transporte de la source de chaleur à l'appareil. On diminue ces différences en opérant avec le plus de promptitude possible.

On doit remarquer que les nombres 1 : 7,3 : 1,8 expriment par approximation les rapports composés des quantités de chaleur que prennent les disques à la source, et de celles qu'ils cèdent à la face de la pile.

Passons à la chaleur dégagée dans le frottement. Les moyens dont on peut disposer pour observer la chaleur dégagée dans le frottement de deux corps l'un contre l'autre présentent tous des inconvénients; attendu qu'ils ne permettent pas de faire les observations avec une très-grande exactitude; néanmoins ils suffisent pour donner des rapports, dont on peut tirer parti pour étudier la marche des phénomènes.

Lorsqu'on frotte deux corps l'un contre l'autre, même deux corps mauvais conducteurs, le contact ayant toujours lieu pendant la durée de l'action, la chaleur dégagée se répartit dans chacun d'eux, en raison de sa conductibilité, de sa capacité pour sa chaleur et de l'état de sa surface; dès lors le phénomène est très-complexe.

Je prendrai d'abord le cas le plus simple, celui de deux corps de même nature et égaux dans leurs dimensions, et ne présentant seulement des différences que dans l'état de leurs surfaces; les effets obtenus ne seront dus alors qu'à ces différences.

Lorsqu'on frotte rapidement l'un contre l'autre deux disques de liége, disposés comme il a été dit, mais dont l'un a une surface lisse obtenue avec un instrument tranchant, et l'autre une surface couverte d'aspérités, si l'on présente simultanément les deux surfaces préparées aux deux faces de la pile, pour savoir si chacune d'elles prend ou non la même température, on obtient un courant dont le sens indique que le disque à surface couverte d'aspérités possède une température plus élevée que l'autre, dans un rapport tel que la déviation de l'aiguille varie de 1 à 10°, suivant la force employée.

Un morceau de verre poli et un morceau de verre dépoli produisent le même effet, c'est-à-dire que le premier prend moins de chaleur que le second. Il semble résulter de là que les surfaces qui ont le plus grand pouvoir absorbant sont celles qui s'échauffent le plus. Voici les résultats obtenus dans diverses expériences :

FROTTEMENT EXERCÉ PENDANT UNE MINUTE.			
SUBSTANCES frottées.	DIFFÉRENCE de température en plus ou en moins.	DÉVIATION de l'aiguille aimantée. Moyenne.	MÉTAUX fonctionnant seuls. DÉVIATIONS.
Verre poli.	Plus.	38°, 42°, 41°.	34°
Liége.	Moins.		5°
Argent.	Plus.	32°, 33°, 35°, 33°. . . .	50°
Liége.	Moins.		12°
Argent.	Plus.	10°, 9°, 8°, 13°, 11°. . .	. . . .
Verre poli.	Moins.		. . . .
Caoutchouc	Plus.	30°.	29°
Liége.	Moins.		11°
Verre dépoli.	Plus.	48°.	40°
Liége.	Moins.		7°
Fer.	Plus.	64°.	53°
Liége.	Moins.		6°

FROTTEMENT EXERCÉ PENDANT UNE MINUTE.			
SUBSTANCES frottées.	DIFFÉRENCE de température en plus ou en moins.	DÉVIATION de l'aiguille aimantée. Moyenne.	MÉTAUX fonctionnant seuls.
Argent	Plus	47°	
Satin blanc	Moins		
Argent	Plus	3°	
Satin noir	Moins		
Satin noir	Plus	6°	
Liége	Moins		
Liége	Plus	27°	
Cire d'Espagne	Moins		
Or	Plus	30°	
Liége	Moins		
Cire d'Espagne	Plus	5°	
Verre dépoli	Moins		
Autre série d'expériences : les corps étaient taillés en disques de 8 mill. de diamètre et 3 mill. d'épaisseur. Le frottement a duré une minute.			
Spath d'Islande	Plus	1re exp. 13°	
		2e » 14°	
Liége	Moins	3e » 16°	
Succin poli	Plus	1re exp. 28°	
		2e » 32°	
Liége	Moins	3e » 30°	

Ces expériences nous montrent 1° qu'avec le verre poli et le liége, le premier prend plus de chaleur que le second dans un rapport tel que, chacun d'eux agissant séparément, les déviations de l'aiguille aimantée sont comme 34 : 5 ; et comme ces déviations correspondent à des intensités de courant égales à 39 et 1, il s'ensuit que les quantités de chaleur prises pendant le frottement, et transmises à la pile, sont entre elles dans le même rapport ; 2° qu'avec le verre dépoli et le liége, le rapport des déviations est comme 40 à 7, et celui des intensités de chaleur comme 37 : 7 ; 3° qu'avec l'argent et le liége, le rapport des déviations est comme 50 : 12, et celui des intensités comme 78 : 12 ; 4° qu'avec le caoutchouc et le liége, le rapport des déviations est comme 29 à 11, et celui des intensités comme 31 à 11.

Les expériences dont je viens de rapporter les résultats ont été faites sans l'emploi d'instruments capables de mesurer le frottement avec exactitude, sous le rapport de la vitesse et de la pression ; mais on acquiert une telle habitude, en opérant comme je l'ai indiqué, que les résultats ne présentent pas des différences considérables, ce qui prouve que les conditions relatives au frottement sont à peu près les mêmes ; ainsi avec l'argent et le liége on a eu des déviations de 32°, 33°, 35°, avec l'argent et le verre poli 10, 9, 8, 13, 11.

Des nombreux résultats que j'ai obtenus dans le frottement des corps de nature différente, je ne puis encore en tirer des lois simples, vu les causes diverses qui concourent à l'effet général. Il paraît seulement que la nature du corps, abstraction faite de la conductibilité, exerce une influence que l'état de la surface ne détruit pas toujours.

Il nous a été impossible de trouver jusqu'ici la véritable cause de cette influence qui dépend de la nature des corps, et probablement de l'arrangement de leurs molécules; mais c'est déjà beaucoup de l'avoir signalée par l'expérience, parce qu'elle nous donne un élément de plus que la théorie de la chaleur pourra prendre désormais en considération.

Si le frottement produit des effets de chaleur dont les lois paraissent si compliquées, on doit avoir également des effets très-remarquables quand on ébranle suffisamment les molécules par la percussion au point de les séparer. Les expériences n'ont pas encore été poussées jusque-là. Il serait à désirer que l'on pût mesurer la quantité de chaleur qui se dégage dans un corps, quand on détruit la force d'agrégation de ses molécules.

RECHERCHES

MICROSCOPIQUES

SUR DIVERS LAITS

OBTENUS

DE VACHES PLUS OU MOINS AFFECTÉES DE LA MALADIE

QUI A RÉGNÉ PENDANT L'HIVER DE 1838 A 1839,

ET DÉSIGNÉE VULGAIREMENT

SOUS LA DÉNOMINATION DE COCOTE (1);

Présentées à l'Académie le 6 mai 1839,

PAR M. TURPIN.

Nous commencerons par faire connaître les conditions qui caractérisent un bon Lait, riche en éléments nutritifs, et tel

(1) Cocote des nourrisseurs, maladie aphtheuse des Vétérinaires. On a remarqué que cette maladie, qui n'est nullement contagieuse, n'attaquait, parmi les animaux mammifères domestiques, que les pieds fourchus, tels que les Vaches, les Bœufs, les Cochons, les Chèvres et les Moutons, et que, chez ces derniers, le *Piétin* offrait assez d'analogie avec l'affection des pieds des vaches atteintes de la Cocote.

qu'on l'obtient quelque temps après le part d'une vache jeune et en bonne santé.

Le Lait dans son état normal est, comme on le sait, un liquide blanc, opaque, onctueux ou muqueux, plus dense et un peu plus pesant que l'eau. Sa saveur est douce et très-légèrement sucrée. Presque inodore à froid, il devient odorant par la chaleur. Sa bonne qualité se décèle à l'œil nu par son opacité, sa teinte légèrement jaunâtre (1) et surtout très-égale.

Lorsqu'après avoir mis une goutte de Lait sur une lame de verre sur laquelle on en ajoute une seconde, on voit ce liquide, légèrement pressé entre les deux lames, s'étendre promptement et facilement en une couche blanche, mince et très-égale; dès ce moment on peut déjà être sûr à l'avance que le Lait est de bonne qualité et qu'il offre les autres caractères dont nous allons maintenant parler.

Vu au microscope.

Le Lait, comme la Lymphe et le Sang, se compose de deux parties principales : d'une base formée d'eau, sorte de petit océan dans lequel naissent, vivent et se développent des corps globuleux qui jouissent de tous les attributs de la vie organique (2).

(1) Teinte produite à l'œil nu par celle de l'huile butyreuse sécrétée et contenue dans les plus gros globules du lait. Plus il y a de ces globules, plus la teinte est jaunâtre et plus ces globules, étant détruits, fournissent de beurre.

(2) Pendant longtemps, après leur découverte, les globules sanguins ne furent considérés que comme de simples concrétions globuleuses de matières organiques, sans vie et sans organisation particulière. On ne

L'eau, pas plus que les différents corps qu'elle tient en solution, n'étant point appréciable au microscope, dans ses éléments, dans ses globules présumés composants, nous

---

pourrait plus aujourd'hui soutenir cette opinion, parce que l'existence individuelle, vivante, mais seulement végétale ou organique du globule sanguin, est trop prouvée.

C'est ainsi qu'avancent pas à pas celles de nos connaissances qui exigent l'observation philosophique, longue, comparative et attentive du microscope. On a peine encore à s'accoutumer, à comprendre que le globule du lait, si analogue au globule sanguin, soit aussi un être organisé distinct, globuleux, vésiculeux, et doué de la double faculté de sécréter dans son intérieur l'huile butyreuse destinée à se concréter en beurre et les globulins qui s'y forment.

Par l'analogie, on sera forcé de reconnaître que chaque globule lymphatique, chaque globule muqueux, chaque organe élémentaire servant à former les masses tissulaires, soit des végétaux, soit des animaux, sont autant d'individualités douées de leur centre vital organique, absorbant et se nourrissant, chacune, pour leur compte, sur le lieu qu'elles occupent dans l'organisation générale du végétal ou de l'animal, lieu où elles sont nées, et où elles ne sont qu'en simple contiguïté, quoiqu'elles soient ordonnées et destinées à faire partie d'un corps organisé plus ou moins complexe et de la vie d'association de ce corps, et quoique baignées dans une eau commune, muqueuse et nutritive.

L'ignorance de cette haute philosophie de la composition des corps organisés, à l'aide de corps organisés plus simples, a été telle, que de nos jours de très-savants physiologistes ont soutenu pendant longtemps, dans leurs écrits et dans leurs leçons, que les animalcules du sperme des animaux, si variables de forme et de dimensions, suivant les espèces, si volontaires dans leurs mouvements particuliers, n'étaient aussi que de simples grumeaux de matière muqueuse!

Nous profitons de cette occasion pour expliquer un passage du Rapport fait à l'Académie, passage qui se trouve en opposition avec ce qu'a écrit n'avons rien à en dire dans ce travail, dont le seul but est d'examiner et de faire connaître les altérations morbides dont peut être susceptible, comme corps organisé, le globule

---

M. le docteur Donné sur la formation du globule laiteux. On lit, p. 381 (Compte rendu du 18 mars 1839) : « M. Donné, d'accord avec M. Dujardin, « et en opposition avec M. Raspaïl et M. Turpin, ne reconnaît aucune « apparence de structure organique à ces globules ; il ne les considère « donc point comme formés d'une membrane ou d'un tissu cellulaire ren- « fermant la matière butyreuse, mais bien comme de petits sphéroïdes « résultant de particules butyreuses réunies par la force de cohésion. »

Comment rapprocher de cette citation le passage suivant, extrait de l'ouvrage de M. le docteur Donné (*Du lait et en particulier de celui des nourrices*, p. 12), rédigé sous la forme d'un doute savant, sans établir un contraste ? « Doit-on considérer, dit l'auteur, les globules laiteux comme « ayant une sorte d'organisation, soit une membrane enveloppante, ainsi « que le dit M. Raspail, soit une trame celluleuse à l'intérieur ? Cette « question m'a beaucoup occupé ; j'ai cherché par tous les moyens possibles « à la résoudre, sans pouvoir y réussir d'une manière directe et positive.

« Néanmoins plusieurs considérations me paraissent favorables à l'idée « d'une organisation dans les globules du lait, ou du moins d'une « constitution régulière dépendante de la réunion de plusieurs éléments « distincts ; c'est là, en effet, le sens auquel je réduis ici le mot d'organi- « sation. Ainsi les modifications successives par lesquelles passe le lait « avant d'arriver à son état définitif ; la régularité des globules, dont la « plupart n'étant d'abord que des gouttes oléagineuses sans forme et sans « diamètre déterminé, ainsi que je le montrerai plus loin, se calibrent « bientôt de telle sorte que les plus gros ne dépassent jamais un certain « volume, toute cette manière d'être me paraît plus conforme à l'idée d'une « organisation qu'avec celle d'une simple division moléculaire.

« En outre, si les globules laiteux n'étaient que de simples particules « de beurre plus ou moins divisées, comment ne les verrait-on pas se « réunir plusieurs ensemble comme des gouttelettes d'huile, quand on « chauffe au delà de 60 à 80 degrés ? »

laiteux, lorsque les tissus chargés de le sécréter, ou mieux de le produire, sont malades, et troublés dans leurs fonctions normales ou accoutumées.

Aux preuves d'organisation du globule laiteux que vient de produire M. le docteur Donné, on peut ajouter celles de la vésiculosité, de la production de globulins à l'intérieur, lorsque l'on conserve des globules laiteux dans une humidité et sous une chaleur constantes, celles qui consistent dans l'ascension des globules vivants, afin de se mettre en rapport avec l'oxygène, et au contraire leur précipitation au fond du sérum dès qu'ils ne jouissent plus de leur vie organique, et celle enfin de leur végétation en une Mucédinée filamenteuse, soit par extension de la vésicule, soit par celle des globulins, après qu'ils sont sortis de la vésicule maternelle et qu'ils se sont suffisamment accrus pour pouvoir germer.

Ajoutons encore que si le globule laiteux n'était qu'un agrégat fortuit de particules de beurre, que ces agrégats sans vie seraient parfois irréguliers dans leurs formes, qu'ils auraient des dimensions qui ne s'arrêteraient point au 100^e de millim. et que, comme le beurre extrait, ils se fondraient en huile dans leur sérum bouillant. On sait au contraire que les globules laiteux supportent l'ébullition prolongée sans en éprouver la plus légère altération, ce qui s'explique par la présence et la grande résistance qu'offrent les vésicules organisées qui, comme autant de petites outres, renferment l'huile butyreuse qu'elles ont sécrétée. La résistance des enveloppes du globule laiteux sous l'action de la chaleur, est analogue à celle de l'enveloppe organisée du grain de fécule de pomme de terre qui, sous une température de 150°, d'après l'expérience de M. Jacquelain (*Comptes rendus*, séance du 10 juin 1839, page 916), se déchire seulement, perd la vie, ainsi que ses granules intérieurs, mais ne se dissout pas encore dans ses éléments composants.

Oui, le globule laiteux est organisé, oui, il jouit de la vie organique, mais au plus simple degré. Constitué à l'aide de deux vésicules, dont l'une emboîte l'autre, et quelquefois de globulins intérieurs, il est comparable, pour son organisation et sa vitalité particulière, aux globules sanguins, lymphatiques, muqueux, aux grains de fécule ou à l'une des vésicules isolées d'un tissu

Les globules laiteux, considérés comme une sorte de population composée d'individus de tous âges et de toutes grandeurs relatives à l'espèce, varient en diamètre depuis le point

---

cellulaire végétal, et, comme dans la composition de la membrane de celle-ci, dans laquelle le microscope ne découvre pas plus les éléments composants que dans l'eau, ou dans un cristal, on est étonné de rencontrer les mots *tissu cellulaire* et *trame celluleuse* employés lorsqu'il est question de la membrane vésiculiforme, si homogène et si transparente du globule laiteux. Il y a dans le dernier passage que nous venons de citer des expressions dont nos observations particulières ne nous permettent pas de saisir le sens. Nous ne savons point ce que c'est que des *gouttes oléagineuses sans formes déterminées* et considérées comme l'origine des globules laiteux. Nous ne connaissons dans l'eau séreuse du lait, qui sert d'habitation aux globules et qui les alimente, qu'une population graduée depuis le globulin le plus ténu jusqu'au globule le plus achevé par rapport à l'espèce. Au lieu de dire que les globules se *calibrent*, comme qui dirait se moulent, ne vaudrait-il pas mieux dire : Les globules se développent ; cela ne serait-il pas plus conforme à l'usage et à la vérité? Mais pour cela il faut admettre l'organisation et la vie dans le globule, au lieu de n'y voir qu'une simple conglomération de particules inertes, comme dans une concrétion urinaire ou dans celle d'un rognon siliceux.

M. le docteur Donné, auquel nous venons de communiquer, en manuscrit, ce que l'on vient de lire, nous a expliqué comment se trouvent en contradiction ce qu'il a écrit d'une part dans son ouvrage sur le lait, et ce que de l'autre en est dit dans le Rapport. Il nous apprend que son opinion sur la formation du globule laiteux a changé depuis la publication de son travail. Qu'aujourd'hui, comme il l'a communiqué verbalement à M. Chevreul, il considère les globules du lait comme étant dépourvus de toute structure organique, et qu'il ne voit en eux que de petits sphéroïdes composés, par agglutination, de particules butyreuses réunies par une simple force de cohésion. Voilà ce que nous et le public ne pouvions savoir.

Tout en ne quittant point le sujet qui a donné lieu à cette note, nous apercevable jusqu'au 100^e de mill. Quelques-uns, toujours peu nombreux, dépassent cette mesure jusque près de moitié. Les plus petits, ceux que l'on pourrait appeler *Monadaires*,

---

ajouterons que nous avons vu dernièrement avec autant de plaisir que de surprise qu'un très-savant et très-réservé physiologiste, M. le professeur de Mirbel, adoptait sans restriction la *pluralité des individualités simples et organisées*, comme servant à former *collectivement et par simple contiguïté* les *individualités plus ou moins composées des végétaux*. Nous avons maintenant lieu d'espérer que cette grande vérité, tout à fait fondamentale de l'organisation vivante, sera bientôt reconnue par tout le monde, vérité que nous avons depuis bien longtemps formulée sous toutes ses faces, soit en parlant de la constitution tissulaire des végétaux, soit en parlant de celle des animaux. Une adhésion aussi puissante que celle de M. de Mirbel, une adhésion résultant d'observations sérieuses et microscopiques, nous oblige à citer textuellement le passage si remarquable et si *remarqué* de son Mémoire, dans lequel, à notre grande satisfaction, il se range aujourd'hui si complétement de notre avis. Tous ceux qui depuis vingt ans ont lu ce que nous avons écrit sur ce sujet, si philosophique et si analogue à la formation des autres corps de la nature, compareront et jugeront. Quelques-uns peut-être penseront que la citation d'un nom fait défaut.

« Il est vrai, dit ce profond et habile observateur, que souvent toutes ces « utricules (vésicules) juxtaposées restent unies par une sorte de collage, « si je puis ainsi dire; mais il ne paraît pas que jamais il s'établisse entre elles « une véritable liaison organique. Ce sont autant d'individus vivants, jouis- « sant chacun de la propriété de croître, de se multiplier, de se modifier « dans certaines limites, travaillant en commun à l'édification de la plante, « dont ils deviennent eux-mêmes les matériaux constituants. La plante est « un être collectif. » *Nouvelles notes sur le Cambium, extraites d'un travail sur la racine du Dattier; Compte rendu*, 29 *avril* 1839, pages 648-649. Il n'est pas inutile d'observer que toutes les individualités simples et en quelque sorte élémentaires des individualités plus complexes, soit qu'elles vivent à distance les unes des autres comme, par exemple, celles des globules Lymphatiques, Sanguins, Muqueux, Laiteux, celles des poils, etc., sont doués d'un mouvement de fourmillement (fig. 1.)

Leur forme est d'une sphéricité parfaite, et leur transparence aussi belle que celle d'un globule ou d'une petite perle de cristal. La pureté de leur contour, ordinairement dessiné en noir, et leur grande translucidité, annoncent que leur surface est des plus lisses; toutes choses qui expliquent comment les globules sains du Lait, comme ceux du Sang, ne s'agglutinent pas entre eux par le contact, et comment ils nagent isolément dans l'épaisseur de l'eau séreuse (1), tant qu'ils conservent toute leur vitalité.

Il n'y a point dans le Lait deux espèces de globules distin-

---

soit qu'elles vivent plus rapprochées et en contiguïté, comme celles filamenteuses, agglomérées en masses informes dans les Oscillaires et les Nostochs, soit plus rapprochées encore, comme celles des vésicules et des fibres des masses tissulaires des végétaux, des fibres musculaires des animaux; toutes naissent et végètent dans une eau muqueuse, plus ou moins abondante, qui les baigne et les nourrit, mais qui n'a pas plus de liaison organique avec ces individus associés en masse irrégulière ou en masse symétrique et déterminée, que l'eau, la terre et l'air n'en ont avec les végétaux et les animaux composés qui vivent plongés dans ces trois grands milieux, tout en admettant que ces milieux leur servent d'intermédiaires indispensables, dans lesquels ils puisent les éléments nécessaires à leur existence, et qui les lient entre eux de manière à contribuer ou à faire partie de l'organisation générale et de la vie universelle où se trouve le dernier terme de toute combinaison, de toute association.

(1) Pour les personnes qui n'ont point observé le lait au microscope, et pour lesquelles ce n'est qu'un liquide blanc, on ne peut leur en donner une meilleure idée, sous le rapport de son aspect microscopique, qu'en leur présentant une eau limpide remplie de petites perles transparentes, de grosseurs variables, et suspendues dans l'épaisseur de l'eau.

gnés par les noms de *Caséeux*, ou albumineux, et d'*Oléagineux*, à moins que par là on n'entende des états différents d'un seul et même corps, comme, par exemple, l'enfance, l'âge adulte et la vieillesse. Sans que nous soyons d'accord, M. le docteur Donné et moi, sur ce qui regarde l'organisation et la vitalité du globule laiteux, nous le sommes au moins sur ce que le Lait n'offre dans ses petits, ses moyens et ses gros globules, qu'une seule espèce, dont les individus, en raison de la différence de leur volume, contiennent plus d'huile butyreuse (1).

Les plus gros globules montrent un double cercle qui indique l'existence de deux vésicules qui s'emboîtent l'une l'autre, et dont la paroi interne de la vésicule intérieure donne lieu à des globulins, et sécrète en même temps, peu à peu, l'huile butyreuse qui, étant extraite de son enveloppe, s'épaissit et se concrète en beurre.

Au moment de sa sortie de la mamelle (2), le lait est

---

(1) *Du lait, et en particulier de celui des nourrices*, p. 10.

(2) Lorsque le lait sort de la mamelle, les globules sont déjà formés; ils ont pris l'accroissement que nous leur connaissons dans les voies lactées et sous la protection des tissus mammaires qui les ont produits. Excessivement ténus et transparents à leur origine, on ne les distingue pas plus dans le sérum que ceux de l'albumen de l'œuf crû avant sa fermentation. Le lait n'offre alors qu'une eau muqueuse, légèrement collante et blanchâtre.

La sécrétion du lait, composée d'eau et de globules organisés, produite par les parois maternelles des vaisseaux mammaires, comme la sécrétion du sperme formée d'eau et de ses animalcules, est destinée à s'écouler et à sortir de l'organisation tissulaire de l'animal à mesure qu'elle se fait, tandis que la sécrétion du sang, composée aussi d'eau et de globules or-d'une égale densité, parce que ses globules petits, moyens et gros, sont uniformément distribués dans l'eau de sérum. Ce n'est qu'au bout de 24 ou de 48 heures, suivant la tem-

---

ganisés, reste généralement et naturellement dans les vaisseaux où elle prend naissance, et où les globules vivent individuellement, se développent, meurent, et maintiennent l'espèce au moyen de nombreuses générations qui se succèdent pendant la durée de la vie d'association de l'animal composé. Si nous nous sommes servi du mot généralement, c'est parce que le sang s'écoule aussi quelquefois par partie, soit périodiquement, comme dans les règles chez les femmes et les femelles de singes, soit forcément dans les saignées obligées ou dans les saignées accidentelles.

Les sécrétions lymphatique, muqueuse, sanguine, laiteuse, etc., engendrées par diverses parois tissulaires de l'animal composé, sont formées de deux parties principales, savoir : une base d'eau qui baigne ou dans laquelle vivent des myriades d'individus globuleux ou lenticulaires, pleins ou vésiculeux, vides ou contenant des globulins, suivant l'âge de l'individu, d'un diamètre déterminé selon les espèces, et dont les plus petits, qui échappent à l'œil armé du microscope, en se confondant avec l'eau, qui leur sert d'habitation, la rendent muqueuse. C'est ainsi que l'organisation de la matière en individus doués de la vie organique, ne pourra jamais être appréciée par nos sens dans son origine, à cause de l'excessive ténuité, de l'incoloration et de l'absolue transparence de ces individualités primitives.

Dans un état de choses aussi simple, aussi conforme à ce que l'on connaît partout, nous n'avons jamais pu admettre le *Plastique* et la *Fibrine*, parce que le premier ne consiste que dans l'eau unie aux plus petits globules, et que la seconde n'est qu'un coagulum sans organisation et sans vie particulière, qu'une agglomération informe, par simple agglutination, une Mycoderme enfin due au rapprochement fortuit des petits globules ou des plus petits individus de ces populations très-élémentaires ; parce que le mot *Plastique* nous semble devoir être entièrement réservé à cette force vitale, à cet acte mystérieux qui préside à la formation et à l'assipérature, et dans un état de repos, que les plus gros globules, les oléagineux, comme plus développés, doués de la plus grande vitalité organique, montent, traversent le sérum, pour venir se placer à sa surface et se mettre le plus possible en rapport de contact avec l'oxygène dont ils ont besoin comme corps organisés et pour pouvoir achever leur développement dans l'air en un végétal mucédiné. C'est ainsi que le coagulum crémeux s'épaissit, par l'ascension successive de nouveaux globules, tandis que les moyens et les plus petits, trop faibles ou privés de leur vitalité particulière, s'altèrent, deviennent visqueux, et se coagulent en caillot ou caséum (1).

Le caractère microscopique d'un bon lait sain et nutritif consiste, savoir :

1° Dans la plus grande quantité de globules et dans le plus grand diamètre de ceux-ci ;

2° Dans leur parfaite sphéricité et dans leur belle transparence ;

3° Dans leur isolement au milieu du sérum (2).

---

milation attractive des molécules en corps temporaires, et non au liquide matériel qui contient en suspension les globulins susceptibles de s'agglutiner en une mycoderme informe, nommée fibrine.

(1) Dans une eau qui ne contient en suspension que des petits, des moyens et des gros globules de même espèce, les dénominations de *Crème* et de *Caséum* n'ont aucune valeur ; elles signifient seulement la séparation plus ou moins grande des globules, dont, en raison de leurs différentes grosseurs, de leur plus ou moins grande vitalité, les uns montent et s'accumulent en crème, tandis que les autres se précipitent ou restent suspendus dans le sérum.

(2) Parmi les globules laiteux on trouve quelquefois de petits frag-

Nous allons maintenant nous occuper des laits plus ou moins viciés sous l'influence pathologique des tissus mammaires des vaches atteintes de la *Cocote*.

Nous ne dirons que quelques mots sur les symptômes d'une maladie peu connue, et dont la cause l'est bien moins encore, mais sur laquelle on peut consulter l'excellent travail de M. le docteur Rayer (1), et surtout le savant et très-utile Rapport (2) fait, sur la demande de M. le préfet de police, par une Commission du Conseil de salubrité, composée de MM. Gaultier de Claubry, Pelletier, Guérard, Émery, Labarraque, Chevalier, et Huzard fils, rapporteur.

Quoique dans les mêmes établissements, c'est-à-dire, sous les mêmes influences, le plus grand nombre des vaches ayent été plus ou moins atteintes des effets de l'épizootie, il en est quelques-unes qui en ont été exemptes, et bien peu y ont succombé. Encore n'est-il pas prouvé que ces vaches soient mortes de la Cocote.

Les caractères extérieurs ou les effets d'une cause plus profonde ont été, dans l'affaiblissement des forces vitales de l'animal, prouvés par sa position couchée, par ses membres étalés et son œil morne, par des pustules plus ou moins multipliées, soit aux surfaces des mamelles (3) et des mamelons (4), soit à celles de la peau entre les doigts et au-dessus

ments de pellicules qui proviennent, soit de l'épithélium formé par transsudation muqueuse aux parois des voies lactées, soit de l'épiderme extérieur des trayons froissés entre les doigts pendant le trait.

(1) Note sur l'Épizootie régnante, Journal *l'Expérience*, 17 janvier 1839.

(2) Lu en séance du 15 mars 1839.

(3) Pis ou glande mammaire, Mamelles abdominales ou inguinales.

(4) Trayons.

des ongles, soit de la muqueuse des parties intérieures de la bouche; ces dernières désignées, à cause du lieu différent qu'elles affectent, sous le nom particulier d'*Aphthes*. Ces diverses pustules, dont le caractère remarquable est de n'être point cernées d'une aréole rouge produite par la surirritation tissulaire et l'appel du sang en ce lieu (1), sont plus ou moins grandes, plus ou moins régulières, isolées, groupées ou confluentes, et formées de l'épiderme soulevé par l'affluence de la lymphe attirée sur ces points où, peu à peu, en s'altérant et en mourant dans ses globules, elle prend le nom de *Pus* (2).

Pendant cette maladie, qui dure de 8 à 15 jours, les vaches perdent l'appétit, maigrissent, et elles périraient infailliblement si on ne les alimentait pas en leur faisant avaler de l'eau blanchie avec une quantité suffisante de farine de froment. Ici on peut se demander si le défaut d'appétit qu'éprouve l'animal est seulement causé par les aphthes de la bouche qui gênent la manducation, ou si, en même temps,

---

(1) L'absence de ce caractère d'inflammation circulaire annonce que sur le point des pustules l'irritation n'a été portée qu'au degré qui convient seulement à l'appel de la lymphe et non à celui, plus considérable, qui, en même temps, attire le sang et teint les tissus par la présence de ses globules. Cela explique aussi le peu de sensibilité qu'éprouvent les vaches lorsqu'on presse leurs trayons pustuleux.

(2) M. le docteur Rayer ayant observé que l'éruption ne consistait point en de petites *cloches* remplies de liquide lymphatique, mais bien dans le tissu cutané, soulevé par une simple imbibition du même liquide, a cru devoir distinguer ces deux états en substituant la dénomination d'*élevure* à celle de *pustule* employée par les auteurs qui ont parlé de cette maladie.

des aphthes semblables existent dans une plus grande étendue sur la muqueuse de l'estomac, et si celles-ci n'ont pas précédé ou déterminé celles de la bouche (1).

Dans cet état de souffrance et de disette, durant lequel les vaches sont privées de nourriture, d'air et d'exercice, durant lequel elles boitent, ont la fièvre, éprouvent le frisson et l'horripilation, et dont la bouche laisse couler une salive gluante, les sécrétions laiteuses doivent nécessairement être plus ou moins troublées dans leurs fonctions, plus ou moins abondantes, plus ou moins nutritives, plus ou moins viciées; elles peuvent même se trouver entièrement taries. C'est ce qui arrive en effet suivant le degré d'intensité de la maladie portée, soit sur la totalité des tissus sécréteurs de toute une mamelle, soit seulement sur quelques-unes des quatre parties ou régions distinctes dont est composée, par soudure naturelle et constante, cette mamelle.

Une chose qui étonnerait au premier abord si l'on ne savait pas que la mamelle d'une vache est le composé, par rapprochement et par greffe, de quatre mamelles distinctes, terminées chacune par son propre mamelon, et fonctionnant aussi indépendamment l'une de l'autre que le font les deux seins séparés chez la femme, ce serait de voir la même vache malade, la même mamelle produire souvent par l'un de ses trayons un lait excellent, et par l'autre, situé à côté, un lait mort et inodore, et par un troisième un lait purulent et d'une

---

(1) On a avancé, ce qui n'est guère probable, que les aphthes de la bouche provenaient par une sorte de contagion ou d'inoculation, parce que l'animal, pour se soulager, se léchait les pustules primitivement développées sur la peau des interdigitations de ses pieds.

odeur horriblement fétide. Ceci prouve l'indépendance des sources et celle des fonctions physiologiques des quatre mamelles simples, intimement liées par approche en une mamelle composée (1).

Les pustules des trayons, comme semble l'indiquer l'absence de l'inflammation aréolaire, sont peu ou point douloureuses, car lorsqu'on presse les trayons qui en sont couverts, pour en obtenir du lait, l'animal semble à peine s'en apercevoir. Ces pustules ne sont qu'un signe, que le produit en quelque sorte d'une surirritation, et peut-être d'une inflammation intérieure des tissus mammaires et sécréteurs du lait. C'est là qu'est le siége du trouble apporté dans les fonctions physiologiques de la sécrétion si importante de ce liquide nutritif.

Voici le résultat des nombreuses observations microscopiques que nous avons faites pendant la durée de l'épizootie, sur des laits sains, des laits morts et inodores, et des laits putréfiés et fétides.

Dès que nous fûmes instruit, par la voie des journaux, qu'un grand nombre de vaches étaient malades et que leur lait pouvait avoir des inconvénients plus ou moins graves pour la santé, nous nous empressâmes d'examiner d'abord celui destiné à nos besoins particuliers, et ensuite celui apporté de divers lieux, et par conséquent de vaches différentes.

---

(1) Nous avons vu ces jours derniers une vache malade, dont la moitié de la mamelle prise en travers, c'est-à-dire, les deux mamelles particulières antérieures, étaient enflammées, très-rouges, tandis que l'autre moitié ou les deux mamelles particulières postérieures, étaient blanches comme de coutume, et cela de la manière la plus tranchée.

Connaissant depuis longtemps les caractères physiques et physiologiques du lait sain, vif et de bonne qualité, cet état fut pour nous une sorte d'étalon ou de terme de comparaison vers lequel nous rapportâmes depuis tous les échantillons de lait que nous pûmes nous procurer.

Commençons par dire que tous les laits destinés à la consommation, que nous avons eu l'occasion d'examiner, soit à la vue simple, soit au microscope, et cela au nombre de plus de 20, étaient tous bien constitués et de bonne qualité, ce qui porte à croire que le lait distribué dans Paris, pendant l'épidémie des vaches, a été généralement bon.

Pour s'acquitter le mieux possible de sa mission, la Commission de l'Académie, composée de toute la section de chimie et de nous, se transporta à l'Abattoir de Montmartre et dans une vacherie particulière, le mardi 16 janvier, afin d'y observer des vaches malades de la Cocote, et d'en recueillir les sécrétions laiteuses dans divers états sains ou morbides.

Trop souffrant ce jour-là, nous ne pûmes faire partie de cette réunion. Mais dès le soir même, M. Darcet eut la bonté de nous faire parvenir la moitié des échantillons des laits traits sur des vaches plus ou moins malades qui se trouvaient, soit à l'Abattoir, soit dans la vacherie particulière.

Ces échantillons, au nombre de 7, successivement observés à la vue simple et au microscope, présentaient les caractères suivants :

N° 1. *Lait obtenu par la voie d'un mamelon malade ou pourvu de pustules.*

Ce liquide, contenu dans le bocal, était séparé en deux parties de densité bien différentes. La partie supérieure, de moitié plus considérable que l'autre, n'était, pour ainsi dire, qu'une eau séreuse d'un jaune paille (fig. 6).

La partie inférieure, moins colorée, ressemblait à la Levûre de bière, et, comme celle-ci, se composait de globules précipités au fond de l'eau séreuse.

Versé dans une soucoupe, ce liquide était comme huileux, un peu filant, entièrement inodore, sans saveur appréciable et ne rougissait que peu ou point le papier bleu de tournesol.

La partie solide ou le coagulum, formé par l'agglutination des globules morts et précipités, n'offrait qu'une seule masse informe, gélatineuse, tout à fait comparable, quant à l'aspect, à la densité et à l'élasticité, à ces agglomérations charnues ou gélatinoïdes que l'on nomme la *Mère* (1) et qui se forment dans le cidre, le vin et le vinaigre.

Ce coagulum, collant légèrement aux doigts, présentait à sa surface, lorsqu'on l'observait à la loupe, de petites circonvolutions labyrinthiformes et cérébrinales analogues à celles que l'on remarque à la surface inférieure de ces masses gélatineuses (2) qui se forment au-dessus des cornichons con-

(1) *Mycoderma vini* des botanistes.

(2) *Mycoderma mesentericum.*

fits ou des fruits à l'eau-de-vie. Quelques taches rosées ou rougeâtres annonçaient que la matière colorante du sang s'était mêlée à cette sécrétion laiteuse et morbide.

Vue au microscope.

L'eau séreuse montrait des globules morts (1) peu nombreux, déprimés ou aplatis, flasques, transparents, légèrement jaunâtres, granuleux dans leur intérieur et comme fraisés sur leur bord, variables en diamètre depuis le point apercevable jusqu'à environ un 120^e de mill. (fig. 7).

C'est à la présence de ces globules suspendus dans l'eau séreuse que celle-ci doit sa couleur rousse ou paille, sa légère densité et son collant.

Les globules précipités et agglutinés en masse charnue étaient les mêmes, peut-être généralement un peu plus gros. Plusieurs, des plus développés, laissaient apercevoir que parmi les globulins contenus dans leur intérieur, un, deux ou trois, avaient pris plus d'accroissement que les autres.

---

(1) Globules cotonneux de M. Donné. De semblables globules s'observent en plus ou en moins grande quantité parmi les globules sanguins et colorés du sang humain, et sans doute parmi ceux de beaucoup d'autres sangs. Ces globules, nommés globules blancs par M. Donné, et globules fibrineux par M. Mandl, sont-ils des globules sanguins étiolés, albins, morts ou avortés, ou sont-ce des globules lymphatiques viciés et passés dans la circulation sanguine? ou enfin n'est-ce, ce que nous n'admettons pas, que de petits agglomérats de granules fibrineux?

N° 2. *Lait obtenu par la voie d'un mamelon sain, dépourvu de pustules, mais faisant partie de la mamelle composée de la même vache malade.*

Contenu dans le bocal, ce Lait offrait la plus belle apparence; les gros globules oléagineux, nombreux, étaient successivement montés et formaient à peu près le tiers supérieur du liquide laiteux. Les deux autres tiers se distinguaient par une teinte blanche bien égale, mais un peu moins jaunâtre. Jusque-là tous ces signes étaient ceux d'un excellent Lait, tant sous le rapport de la nutrition que sous celui de la production du beurre.

Mis à nu, ce Lait conservait sa belle apparence; il était inodore comme tous les Laits froids, et sa saveur, légèrement acide, était celle d'un excellent Lait. Il rougissait promptement le papier bleu de tournesol. La goutte placée entre deux lames de verre s'y étendait vite et facilement, de manière à offrir une teinte blanche parfaitement égale. Ce caractère indiquait que les globules laiteux étaient bien isolés les uns des autres, sains par conséquent, et que le Lait était de bonne qualité.

Vus au microscope.

Les globules, petits, moyens et gros, étaient purs dans leur sphéricité, dans leur transparence; tous étaient bien isolés et nageaient ou roulaient librement dans le sérum sans s'y agglutiner (fig. 1). Ils étaient sains, jouissaient de leur vitalité organique, ce qui les mettait dans le cas de monter vers l'air et l'oxygène, ou de rester suspendus également dans le sérum, au lieu de tomber au fond et de s'y agglutiner en une masse charnue comme dans le cas précédent, lorsqu'ils sont morts.

N° 3. *Lait provenant d'une autre vache malade, mais par la voie d'un mamelon paraissant sain extérieurement et sans pustules.*

Vu dans le bocal, il avait la même apparence que le précédent. Une grande épaisseur de globules oléagineux ou crémeux occupait la partie supérieure. Versé dans une assiette, la crème, plus jaunâtre, nageait par petites portions dans le sérum laiteux qui était moins dense et un peu plus bleuâtre. Toujours inodore avec une très-légère saveur de Lait, il rougissait le papier bleu de tournesol. Placé entre deux lames de verre, il s'étendait moins bien que le précédent et offrait une teinte moins égale.

Vus au microscope.

Les globules étaient généralement isolés les uns des autres, mais ils étaient altérés dans leur sphéricité et dans leur transparence qui avait pris une légère nuance jaunâtre (fig. 2). On voyait qu'ils étaient flétris ou ridés et plus ou moins contractés, que, probablement par l'effet de cette contraction, ils avaient transpiré une partie de leur matière grasse, ce qui, dans ce cas, facilitait encore leur tendance à s'agglutiner, comme lorsque le Lait altéré se coagule pendant l'ébullition ou lorsqu'on le soumet à l'action de l'ammoniaque. Parmi les globules isolés, on en voyait beaucoup d'autres qui s'étaient collés en masses irrégulières et de grandeurs variables, les unes arrondies, les autres comme nuageuses, d'autres allongées sous la forme de rouleaux (1) (fig. 2, *d,d,d.*). Toutes ces masses composées de globules petits et gros nageaient ou roulaient dans le sérum sans se désagréger. Dans quelques-unes, sans doute les plus anciennes, on voyait que les globules composants s'étaient comme fondus plus ou moins, de manière à ne plus offrir que la forme de la masse, dans laquelle on retrouvait encore quelques simulacres de globules.

Indépendamment des globules libres et des globules agglutinés, le sérum contenait encore une quantité prodigieuse de globulins punctiformes, monadaires, avec mouvement de fourmillement, que l'on ne rencontre pas en aussi grand nombre dans le Lait de bonne qualité. D'où provenait la multiplication excessive de ces globulins? étaient-ils invisibles d'abord dans le sérum, comme ceux de l'albumen de l'œuf, qui n'apparaissent que dans l'acte de la fermentation de cette substance? ou bien les gros globules, en se contractant, les avaient-ils expulsés de leur intérieur? Voilà ce que l'on ne peut encore savoir. Quoique ce Lait ne soit pas de première qualité, sous le rapport de la vitalité et des caractères organiques de ses globules, nous pensons néanmoins qu'il n'a rien perdu sous celui de ses qualités nutritives, la nutrition ayant toujours lieu par l'assimilation de molécules de matière organique isolées de tissus de végétaux ou de tissus d'ani-

---

(1) Les formes allongées, composées de globules agglutinés, ressemblaient à de petits rouleaux de laine ou de coton qui rouleraient dans l'eau.

maux qui ont cessé de vivre, lorsque nous les introduisons dans notre estomac.

N° 4. *Lait fourni par le mamelon pustuleux d'une vache malade.*

Ce liquide différait peu de celui du n° 1. Contenu dans le bocal, il offrait un sérum jaune paille légèrement opalisé et de la transparence du vin de Madère. Une écume qui se formait à sa surface, par l'ascension successive de bulles gazeuses, annonçait qu'il fermentait.

Au fond du bocal on voyait un dépôt blanchâtre, dans la proportion d'un quart environ de l'épaisseur du sérum qui surnageait. Ce dépôt, qui, comme on l'a déjà vu précédemment, était dû à la précipitation des globules morts, simulait parfaitement la Levûre de bière accumulée en pâte au fond de ce liquide.

Inodore et sans saveur appréciable, il n'avait aucune action sur le papier bleu de tournesol.

Vus au microscope.

Les globules de ce Lait se rapportaient parfaitement à ceux décrits dans le Lait n° 1.

N° 5. *Lait tiré par un mamelon sain, sans pustules extérieures, de la mamelle de la vache précédente.*

Contenu dans le bocal, ce Lait était d'une parfaite apparence; sa belle teinte laiteuse était égale dans toute l'étendue du liquide, sauf dans la partie supérieure où, dans une petite épaisseur, la teinte tirait un peu sur le jaunâtre, ce qui faisait facilement supposer que cette région se composait des gros globules butyreux ou oléagineux qui, après avoir monté, s'étaient accumulés en crème dans cette partie.

Sorti du bocal, il offrait tous les caractères d'un bon Lait; il était inodore, sa saveur était celle du Lait normal; il rougissait promptement le papier bleu de tournesol; il s'étendait facilement et très-uniformément entre les lames de verre, et supportait parfaitement l'épreuve de l'ébullition la plus prolongée : il ne s'agglutinait point sous l'influence de l'ammoniaque.

Vu au microscope.

Ce Lait achevait de fournir les preuves de son excellente qualité. Ses globules, bien sphériques et brillants comme des perles, étaient tous isolés; tous, en nageant uniformément dans le sérum, s'évitaient et ne s'agglutinaient point. C'était donc un bon Lait, quoique provenant par le mamelon de l'une des quatre mamelles soudées, voisine d'une autre qui, étant malade, en sécrétait un fort mauvais (1) (fig. 1).

---

(1) De même que de deux sources voisines il peut couler de l'une une eau très-limpide et de l'autre une eau bourbeuse, on voit de deux mamelons voisins de la même mamelle sortir, par l'un un lait pur, et par l'autre un lait morbide, et même un lait purulent et très-fétide.

N° 6. *Lait obtenu par la voie d'un mamelon pustuleux d'une autre vache malade.*

Ce Lait était, à peu de chose près, semblable à ceux des nos 1 et 4.

N° 7. *Lait extrait par un mamelon sain de la même vache.*

Ce Lait, contrairement au précédent, était parfait dans sa composition.

On a dû remarquer que plus le Lait était altéré ou morbide dans la constitution de ses globules, moins il offrait d'acidité et moins par conséquent il rougissait le papier bleu de tournesol.

Le vendredi suivant, 19 janvier, la commission retourna à l'abattoir de Montmartre et à la vacherie particulière dont nous avons parlé, dans l'intention d'y revoir des vaches malades et des Laits plus ou moins morbides. Ce jour-là il nous fut possible de faire partie de cette réunion, à laquelle assistait M. le docteur Donné, comme l'auteur de la lettre écrite à l'Académie, sur les dangers présumés que pouvait offrir le Lait des vaches malades pendant la durée de l'épidémie; lettre qui a donné lieu au savant Rapport qui se trouve imprimé, en entier, dans les Comptes rendus de l'Académie (1).

L'épidémie, tout à fait à son déclin, nous fit désespérer pendant quelque temps de pouvoir nous procurer encore quelques vaches atteintes de la Cocote. Ce ne fut qu'au bout

---

(1) Séance du 18 mars 1839, p. 380-406.

de quelques heures de recherches que, grâce aux soins complaisants de M. le Directeur des abattoirs, Bizet, on en trouva trois ou quatre dont une était très-vivement affectée.

Parmi les échantillons de Lait obtenus de ces différentes vaches et de leurs divers mamelons sains ou malades, il s'en trouva deux qui présentaient des caractères morbides qui ne s'étaient point encore offerts dans les sept décrits plus haut.

Dans l'un de ces Laits, qui avait une densité égale, c'est-à-dire, dont les globules ne se séparaient pas du sérum comme dans ceux des n^{os} 1 et 4, dont la teinte laiteuse était uniforme mais un peu verdâtre, on trouvait, à l'inspection microscopique, un grand nombre de globules morbides de diamètres différents, dont les plus gros pouvaient avoir un 50^{me} de mill.; ils étaient vésiculeux, fraisés ou mamelonnés, remplis de globulins et plus ou moins colorés en vert olive (fig. 2, *e*,*e*,*e*.). Ces globules qui étaient, par leur présence et leur nombre, la cause de la couleur verdâtre de ce Lait, vu à l'œil nu, n'étaient évidemment que des états très-altérés des globules normaux du Lait, car on pouvait suivre, parmi tous les autres globules plus ou moins sains, tous les passages de ces altérations. Quelques-uns de ces gros globules, fraisés et olivâtres, montraient que dans leur intérieur un, deux ou trois des globulins s'étaient accrus.

Ce Lait, dont personne n'aurait voulu faire usage, à cause de sa teinte verdâtre, n'avait aucune odeur appréciable (1);

(1) Ce lait, que nous avons conservé, est encore inodore aujourd'hui 18 juin, 5 mois après la sortie du pis de la vache malade.

sa saveur était un peu laiteuse, il rougissait à peine le papier bleu de tournesol, l'ammoniaque le coagulait, mais, chose remarquable, il subissait l'épreuve de l'ébullition la plus prolongée.

On trouve de ces globules granuleux et olivâtres en plus ou moins grande quantité dans tous les Laits qui proviennent de tissus mammaires surirrités, quelle que soit la cause de la surirritation.

L'hiver dernier, M. le docteur Breschet nous communiqua un Lait qui provenait de l'ouverture d'un sein surirrité et engorgé d'une jeune femme malade à la suite d'une couche. Ce Lait avait absolument les mêmes caractères que celui que nous venons de décrire, si ce n'est que, plus vicié encore, la plupart des gros globules olivâtres, bien plus nombreux, vomissaient à l'extérieur leur vésicule interne, qui était incolore (1).

Beaucoup d'autres échantillons de Lait sains ou plus ou moins morbides, tous provenant de vaches affectées de la Cocote à divers degrés, nous furent communiqués par MM. les Professeurs Lassaigne et Philippar, par M. Huzard fils, avec tous les renseignements possibles sur l'état pathologique des vaches qu'ils avaient soigneusement observées, soit à l'école vétérinaire d'Alfort, soit à Trianon, soit à Grignon, soit dans plusieurs grandes fermes contiguës à Versailles.

Comme tous ces Laits ne nous ont offert que des répéti-

---

(1) Voyez la description de ce lait, Comptes rendus de l'Acad., t. VI, p. 250.

tions de ceux dont nous venons de faire mention, nous nous dispenserons d'en parler.

M. Donné ayant présenté à la société Philomatique et à l'Académie des sciences des échantillons de Lait dont l'odeur était horriblement fétide, nous étions étonné de voir que tous ceux, très-nombreux et souvent très-morbides, que nous avions examinés, étaient *parfaitement inodores*, ou seulement, quelquefois, exhalaient une très-légère odeur de Pomme de Reinette.

Ce Lait fétide s'est enfin rencontré à l'abattoir de Montmartre sur une vache qui paraissait extrêmement souffrante et dont la mamelle surirritée montrait des mamelons ou trayons pustuleux.

A la vue simple, cette sécrétion laiteuse avait un aspect tout particulier qui ne ressemblait en rien à celui des autres Laits observés les plus morbides. Le liquide avait la même densité et la même intensité de couleur dans toutes ses parties, c'est-à-dire qu'il ne se faisait point de séparation entre l'eau séreuse et les globules et les globulins (fig. 9). Sa couleur, au lieu d'être rousse, était un mélange équivoque de blanc, de gris et de jaunâtre, ce qui, en somme, donnait un gris clair tirant un peu sur le verdâtre. L'odeur fétide, sulfurée et des plus repoussantes, ne pouvait guère être mieux comparée, comme l'a déjà dit M. Donné, qu'à celle poussée au plus haut degré de la sueur des pieds les plus sales et les plus puants. Mis entre deux lames de verre, il s'étendait facilement et également.

Un passage aussi brusque entre un Lait très-morbide et inodore et un Lait aussi horriblement fétide, il devait nécessairement exister de grandes différences organiques déjà indiquées par celles des aspects (1).

Analyse microscopique.

Ce Lait, soumis au microscope (fig. 10), n'offrait plus guère que des globulins punctiformes de la plus grande ténuité possible et doués chacun du mouvement de fourmillement ou Brownien. Ces globulins provenaient tout à la fois de la décomposition des enveloppes vésiculaires de globules laiteux préalablement morts, et des globulins internes que contenaient ces enveloppes. Parmi cette prodigieuse quantité de globulins punctiformes et monadaires, il restait encore un assez grand nombre de globules morbides semblables à ceux que nous avons décrits sous les n^os 1 et 4, et qui étaient en action de se décomposer à leur tour (fig. 10, *a,a*).

Il est facile de voir que ce Lait fétide n'était qu'un état plus avancé des Laits simples, morts ou morbides, que nous avions déjà observés. Dans ceux-ci, les globules, seulement privés de leur vie organique, se séparaient de l'eau séreuse en tombant au fond de tout leur poids, mais sans avoir encore éprouvé la moindre décomposition, tandis que dans le Lait fétide ces globules morts étaient plus ou moins dissous dans leurs éléments monadaires (2).

---

(1) Toutes les gradations possibles entre ces deux Laits doivent nécessairement se rencontrer, l'un n'étant que la décomposition purulente de l'autre.

(2) Tous les Laits plus ou moins morbides, soit à l'état inodore, soit à l'état purulent et fétide, ne sont point particuliers à l'affection de la Cocote;

Cette observation microscopique, qui nous paraît neuve et mériter l'attention des physiologistes, en ce qu'elle s'applique à tous les tissus organiques après la vie d'association des individualités composées; cette observation démontre que tant que les globules laiteux ne sont que malades, morts et seulement plus ou moins altérés dans leur forme et leur couleur normales, qu'ils restent parfaitement inodores, et que ce n'est qu'au moment de leur décomposition en globulins monadaires que l'odeur fétide se manifeste de plus en plus et suivant le plus grand nombre de globules morts et décomposés. Ceci s'explique d'une manière toute mécanique. Tant que les éléments composants restent captifs et agglutinés à leur place dans l'organisation du globule, adhérents les uns aux autres, ils ne peuvent encore s'en détacher et

---

ils n'en sont point un caractère, puisque les mêmes altérations peuvent être produites chaque fois qu'une mamelle est surirritée ou engorgée. C'est avec raison que M. Donné a comparé ces laits morbides au premier lait sécrété immédiatement après le part des animaux et auquel on donne le nom de *Colostrum*. Cette ébauche d'une sécrétion nouvelle et temporaire, précédée d'une surirritation des tissus mammaires, ne peut être composée, tout d'abord, que de globules mal constitués, rares et plus ou moins morbides. Pour que le lait soit bon, il faut que l'irritation descende au degré qui convient aux fonctions normales et maternelles de cette sécrétion.

Si le *Colostrum* ou le premier lait a semblé avoir une légère propriété purgative, c'est qu'on n'a pas réfléchi que si le nouveau-né le rejette ou éprouve des coliques, c'est seulement parce qu'il agit sur des parois très-irritables et qui ne sont point encore accoutumées au contact de corps étrangers. Il en est de ces parois ou de cette surface muqueuse comme de celle extérieure de la peau, qui a besoin aussi de se mettre peu à peu en rapport de contact avec l'air atmosphérique.

s'élever dans l'atmosphère de manière à venir frapper les nerfs olfactifs de l'odorat, comme cela arrive au plus haut point chez les Laits décomposés et putrides dans les voies lactées des mamelles engorgées et surirritées des vaches très-malades de la Cocote ou de toute autre affection.

La décomposition en globulins monadaires des globules morts du Lait explique l'aspect particulier du Lait passé à l'état purulent et de fétidité dans lequel les globulins, en raison de leur légèreté, sont également répartis dans l'eau séreuse.

D'après la cause, très-évidente, du développement ou du dégagement de l'odeur si fétide du Lait, par la décomposition des globules sous l'influence des tissus mammaires surirrités, on ne peut guère mettre en doute que chez les animaux morts, lorsque la fétidité se fait sentir, que la cause ne soit absolument la même, c'est-à-dire que, pour que cette odeur se manifeste à notre odorat, il faut qu'il y ait décomposition monadaire des organes élémentaires qui servent à constituer les masses tissulaires de l'animal, tels d'abord que les globules pleins ou vésiculaires des diverses sécrétions, ceux de la pulpe nerveuse, ceux plus résistants des fibres musculaires et des autres parties des tissus.

C'est ainsi que les divers organes élémentaires qui servent à la composition des masses tissulaires des végétaux et des animaux, étant conservés intacts par la contraction produite, soit par l'absence de l'humidité, soit par l'action des sels, des acides, de l'alcool, restent inodores, parce que tous leurs éléments étant retenus et comprimés ne se détachent ni ne s'élèvent en miasmes dans l'atmosphère.

Nous allons maintenant parler d'un autre état de Lait, très-distinct des précédents, obtenu par M. Lassaigne d'une vache malade d'une autre affection que celle de la Cocote, et dont les quatre mamelles particulières de la mamelle composée et quaternaire étaient surirritées et engorgées.

Ce Lait sortait des mamelons ou trayons sous la forme de petits flocons d'un beau blanc et d'un aspect entièrement cotonneux (fig. 11). Ces flocons, véritables petites mycodermes, avaient une grande élasticité et en même temps une grande ténacité, ce qui démontrait une forte adhérence entre les composants microscopiques de ces coagulums, formés dans l'intérieur des voies lactées de l'animal malade.

Vus au microscope.

Ces flocons laiteux, très-difficiles à étendre ou à séparer entre les deux lames de verre, montraient qu'ils étaient le résultat d'une immense quantité de globules laiteux morts dans les vaisseaux lactés (fig. 12, *a*), puis, par l'effet de cette mort, fortement agglutinés les uns aux autres. Tous ces globules, étudiés isolément, chez ceux échappés à l'agglutination, différaient des globules sains du lait normal en ce qu'ils étaient altérés dans leur forme sphérique, qu'ils étaient affaissés, flasques et plicatulés comme de petites vessies humides et dessoufflées, et en ce qu'ils avaient pris une légère teinte jaunâtre. Leur diamètre était toujours celui des globules vifs du Lait. Parmi ces globules on en voyait un grand nombre d'autres qui étaient olivâtres, mûriformes ou fraisés et qui souvent vomissaient leur vésicule interne (fig. 12, *b, b, b*).

Jusque-là tout se passait fort simplement : on conçoit facilement que des globules privés de leur vie organique puissent devenir collants et former un coagulum; mais il se présente ici un cas bien plus intéressant. Tous ces globules étaient entremêlés avec des fibrilles longues, très-nombreuses, de diamètres variables, paraissant, au moins les plus grosses, tubuleuses, sans cloisons ou sans articulations, rameuses, flexueuses et incolores comme la plupart des globules (fig. 12 *d, d*). Ces fibrilles, enchevêtrées entre elles et entre les globules laiteux, devaient nécessairement contribuer fortement au feutrage solide de ces coagulums. Mais d'où provenaient-elles? qui, des globules laiteux ou des fibrilles, avait précédé dans les voies lactées? Ces deux produits organisés étaient-ils indépendants l'un de l'autre, n'étaient-ils qu'associés et végétant pêle-mêle dans le même milieu et sous les mêmes influences? ou n'était-il pas plus rationnel de penser que les globules laiteux, arrêtés et accumulés dans les voies d'une mamelle surirritée et engorgée, y avaient produit, lorsqu'ils vivaient encore, les filaments byssoïdes et mucédinés, comme cela se voit chez les globules laiteux abandonnés à eux-mêmes sous l'influence de l'air et de l'oxygène (1)? Peut-on admettre que l'existence de ces nombreuses tigellules filamenteuses est spontanée, qu'elle est entièrement due à l'arrangement des globules élémentaires qui forment la matière organique suspendue dans l'eau de sérum et sous la seule influence d'une force plastique tendant à l'organi-

(1) L'analogie porte à croire que les filaments de ce Lait particulier ont eu les globules laiteux pour point de départ, et que ces globules en ont été les seminules, comme cela se passe chez toutes celles dont se composent les Levûres et les Mycodermes pendant la fermentation.

sation, comme il paraît que cela a lieu pour la formation de la fibrine du sang? N'ayant point assisté au développement de ces tigellules laiteuses, n'ayant pu les observer que toutes venues, nous ne pouvons rien dire sur leur véritable origine; mais en étudiant cette remarquable végétation filamenteuse développée dans l'intérieur des voies lactées d'une mamelle de vache engorgée, on ne peut s'empêcher de se souvenir d'une citation que nous avons faite dans notre mémoire sur la végétation des globules laiteux (1). Cette citation, la voici : Vésale (2) et Roderic à Castro, après avoir rejeté la ridicule dénomination de *Poil* donnée aux seins engorgés des femmes en couche, et toutes les causes plus ridicules encore que l'on donnait de ces surirritations, disent : le premier, qu'il ne s'engendre point de véritables poils dans les mamelles, mais quelque chose de semblable à *ces filaments* qui se forment dans les reins et dans les méats urinaires; le second, qu'il est persuadé que le lait, en se grumelant dans les vaisseaux lactifères, y forme des concrétions *filamenteuses* semblables à des poils (3).

Ces auteurs avaient-ils réellement bien vu les filaments laiteux dont ils parlent, et qu'ils croyaient se former en pelotons dans les voies lactifères, obstruées vers leurs extrémités? ou n'avaient-ils fait que pressentir cette vérité? Bien convaincu que ce qui se passait en dehors pour la végétation

---

(1) Annales des sciences nat. Décemb. 1837, et Comptes rendus de l'Académie, t. VI, p. 250.

(2) En 1530.

(3) Dict. des sciences médicales, t. 43, p. 473.

des globules du lait, pouvait tout aussi bien avoir lieu dans l'intérieur des tissus mammaires vivants, lorsque les globules sont arrêtés dans leur écoulement naturel et forcés de séjourner dans les mamelles, nous nous mîmes à la recherche de ces cas extraordinaires, sans pouvoir depuis nous en procurer un seul, autre que celui que nous devons aujourd'hui à la bonté de M. le professeur Lassaigne, et dont nous donnons ici les figures, afin de bien consigner ce fait extrêmement curieux d'une végétation filamenteuse et intestinale parmi des globules laiteux.

Après avoir parlé de cette dernière modification du lait, de ce lait filamenteux ou fibrineux, de ce lait très-alcalin comme tous les laits morbides (1), nous allons examiner le liquide séreux qui, sécrété plus que de coutume, sur des points multipliés, soit de la muqueuse de l'intérieur de la bouche, soit à la surface des trayons, soit aux pieds dans les parties interdigitées, soulève l'épiderme de manière à produire des pustules ou aphthes blanchâtres dépourvus d'inflammation circulaire apparente.

Du liquide contenu dans les trois sortes de pustules.

En nous envoyant divers échantillons de lait plus ou moins morbide, M. le professeur Philippar eut la bonté d'y joindre un petit flacon dans lequel il avait mis une certaine quantité de la sérosité extraite des pustules des trayons. Cette sérosité,

---

(1) Cette modification de lait filamenteux peut se rencontrer dans les voies lactées de toutes les mamelles surirritées ou malades.

au moment de son extraction, était incolore, inodore et visqueuse; c'était de la lymphe aussi pure que celle qui est attirée et qui s'accumule sous l'épiderme par l'action surirritante des vésicules. Dès qu'elle fut exposée à l'air et à la lumière, elle jaunit promptement.

Vue au microscope.

Cette Lymphe, jaunie par l'action de l'air et de la lumière, et pouvant, en cet état de décomposition plus ou moins avancé, être appelée Pus (1), se composait de son eau inapercevable et de ses globules organisés. Ces globules, dont le diamètre variait depuis le point monadaire jusqu'à environ un 80e de mill., étaient les plus gros, vésiculeux, jaunâtres, et contenaient des globulins excessivement ténus. Dans cet état morbide, ils tendaient à s'altérer dans leur forme sphérique, à s'agglutiner, à se confondre et à former ces coagulums que nous nommons les croûtes du Pus. Parmi ces globules se trouvaient de petits caillots rougeâtres et irréguliers dus à de la matière colorante du sang extravasée.

L'analyse que nous fîmes du liquide lymphatique recueilli par nous dans les pustules des pieds et dans les aphthes de la bouche, nous démontra l'identité des trois

---

(1) Les globules du Pus ne sont point une espèce normale, ils n'offrent qu'un état morbide, soit des globules lymphatiques, soit des globules muqueux, soit des globules sanguins, soit enfin des globules laiteux. Le pus n'est donc qu'un amas des globules morts précités et souvent mélangés ensemble. En cet état, le pus devient souvent verdâtre et prend une odeur fétide.

sécrétions dues, momentanément, à l'état pathologique des vaches affectées de la Cocote.

Plusieurs médecins expérimentateurs, croyant qu'en raison de leur apparence et de leur situation sur les trayons, ces pustules pouvaient renfermer le véritable *cow-pox,* ou vaccin primitif, ont essayé ce pus, qui leur était inconnu dans ses principes, en l'inoculant chez des enfants et sur eux-mêmes, et en répétant, sans le moindre succès, sans la moindre action quelconque, l'expérience sur seize individus différents.

Ce pus s'est constamment éteint sur le point de l'inoculation, comme l'aurait fait de la lymphe recueillie sous la cloche ou l'ampoule d'un vésicatoire.

Là se sont bornées nos analyses microscopiques des laits plus ou moins morbides, plus ou moins purulents, produits sous l'influence des tissus mammaires des vaches affectées de la Cocote, comparées à celle d'un lait vif et de bonne qualité.

Après l'observation pathologique des symptômes extérieurs de la maladie, venaient naturellement trois autres sortes d'examens :

1° Celui, microscopique, des sécrétions laiteuses et des sécrétions lymphatiques des pustules, que nous avons essayé de faire le mieux qu'il nous a été possible.

2° Celui résultant d'analyses chimiques comparées, afin de s'assurer si les laits morbides contenaient ou ne contenaient pas des substances délétères pouvant être nuisibles à la santé : examen le plus utile, le plus direct, comme étant le seul capable dans la circonstance de rassurer la tranquillité publique; car tout ce que l'on a demandé s'est borné à cette simple question : *Le lait des vaches malades de la Cocote* *est-il bon ou est-il mauvais? Peut-on continuer d'en faire usage pendant la durée de l'épidémie, ou est-il prudent de s'en abstenir? Peut-il en même temps s'en trouver du bon et du mauvais? A quels signes faciles et à la portée de tout le monde peut-on les distinguer?*

3° Celui, plus difficile, consistant dans de longues expériences physiologiques, pour arriver à connaître les effets bons ou mauvais des laits plus ou moins morbides sur l'estomac et dans le reste de l'économie animale.

Grâce à ce que le lait est d'un très-grand usage comme aliment, ce dernier examen fut soumis à l'expérience la plus étendue : le public, presque à son insu, en fut chargé.

Il est très-consolant de pouvoir assurer, dans le cas où une pareille épizootie viendrait à reparaître, et à être encore dénoncée par la voie des journaux (1), que l'usage du lait, pendant la durée de celle-ci, n'a produit aucun malaise, aucuns cas graves sur les estomacs même les plus susceptibles, comme ceux des enfants et des vieillards, qui se sont, en grande partie, nourris de lait pendant l'épidémie. Des observations de ce genre, faites par des médecins dans des maisons de retraite, sur des individus nombreux, ont été rapportées à l'Académie royale de médecine et consignées aux procès-verbaux. Des veaux et des cochons nourris dans plu-

(1) Cette maladie, bien connue des vétérinaires, se renouvelle assez souvent, car ils l'ont observée et bien décrite en 1810, 1811, 1812, 1834 et 1835. Mais l'ayant toujours jugée assez bénigne, ils n'ont jamais cru nécessaire d'en entretenir le public, qui ordinairement prend tout au sérieux et s'effraye facilement.

sieurs fermes avec le lait produit par des vaches malades de la Cocote, n'ont éprouvé aucune indisposition.

Ce liquide, qui fait la première nourriture de l'homme et des animaux mammifères, et qui est d'un usage familier durant le reste de la vie, est tellement connu dans ses caractères d'aspect, de couleur, d'odeur et de goût, que chaque individu peut être son propre inspecteur, comme il l'est de presque tous les autres aliments dont il fait usage. Le moindre changement qu'éprouve le lait dans ses caractères accoutumés, nous est signalé de suite et nous le fait repousser à l'instant. Il en a été de même de la chair de toutes les vaches abattues lorsqu'elles étaient atteintes de la Cocote. Cette viande, vendue et mangée, n'a offert aucuns résultats fâcheux.

Aux signes distinctifs du lait sain dont nous avons parlé dans le commencement de ce travail, nous avions cru pouvoir y ajouter celui de l'épreuve de l'ébullition; mais plusieurs expériences nous ont démontré l'insuffisance de ce moyen.

Du lait sain dans lequel nous avons introduit à peu près le quart du sérum jaune d'un lait dont tous les globules morts s'étaient précipités et coagulés en un caillot charnu, a parfaitement subi l'ébullition la plus répétée et la plus prolongée.

Un autre lait, après avoir reçu une portion considérable du caillot, a supporté la même épreuve.

Dans un troisième, nous avons ajouté du lait purulent et fétide, et ce mélange a parfaitement bouilli. Pendant la durée de la chaleur de ce lait, il s'en exhalait une odeur de colle-forte chaude et fondue. Au microscope on voyait que les globules sains et sphériques du lait et les globules déprimés et mûriformes, ainsi que les globulins de la purulence de ces derniers, étaient parfaitement distincts les uns des autres. Chacun d'eux, malgré l'ébullition, avait conservé son caractère.

On ne peut donner le nom de lait, au moins de lait pur, à tous les liquides qui sortent par l'orifice des trayons d'une vache dont la mamelle est dans un état de surirritation et d'inflammation intérieure avec pustules aux trayons. Dans cet état pathologique, toutes les fonctions de l'organe mammaire sont en désordre; les trois grandes sécrétions, celle de la Lymphe, celle du Sang et celle du Lait, sont troublées. Leurs globules particuliers, altérés dans leur forme et dans leur couleur habituelle, perdent leurs caractères spéciaux au point, souvent, de ne pouvoir être reconnus. Les voies particulières, si voisines les unes des autres, que suivent, dans l'état de santé, ces différentes sécrétions, débordent les unes dans les autres, et les trois sortes de globules se confondent et arrivent pêle-mêle à l'extérieur par l'extrémité des trayons. Les vaches malades de la Cocote ont dû fournir de ces liquides composés ou de ces sortes de laits trinitaires. Reste à savoir si un lait qui contient des globules lymphatiques et des globules sanguins, est ou n'est pas nuisible à la santé. Nous pensons, sauf le dégoût qu'il peut inspirer, qu'un lait semblable peut être très-nutritif si ses globules, quoique morts, sont entiers et non encore décomposés et passés à l'état purulent et fétide, et même en ce dernier état, car lorsque nous voyons manger, avec plaisir et sans danger, la chair des gibiers dans un état plus ou moins avancé de putréfaction, les sales boyaux de certains animaux comprimés en longues Andouilles noircies par le temps et par la fumée, le Poisson pourri, et le lait décomposé en fromage puant et purulent, rempli de vers et couvert d'Acarus voisins de ceux qui vivent dans la gale humaine; quand on voit que tous les tissus organiques, quelque décomposés qu'ils soient, peuvent servir à la nourriture des végétaux et des animaux, on est en droit de penser que toute matière organique, pure de substances âcres et vénéneuses (1), peut toujours s'assimiler avec plus ou moins d'avantage à celle déjà employée dans nos divers organes, et que, si nous en repoussons un grand nombre, cela vient de la richesse du choix, de nos goûts particuliers, naturels ou de convention, de nos usages et de nos préjugés, toutes choses qui font que, sans raisons valables, nous voulons, par exemple, que le sang soit cuit, tandis que nous buvons le lait cru.

---

(1) Toutes les matières organiques diffuses dans l'espace ou organisées en tissus sous l'influence de la vie, sont toutes innocentes par elles-mêmes, toutes sont inodores, sans saveurs et sans couleurs, toutes peuvent s'assimiler, nourrir et entretenir de nouveaux tissus chez le végétal et chez l'animal vivants. Les substances nuisibles, lorsqu'il s'en trouve, dépendent bien de l'organisme, mais elles n'en font point partie. Suspendues dans l'eau, elles n'occupent que les organes creux des tissus et les interstices de ces organes qui les absorbent et les sécrètent, ou quelquefois des organes spéciaux, vésiculaires ou glanduleux, comme, par exemple, la glande particulière et toute locale du Crotale, serpent à sonnettes, qui sécrète et contient le venin mortel de ce serpent dont on peut manger tout le reste du corps. Les végétaux les plus vénéneux, par exemple les grosses racines tubéreuses du Manioc (*Janipha Manihot*, Kunt) qui servent à faire le pain de Cassave et dont on obtient le Tapioka (la fécule mise à nu) après avoir râpé ces racines et leur avoir fait subir des lavages suffisants; tous ces végétaux peuvent être employés comme aliment, en dépouillant leurs tissus de tout ce qui leur est étranger, soit en employant des lavages froids ou, ce qui vaut mieux, des lavages à l'eau bouillante.

Caractères distinctifs du Lait vif, de bonne qualité, et des moyens de les reconnaître.

1° L'aspect du Lait, lorsque sa surface offre une teinte bien égale, d'un blanc opaque et légèrement jaunâtre, lorsque sa densité est suffisante, lorsque les gros globules montent et s'accumulent en crème à la surface, pour y jouir, comme corps organisés vivants, des bienfaits de l'air, de l'oxygène et de la lumière;

2° Lorsqu'une goutte de Lait, mise entre deux petites lames de verre, s'y étend promptement et facilement, de manière à offrir une teinte blanche et très-uniforme;

3° Lorsque le Lait, dans lequel on ajoute de l'ammoniaque, ne se coagule pas en une sorte de mucus ou de gelée filante;

4° Lorsque le Lait, étendu entre deux lames de verre et soumis à l'action du microscope, montre ses globules nageant, bien isolés les uns des autres, dans le sérum, qu'ils paraissent bien sphériques, bien luisants et d'une grande transparence, caractères qui indiquent la vitalité organique de chaque globule en particulier;

5° Lorsque les globules sont gros et nombreux, car en eux se trouve, dans l'enveloppe, la matière la plus nutritive, et, dans l'intérieur de l'enveloppe, l'huile butyreuse, qui plus tard se concrète en beurre.

Caractères qui distinguent le Lait altéré, le Lait mort, mais toujours inodores, et le Lait décomposé et, par conséquent, très-fétide.

1° Lorsque sa surface est plus ou moins caillée, ce qui annonce un commencement de séparation des globules du sérum et, par conséquent, leur agglutination; lorsque, plus morbide, il a une légère teinte verdâtre;

2° Lorsque le Lait s'étend mal, lentement et inégalement entre les deux lames de verre;

3° Lorsque l'ammoniaque le coagule plus ou moins en gelée;

4° Lorsque les globules, vus au microscope, sont plus ou moins altérés dans leur sphéricité, ridés ou flétris à leur surface, probablement visqueux, et qu'ils tendent à s'agglutiner en masses irrégulières;

5° Lorsque, dans ce premier état, on voit une plus ou moins grande quantité de globules mûriformes blancs ou passés au vert olivâtre;

6° Lorsque ces globules morts et inodores tombent et s'agglutinent en masse charnue au fond d'un sérum clair et coloré en jaune roussâtre;

7° Lorsque enfin ces globules morts et inodores se décomposent en globulins punctiformes ou monadaires, qui, pour lors, se répandent également dans le sérum, et qui, *par l'effet de cette décomposition*, exhalent l'odeur la plus fétide.

Du mal qui est résulté de cette épizootie.

1° La publicité, peut-être trop empressée, donnée à une chose que l'on ne connaissait pas encore, et qui, avant tout, aurait dû être étudiée à huis clos par des personnes capables de la juger;

2° Le mal réel qui est résulté de l'abandon brusque du Lait chez les personnes faibles habituées à ce régime, telles que les malades, les enfants et les vieillards;

3° Des pertes occasionnées au commerce du Lait pendant la durée de l'épizootie;

4° De la petite quantité de bon Lait fourni par les vaches malades pendant l'épidémie, et de la nécessité d'y ajouter de l'eau pour subvenir à la consommation accoutumée de la ville de Paris;

5° La perte de quelques vaches, parmi celles, *seulement*, tenues les pieds dans le fumier humide, miasmatique, et privées d'air dans d'étroites et mauvaises étables.

EXPLICATION DES FIGURES

CONTENUES DANS LA PLANCHE.

Observation. Toutes ces figures ont été exécutées d'après nature, à l'aide du grossissement microscopique de 280 fois.

Fig. 1. Globules petits, moyens et gros du Lait naturel, vif et de bonne qualité. Pendant leur premier développement les globules laiteux sont pleins. Ce n'est que plus tard, qu'en continuant de croître et d'atteindre leur diamètre naturel, le 100^e de millimètre, que les deux enveloppes dont se compose le globule laiteux, s'étendent et rendent par ce moyen le globule vésiculaire. Ce n'est qu'à cette époque que la paroi interne de la vésicule intérieure sécrète peu à peu l'huile butyreuse qui finit par la remplir entièrement. Plus tard encore, cette même paroi donne naissance à un grand nombre de globulins très-ténus, de grosseurs variables. Ces globulins, lorsque cela n'est pas la vésicule interne elle-même, croissent un peu, et puis germent et végètent en *Penicillium glaucum*.

Comme on le voit, l'eau séreuse du Lait ne contient, ne nourrit qu'une sorte de globules, mais dont les uns, trop jeunes ou avortés, sont encore pleins, tandis que les autres, plus âgés et devenus vésiculeux, se sont plus ou moins remplis d'huile butyreuse, par sécrétion.

Tout aussi bien que le globule sanguin, le globule laiteux jouit de tous les attributs de la vie organique. La collection des globules offre le caractère de toutes les collections composées d'un grand nombre d'individus de la même espèce, c'est-à-dire, qu'il y en a de très-petits, d'intermédiaires et de ceux qui ont achevé la croissance déterminée pour l'espèce. Tant qu'ils sont sains, ils conservent l'isolement, ils ne se collent les uns aux autres que lorsque la vie les abandonne. La vie dont ils jouissent est comparable à celle dont jouit isolément l'une des vésicules d'un tissu cellulaire végétal. C'est l'organisation et la vie au degré le plus simple. Pour qu'il y ait production d'huile butyreuse, ou beurre, il faut qu'il y ait bris de l'enveloppe.

Fig. 2. Globules de Lait, extrait par le trayon pustuleux d'une vache atteinte de la Cocote. *aa* globules pleins, non encore butyreux, de diverses grosseurs, non altérés. *bbb* globules achevés, vésiculeux, et s'étant, par sécrétion, remplis d'huile butyreuse. *cc* globules morts, ridés par contraction. *eee* globules morts ayant pris un peu plus de développement, devenus d'un vert olivâtre et ayant produit intérieurement des globulins, ce qui leur donne l'aspect mamelonné d'une petite mûre. *ddd* globules malades ou morts, devenus visqueux et agglutinés en masses de formes et de grandeurs diverses par l'effet de cette viscosité, qui annonce toujours l'état plus ou moins morbide du globule laiteux.

Fig. 3. Ces deux lignes parallèles indiquent arbitrairement $\frac{1}{100}$ de millimètre. Sur cette distance, on a placé une lignée progressive, composée de globules de lait en divers états. *a* trois globules pleins non encore butyreux. *b* deux globules vésiculisés et contenant de l'huile butyreuse. *c* un globule mort et ridé. *d* un globule mort, accru au delà du 100^{e}, ayant produit dans son intérieur un grand nombre de globulins et ayant pris la teinte vert olivâtre.

Fig. 4. Globules provenant d'un lait très-morbide. Ce lait, produit par le trayon pustuleux d'une vache très-affectée de la Cocote, avait un aspect verdâtre et une densité gluante. Parmi des globules punctiformes et de toutes grosseurs jusqu'au 100^{e} de millimètre, on en voyait un grand nombre d'autres qui étaient plus gros, d'un vert olivâtre, remplis de globulins inégaux; ce qui leur donnait l'apparence d'une petite mûre. *aaa* globules flétris, non encore verts, mais commençant à devenir globulineux. *bbb* globules vert olive, mûriformes et globulineux. *c idem* agglutinés. *d* matière colorante du sang extravasée dans ce lait morbide.

Fig. 5. Deux lignes marquant arbitrairement $\frac{1}{100}$ de millimètre. *a* progression croissante de quatre globules. *b* un globule dans lequel commence la globulination intérieure. *c idem* plus développé. *d* plus développé encore. On remarque l'inégalité de grosseur qui existe entre les globulins formés à l'intérieur de ces globules devenus maternels.

Fig. 6. Apparence du sérum coloré en jaune paille et surnageant les globules morts d'un fort mauvais lait, quoique inodore.

Fig. 7. Globules morts, flétris, mûriformes, comme dentelés sur leurs bords, globulineux intérieurement, légèrement jaunâtres. *aa* globules agglutinés. *bb* globules plus gros, ridés ou flétris. *c idem* vomissant à l'extérieur la vésicule interne.

Fig. 8. Lignée progressive des mêmes globules, dont les deux derniers n'offrent plus la forme sphérique.

Fig. 9. Apparence d'un lait horriblement fétide.

Fig. 10. Ce lait, vu au microscope, n'offre plus guère qu'un champ de destruction. Tous les globules laiteux, morts et passés par tous les états précédents, sont presque tous décomposés en globulins punctiformes et grouillants, lesquels globulins proviennent, tout à la fois, de ceux qui étaient contenus dans le globule laiteux et de ceux moins apparents qui constituaient l'enveloppe du globule. *aa* globules morts, mais non encore décomposés en globulins. *b* globulins résultant de la destruction des globules laiteux.

Observation. Un fait très-remarquable et d'une application générale à tous les tisssus organiques, c'est que tant que les organes élémentaires, quoique morts, restent intacts dans leur organisation, ils sont inodores, et que ce n'est qu'au moment de leur destruction que l'odeur fétide se fait sentir.

Fig. 11. Lait floconneux ou filamenteux vu à l'œil nu.

Fig. 12. Le même vu au microscope. Ce lait, extrêmement curieux dans son organisation filamenteuse, sortait tout formé des voies lactées d'une vache malade d'une autre affection que celle de la Cocote. Il se composait de l'assemblage d'un grand nombre de globules laiteux, morts, de diverses grosseurs, et d'un aussi grand nombre de tigellules flexueuses, de diamètres différents, les unes simples et les autres rameuses. Toutes étaient incolores, transparentes et d'une seule venue, c'est-à-dire, sans cloisons ni articulations. *a* globules. *bbb idem* vomissant leur vésicule interne. *c* plusieurs globules fortement agglutinés et expulsant, chacun, leur vésicule interne. *dd* tigellules.

Fig. 13. Un 100^e de millimètre sur lequel on a placé une lignée progressive de globules morts. *a* quatre globules non encore flétris ou ridés, *b* un globule ridé. *c* deux globules vert olive et mûriformes. *d* deux autres globules vomissant leur vésicule interne.

Observation. Ce lait filamenteux, développé sous l'influence pathologique des tissus mammaires d'une vache malade, et encore contenu dans les voies lactées, confirme celui trouvé, dans des seins de femmes engorgés, par Vésale et Roderic à Castro.

Nous regrettons de n'avoir pu comprendre, dans la composition de notre planche, les analyses microscopiques des globules lymphatiques que nous avons recueillis dans les pustules, soit des pieds, soit des trayons, soit des aphthes de la muqueuse de la bouche, de même qu'une autre analyse également microscopique de globules laiteux vert olive et mûriformes provenant, par ouverture, d'un sein de femme engorgé, et très-analogues à ceux de la figure 4.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DES NOMBRES,

PRÉSENTÉ

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

LE 31 MAI 1830,

PAR M. AUGUSTIN CAUCHY.

AVERTISSEMENT DE L'AUTEUR.

Le mémoire qu'on va lire est l'un des deux que j'ai présentés à l'Académie des sciences le 31 mai 1830. Il renferme le développement des principes que j'avais établis dans les *Exercices de mathématiques*, et surtout dans le *Bulletin des sciences* de M. de Férussac, pour l'année 1829. (*) Mon ab-

(*) Voir le tome 12 de ce *Bulletin*, pages 205 et suivantes.

sence, qui s'est prolongée pendant huit années, ayant retardé l'impression de ce mémoire, je le publie aujourd'hui tel que je le retrouve dans le manuscrit présenté, le 31 mai 1830, à l'Académie des sciences, et paraphé à cette époque par le secrétaire perpétuel M. George Cuvier. Toutefois, pour ne pas fatiguer l'attention du lecteur, je supprimerai une grande partie des numéros placés devant les formules, et, pour éclaircir quelques passages, je joindrai au texte plusieurs notes placées, les unes au bas des pages, les autres à la suite du dernier paragraphe. Comme quelques notes de la première espèce existaient déjà dans le manuscrit, afin qu'on puisse facilement les distinguer des notes nouvelles, je marquerai celles-ci, quand elles seront placées au bas des pages, par un double astérisque.

SUR LA

THÉORIE DES NOMBRES.

§ I^er.

Soient

$$p = n\varpi + 1$$

un nombre premier, n un diviseur de $p - 1$, θ une racine primitive de

(1) $$x^p = 1,$$

τ une racine primitive de

(2) $$x^{p-1} = 1,$$

t une racine primitive de

(3) $$x^{p-1} \equiv 1, \pmod{p}.$$

Alors

$$\rho = \tau^{\varpi}$$

sera une racine primitive de

(4) $$x^n = 1,$$

et

$$r \equiv t^{\varpi}, \pmod{p}$$

une racine primitive de

(5) $$x^n \equiv 1, \pmod{p}.$$

On aura

(6) $$\tau^{\frac{n\varpi}{2}} = -1$$

(7) $$t^{\frac{n\varpi}{2}} \equiv -1, \pmod{p}$$

et de plus, si n est pair,

$$\rho^{\frac{n}{2}} = -1$$

$$r^{\frac{n}{2}} \equiv -1, \pmod{p}.$$

De plus, k étant un nombre entier quelconque, nous désignerons par

$$m = \mathrm{I}(k)$$

le nombre m propre à vérifier la formule

$$k \equiv t^m, \pmod{p}$$

en sorte qu'on aura

$$k^\varpi \equiv t^{m\varpi} \equiv r^m \equiv r^{\mathrm{I}(k)},$$

et nous poserons

$$\left[\frac{k}{p}\right] = \tau^{m\varpi} = \tau^{\varpi\mathrm{I}(k)} = \rho^{\mathrm{I}(k)}.$$

Par suite, comme on aura, en vertu de l'équation (7),

$$\mathrm{I}(-1) = \frac{n\varpi}{2},$$

on en conclura

$$\left[\frac{-1}{p}\right] = \rho^{\frac{n\varpi}{2}} = \tau^{\frac{n\varpi}{2}\varpi} = (-1)^\varpi.$$

On aura d'ailleurs évidemment

$$\left[\frac{h}{p}\right]\left[\frac{k}{p}\right]=\left[\frac{hk}{p}\right],\quad \left[\frac{h}{p}\right]^{l}=\left[\frac{h^{l}}{p}\right],\ \text{etc.}$$

Soient maintenant

(8) $$\Theta_h = \theta + \rho^{h}\theta' + \rho^{2h}\theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}},$$

et

(9) $$\Theta_h\Theta_k = R_{h,k}\Theta_{h+k}.$$

$R_{1,m}$ sera une fonction de ρ de la forme

$$R_{1,m} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1};$$

et, si l'on pose

$$k \equiv mh,\ (\text{mod. } n),$$

on aura, en supposant m différent de zéro et de $\frac{n}{2}$,

$$R_{h,mh} = a_0 + a_1\rho^{h} + a_2\rho^{2h} + \ldots + a_{n-1}\rho^{(n-1)h}$$

et

(10) $$R_{h,k} = (-1)^{\varpi(h+k)}\sum\left[\frac{u}{p}\right]^{h}\left[\frac{v}{p}\right]^{k},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières de u, v comprises entre les limites 1, $p-1$, et qui vérifieront l'équivalence

$$1 + u + v \equiv 0,\ (\text{mod. } p).$$

On aura d'ailleurs, en supposant h différent de zéro,

(11) $$\Theta_h\Theta_{-h} = (-1)^{\varpi h}p,\quad R_{h,-h} = -(-1)^{\varpi h}p;$$

et en supposant h, k, ainsi que $h+k$ non divisibles par n,

(12) $$R_{h,k}R_{-h,-k} = p.$$

On trouvera au contraire

(13) $$R_{h,0} = R_{0,h} = -1.$$

Enfin l'on aura

(14) $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = p - 2,$$

et, en supposant n pair,

(15) $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots - a_{n-1} = -(-1)^{\frac{\varpi n}{2}}.$$

Par suite, si l'on suppose

(16) $$R_{h,k} = F(\rho),$$

on trouvera

(17) $$F(\rho^m) = R_{mh,mk}, \quad \text{et} \quad F(\rho^m)F(\rho^{-m}) = p,$$

si le nombre m est tel qu'aucune des équations

(18) $$\rho^{mh} = 1, \quad \rho^{mk} = 1, \quad \rho^{m(h+k)} = 1$$

ne soit vérifiée. On aura au contraire

(19) $$F(\rho^m) = -(-1)^{\varpi mh \times \varpi mk}$$

si une seule des équations (18) est satisfaite, et

(20) $$F(\rho^m) = p - 2$$

si les trois équations (18) subsistent simultanément.

Soient encore h, k, l trois nombres entiers propres à vérifier la condition

(21) $$h + k + l \equiv 0, \text{ (mod. } n).$$

On aura, en supposant ces nombres tous trois différents de zéro,

$$\Theta_h\Theta_k\Theta_l = (-1)^{\varpi l}\frac{\Theta_h\Theta_k}{\Theta_{h+k}} = (-1)^{\varpi k}\frac{\Theta_h\Theta_l}{\Theta_{h+l}} = (-)1^{\varpi h}\frac{\Theta_k\Theta_l}{\Theta_{k+l}},$$

et par conséquent

(22) $$(-1)^{\varpi h} R_{k,l} = (-1)^{\varpi k} R_{l,h} = (-1)^{\varpi l} R_{h,k}.$$

Soit maintenant s une racine primitive de

(23) $$x^{n-1} \equiv 1, (\text{mod. } n),$$

le nombre n étant supposé premier, et faisons

(24) $$\Theta_1 \Theta_{s^2} \Theta_{s^4} \ldots \Theta_{s^{n-3}} = \mathcal{F}(\rho)^*;$$

on aura

(25) $$\Theta_s \Theta_{s^3} \Theta_{s^5} \ldots \Theta_{s^{n-2}} = \mathcal{F}(\rho^s),$$

et de plus

$$\mathcal{F}(\rho) = \mathcal{F}(\rho^{s^2}) = \mathcal{F}(\rho^{s^4}) = \ldots = \mathcal{F}(\rho^{s^{n-3}}),$$
$$\mathcal{F}(\rho^s) = \mathcal{F}(\rho^{s^3}) = \mathcal{F}(\rho^{s^5}) = \ldots = \mathcal{F}(\rho^{s^{n-2}}).$$

Donc $\mathcal{F}(\rho)$ sera de la forme

(26) $$\mathcal{F}(\rho) = c_0 + c_1 (\rho + \rho^{s^2} + \rho^{s^4} + \ldots + \rho^{s^{n-3}}) + c_2 (\rho^s + \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-2}}),$$

ou

$$\mathcal{F}(\rho) = \frac{2c_0 - c_1 - c_2}{2} + \frac{c_1 - c_2}{2} (\rho - \rho^s + \rho^{s^2} - \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-3}} - \rho^{s^{n-2}});$$

---

*Nota. s étant une racine primitive de la formule (23), on a

$$s^{n-1} - 1 \equiv 0, (\text{mod. } n), \quad \frac{s^{n-1} - 1}{s^2 - 1} = 1 + s^2 + s^4 + \ldots + s^{n-3} \equiv 0, (\text{mod. } n),$$

et c'est ce qui permet d'établir la formule (24) et, comme on aura

$$s^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } n)$$

$$\rho + \rho^{s} + \rho^{s^2} + \ldots + \rho^{s^{n-3}} + \rho^{s^{n-2}} = -1,$$

$$(\rho - \rho^{s} + \rho^{s^2} - \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-3}} - \rho^{s^{n-2}})^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

on trouvera

$$\mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = \left(\frac{2c_0 - c_1 - c_2}{2}\right)^2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \left(\frac{c_1 - c_2}{2}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27) \quad 4\mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = (2c_0 - c_1 - c_2)^2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\,(c_1 - c_2)^2$$

ou bien encore

$$(28)\ \mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = (c_0 - c_1)^2 + (c_0 - c_1)(c_1 - c_2) + \frac{1 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} n}{4}(c_1 - c_2)^2.$$

Lorsque n est de la forme $4x + 3$, l'équation (27) ou (28) se réduit à

$$(29) \qquad 4\mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = (2c_0 - c_1 - c_2)^2 + n(c_1 - c_2)^2,$$

ou bien à

$$(30)\ \mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = (c_0 - c_1)^2 + (c_0 - c_1)(c_1 - c_2) + \frac{n+1}{4}(c_1 - c_2)^2.$$

Au contraire, lorsque n est de la forme $4x + 1$, alors, $\frac{n-1}{2}$ étant pair, la formule (24) donne simplement

$$\mathfrak{F}(\rho) = p^{\frac{n-1}{4}}$$

et ρ disparaît de l'équation (26) qui se trouve réduite à la forme

$$\mathfrak{F}(\rho) = c_0.$$

Revenons au cas où n est de la forme $4x + 3$. Comme on aura

$$\mathfrak{F}(\rho)\,\mathfrak{F}(\rho^s) = p^{\frac{n-1}{2}},$$

l'équation (29) donnera

$$4p^{\frac{n-1}{2}} = (2c_0 - c_1 - c_2)^2 + n\,(c_1 - c_2)^2.$$

Donc on résoudra l'équation

(31) $$4p^{\frac{n-1}{2}} = X^2 + nY^2$$

en prenant

$$X = 2c_0 - c_1 - c_2, \quad Y = c_1 - c_2$$

Mais ces valeurs de X et de Y seront généralement divisibles par p. Il reste à trouver la plus haute puissance de p qui les divise simultanément.

Soit υ un nombre tel que l'on ait simultanément

$$\upsilon^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1; \quad \text{et} \quad (1+\upsilon)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod.}\, n).$$

On trouvera

$$\begin{aligned}\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\ldots\Theta_{s^{n-3}} &= \Theta_\upsilon\Theta_{\upsilon s^2}\ldots\Theta_{\upsilon s^{n-3}}\\ &= \Theta_{1+\upsilon}\Theta_{(1+\upsilon)s^2}\ldots\Theta_{(1+\upsilon)s^{n-3}} = \mathfrak{F}(\rho),\end{aligned}$$

et par suite

(32) $$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{F}(\rho) &= \frac{\Theta_1\Theta_\upsilon}{\Theta_{1+\upsilon}}\,\frac{\Theta_{s^2}\Theta_{\upsilon s^2}}{\Theta_{(1+\upsilon)s^2}}\ldots\frac{\Theta_{s^{n-3}}\Theta_{\upsilon s^{n-3}}}{\Theta_{(1+\upsilon)s^{n-3}}}\\ &= R_{1,\upsilon}\,R_{s^2,\upsilon s^2}\ldots R_{s^{n-3},\upsilon s^{n-3}},\end{aligned}\right.$$

(33) $$\mathfrak{F}(\rho^s) = R_{s,\upsilon s}\,R_{s^3,\upsilon s^3}\ldots R_{s^{n-2},\upsilon s^{n-2}}.$$

Si n est de la forme $8x + 7$, on pourra prendre $\upsilon = 1$, puisque l'on aura $2^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1$, et les formules (32), (33) donneront

$$(34) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(\rho) = R_{1,1} R_{s^2,s^2} \ldots R_{s^{n-3},s^{n-3}}, \\ \mathfrak{F}(\rho^s) = R_{s,s} R_{s^3,s^3} \ldots R_{s^{n-2},s^{n-2}}. \end{cases}$$

D'autre part, comme on aura

$$\mathfrak{F}(\rho) = c_0 + c_1(\rho + \rho^{s^2} + \ldots + \rho^{s^{n-3}}) + c_2(\rho^s + \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-2}}),$$
$$\mathfrak{F}(\rho^s) = c_0 + c_1(\rho^s + \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-2}}) + c_2(\rho + \rho^{s^2} + \ldots + \rho^{s^{n-3}}),$$

on en conclura

$$(35) \qquad \begin{cases} X = 2c_0 - c_1 - c_2 = \mathfrak{F}(\rho) + \mathfrak{F}(\rho^s), \\ Y = c_1 - c_2 = \dfrac{\mathfrak{F}(\rho) - \mathfrak{F}(\rho^s)}{\rho - \rho^s + \ldots + \rho^{s^{n-3}} - \rho^{s^{n-2}}} \\ \quad = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(\rho - \rho^s + \ldots - \rho^{s^{n-2}})[\mathfrak{F}(\rho) - \mathfrak{F}(\rho^s)]. \end{cases}$$

Soit maintenant

$$(36) \qquad \Pi_{h,k} = \frac{1.2.3\ldots[(h+k)\varpi]}{(1.2.3\ldots h\varpi)(1.2.3\ldots k\varpi)},$$

et supposons chacun des nombres h,k renfermé entre les limites o,n. On aura

$$(37) \qquad \Pi_{h,k} \equiv 0, \ (\text{mod. } p),$$

si la somme $h + k$ est renfermée entre les limites n et $2n$; et au contraire $\Pi_{h,k}$ ne sera point divisible par p, lorsque $h + k$ sera compris entre les limites o,n. D'un autre côté, en supposant

$$h + k < n, \quad \text{et} \quad n - h - k = l,$$

en sorte que la condition (21) soit vérifiée, on aura

$$1.2.3\ldots(n-1)\equiv[1.2.3\ldots(h+k)\varpi][(-1)(-2)\ldots(-l\varpi)]$$
$$\equiv[1.2.3\ldots(h+k)\varpi](-1)^{l\varpi}(1.2.3\ldots l\varpi)\equiv-1,$$

$$1.2.3\ldots(h+k)\varpi\equiv(-1)^{l\varpi+1}\frac{1}{1.2.3\ldots l\varpi},$$

et par conséquent

$$(38)\qquad \Pi_{h,k}\equiv\frac{(-1)^{l\varpi+1}}{(1.2\ldots h\varpi)(1.2\ldots k\varpi)(1.2\ldots l\varpi)}.$$

Enfin, si l'on pose comme ci-dessus

$$R_{h,k}=F(\rho),$$

on trouvera

$$(39)\qquad F(r)\equiv-\Pi_{n-h,\,n-k}.$$

Cela posé, soit p^λ la plus haute puissance de p qui puisse diviser simultanément X et Y. On aura, en vertu des formules (35),

$$(40)\quad\begin{cases}\dfrac{X}{p^\lambda}=\dfrac{\mathcal{F}(\rho)}{p^\lambda}+\dfrac{\mathcal{F}(\rho^s)}{p^\lambda},\\[2mm] \dfrac{Y}{p^\lambda}=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n(\rho-\rho^s+\rho^{s^2}-\ldots+\rho^{s^{n-3}}-\rho^{s^{n-2}})\left[\dfrac{\mathcal{F}(\rho)}{p^\lambda}-\dfrac{\mathcal{F}(\rho^s)}{p^\lambda}\right];\end{cases}$$

et, comme les seconds membres des formules (40) seront des fonctions symétriques de $\rho, \rho^2, \ldots \rho^{n-1}$, ils devront rester équivalents, suivant le module p, à $\frac{X}{p^\lambda}$, et à $\frac{Y}{p^\lambda}$, quand on y remplacera ρ par r. Donc alors l'un et l'autre seront entiers; et l'un d'eux au moins sera non divisible par p. D'ailleurs, si, dans les seconds membres des formules (34), on remplace $R_{h,h}$ par $\frac{p}{R_{-h,-h}}$, toutes les fois que l'indice h est équivalent suivant le module n à l'un des nombres $1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2}$, on en conclura

$$(41)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(\rho) = p^{\nu'}\varphi(\rho), \\ \mathfrak{F}(\rho^s) = p^{\frac{n-1}{2}-\nu'}\chi(\rho) = p^{\nu''}\chi(\rho), \end{cases}$$

ν' étant le nombre de ceux des indices

$$1, s^2, s^4, \ldots s^{n-3}$$

qui sont équivalents suivant le module n à l'un des suivants

$$(42)\qquad 1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2},$$

et ν'' étant déterminé par la formule

$$\nu' + \nu'' = \frac{n-1}{2},$$

tandis que $\varphi(r)$, $\chi(r)$ ne seront équivalents ni à zéro, ni à $\frac{1}{0}$ suivant le module p. Donc, si l'on prend pour λ le plus petit des nombres ν' et ν'', les seconds membres des formules (40), quand on y remplacera ρ par r, ne deviendront point équivalents à l'infini suivant le module p, et l'un d'eux au plus sera équivalent à zéro. Donc λ sera l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise simultanément X et Y. D'ailleurs, si l'on fait

$$X = p^\lambda x, \quad Y = p^\lambda y,$$

la formule (31) donnera

$$(43)\qquad 4p^{\frac{n-1}{2}-2\lambda} = x^2 + ny^2,$$

et, comme on trouvera, en posant $\lambda = \nu'$,

$$\frac{n-1}{2} - 2\lambda = \frac{n-1-4\nu'}{2},$$

et, en posant $\lambda = \frac{n-1}{2} - \nu'$,

$$\frac{n-1}{2} - 2\lambda = \frac{4\nu' - (n-1)}{2},$$

il est clair que la formule (43) pourra être réduite à

(44) $$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

la valeur de μ étant

(45) $$\mu = \pm\left(\frac{4\nu' - n + 1}{2}\right).$$

Si n était de la forme $8x + 3$, on aurait $2^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1$, (mod. p) .

$$\Theta_2\Theta_{2s^2}\ldots\Theta_{2s^{n-3}} = \Theta_s\Theta_{s^3}\ldots\Theta_{s^{n-2}} = \mathfrak{F}(\rho^s),$$

$$R_{1,1}R_{s^2,s^2}\ldots\ldots R_{s^{n-3},s^{n-3}} = \frac{\Theta_1^{\,2}}{\Theta_2}\,\frac{\Theta^2_{s^2}}{\Theta_{2s^2}}\cdots\frac{\Theta^2_{s^{n-3}}}{\Theta_{2s^{n-3}}} = \frac{[\mathfrak{F}(\rho)]^2}{\mathfrak{F}(\rho^s)},$$

$$R_{s,s}R_{s^3,s^3}\ldots\ldots R_{s^{n-2},s^{n-2}} = \frac{[\mathfrak{F}(\rho^s)]^2}{\mathfrak{F}(\rho)}.$$

Donc alors, en ayant égard aux formules (41), on trouverait

$$\frac{[\mathfrak{F}(\rho)]^2}{\mathfrak{F}(\rho^s)} = p^{\nu'}\varphi(\rho),$$

$$\frac{[\mathfrak{F}(\rho^s)]^2}{\mathfrak{F}(\rho)} = p^{\nu''}\chi(\rho) = p^{\frac{n-1}{2}-\nu'}\chi(\rho);$$

puis on en conclurait

(46) $$\left\{\begin{array}{l} [\mathfrak{F}(\rho)]^3 = p^{\frac{n-1}{2}+\nu'}[\varphi(\rho)]^2\chi(\rho), \\ [\mathfrak{F}(\rho^s)]^3 = p^{n-1-\nu'}\varphi(\rho)[\chi(\rho)]^2. \end{array}\right.$$

Donc alors on devra prendre pour λ le plus petit des deux nombres

$$\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{2}+\nu'\right), \quad \frac{1}{3}(n-1-\nu'),$$

en sorte qu'on aura

$$\frac{n-1}{2}-2\lambda=\pm\frac{n-1-4\nu'}{6}.$$

Donc alors on vérifiera l'équation

$$4p^{\mu}=x^2+ny^2 \tag{47}$$

en nombres entiers, si l'on pose

$$\mu=\pm\frac{4\nu'-(n-1)}{6}. \tag{48}$$

Dans les formules (45) et (48), μ est toujours inférieur à $\frac{1}{2}n$, et ν' représente le nombre de ceux des indices (42) qui sont racines de l'équivalence

$$x^{\frac{n-1}{2}}\equiv 1, (\text{mod. } n)$$

Les autres étant nécessairement racines de l'équivalence

$$x^{\frac{n-1}{2}}\equiv -1, (\text{mod. } n),$$

on en conclut

$$1^{\frac{n-1}{2}}+2^{\frac{n-1}{2}}+3^{\frac{n-1}{2}}+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\equiv\nu'-\left(\frac{n-1}{2}-\nu'\right)\equiv\frac{4\nu'-(n-1)}{2}, (\text{mod.} n) \tag{49}$$

On a d'ailleurs

$$1+e^{z\sqrt{-1}}+e^{2z\sqrt{-1}}+\ldots+e^{\frac{n-1}{2}z\sqrt{-1}}=\frac{1-e^{\frac{n+1}{2}z\sqrt{-1}}}{1-e^{z\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2}z\sqrt{-1}}-e^{\frac{n}{2}z\sqrt{-1}}}{e^{-\frac{1}{2}z\sqrt{-1}}-e^{\frac{1}{2}z\sqrt{-1}}},$$

et par suite

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned}
&1+\cos z+\cos 2z+\ldots+\cos\frac{n-1}{2}z=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sin\frac{n}{2}z}{\sin\frac{1}{2}z}\right),\\
&\sin z+\sin 2z+\ldots+\sin\frac{n-1}{2}z=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{z}{2}-\frac{\cos\frac{n}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\right)\\
&\qquad=\frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{z}{2}-\cos\frac{n}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Si, $n-1$ étant impair, on différencie $\frac{n-1}{2}$ fois par rapport à z la première des équations (50), on en tirera

$$(-1)^{\frac{n+1}{4}}\left[\sin z+2^{\frac{n-1}{2}}\sin 2z+3^{\frac{n-1}{2}}\sin 3z+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{n-1}{2}z\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dz^{\frac{n-1}{2}}}\,\frac{\sin\frac{n}{2}z}{\sin\frac{1}{2}z},$$

tandis que la seconde donnera

$$(-1)^{\frac{n-3}{4}}\left[\cos z + 2^{\frac{n-1}{2}}\cos 2z + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n-1}{2}z\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{d^{\frac{n-1}{2}}\left(\cot\frac{z}{2} - \dfrac{\cos\frac{n}{2}z}{\sin\frac{z}{2}}\right)}{dz^{\frac{n-1}{2}}}.$$

On conclura de cette dernière, en posant $z = 0$, après les différenciations,

$$(51)\qquad (-1)^{\frac{n-3}{4}}\left[1 + 2^{\frac{n-1}{2}} + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right] \equiv \frac{d^{\frac{n-1}{2}}\left(\cot\frac{z}{2} - \operatorname{cosec}\frac{z}{2}\right)}{dz^{\frac{n-1}{2}}},$$
$$(\text{mod. } n).$$

D'autre part, si l'on désigne par $\mathcal{B}_n$ le nombre de Bernoulli qui correspond à l'indice n, en sorte qu'on ait

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{6},\quad \mathcal{B}_2 = \frac{1}{30},\quad \mathcal{B}_3 = \frac{1}{42},\quad \text{etc.}$$

on trouvera

$$\operatorname{tang}\frac{z}{2} =$$
$$2\left[\frac{1}{6}(2^2-1)\frac{z}{1.2} + \frac{1}{30}(2^4-1)\frac{z^3}{1.2.3.4} + \frac{1}{42}(2^6-1)\frac{z^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right],$$

et l'équation (51) pourra être réduite à

$$1 + 2^{\frac{n-1}{2}} + 3^{\frac{n-1}{2}} + \ldots + \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n+1}{4}}\,\frac{1}{2}\,\frac{d^{\frac{n-1}{2}}\operatorname{tang}\frac{z}{4}}{dz^{\frac{n-1}{2}}}.$$

On aura donc par suite, en supposant $\frac{n-1}{2}$ impair, ou n de la forme $4x+3$

$$(52)\quad\begin{cases} 1+2^{\frac{n-1}{2}}+3^{\frac{n-1}{2}}+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}=(-1)^{\frac{n+1}{4}}\,2\,\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}-1}{2^{\frac{n-1}{2}}(n+1)}\,\mathcal{B}_{\frac{n+1}{4}} \\ \qquad =(-1)^{\frac{n+1}{4}}\,\dfrac{2\left(2^{\frac{n+1}{2}}-1\right)}{2^{\frac{n-1}{2}}}\,\mathcal{B}_{\frac{n+1}{4}}. \end{cases}$$

Enfin, comme on trouvera 1° en supposant n de la forme $8x+7$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\equiv 1, (\text{mod. } n)$$

2° en supposant n de la forme $8x+3$

$$2^{\frac{n-1}{2}}\equiv -1, (\text{mod. } n)$$

l'équation (52) donnera dans le premier cas

$$1+2^{\frac{n-1}{2}}+3^{\frac{n-1}{2}}+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\equiv(-1)^{\frac{n+1}{4}}\,2\mathcal{B}_{\frac{n+1}{4}},$$

et dans le second cas

$$1+2^{\frac{n-1}{2}}+3^{\frac{n-1}{2}}+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\equiv-(-1)^{\frac{n+1}{4}}\,6\mathcal{B}_{\frac{n+1}{4}}.$$

On aura donc, 1° en supposant n de la forme $8x+7$,

$$\pm\mu\equiv\frac{4\nu-(n-1)}{2}\equiv(-1)^{\frac{n+1}{4}}\,2\mathcal{B}_{\frac{n+1}{4}}, (\text{mod. } n),$$

2° en supposant n de la forme $8x + 3$

$$\pm \mu = \frac{4\nu' - (n-1)}{6} = -(-1)^{\frac{n+1}{4}} 2\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}}.$$

Par conséquent on aura, dans tous les cas,

$$\mu = \pm 2\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}}. \tag{53}$$

On pourra donc vérifier l'équation (47), en prenant pour μ le plus petit nombre entier équivalent à

$$\pm 2\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}}.$$

Exemples. Soit $n = 7$. On trouvera

$$2\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}} \equiv 2\mathcal{A}_2 \equiv \frac{2}{30} \equiv \frac{1}{15} \equiv 1, \text{ (mod. 7)}$$

$$\mu = 1.$$

On vérifiera donc alors en nombres entiers l'équation

$$4p = x^2 + 7y^2$$

et par conséquent l'équation

$$p = x^2 + 7y^2.$$

Soit encore $n = 11$. On trouvera

$$2\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}} \equiv 2\mathcal{A}_3 \equiv \frac{2}{42} \equiv \frac{1}{21} \equiv -1, \text{ (mod. 11)}$$

$$\mu = 1,$$

et par conséquent on pourra vérifier en nombres entiers l'équation

$$4p^2 = x^2 + 11y^2.$$

Soit $n = 163$. 2 sera une racine primitive de l'équation

$$x^{81} \equiv 1,$$

en sorte qu'on pourra supposer

$$s^2 = 2.$$

D'ailleurs, les puissances successives de 2, divisées par 163, donneront pour restes

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, -35, -70, 23, 46, 92, 21, 42, -79, 5, 10, 20, 40, 80, -3,
-6, -12, -24, -48, 67, -29, -58, -47, -69, 25, 50, -63, 37, 74, -15, -30, -60, 43, 86, 9,
18, 36, 72, -19, -38, -76, 11, 22, 44, 88, 13, 26, 52, -59, 45, 73, -17, -34, -68, -27,
-54, 55, -53, 57, -49, 65, -33, -66, 31, 62, -39, -78, 7, 14, 28, 56, -51, 61, -41, 81.

Les restes positifs, et inférieurs à $\frac{168}{2} = 81,5$ étant au nombre de 48, on aura

$$\nu = 48, \quad \frac{n-1}{2} = 81,$$

$$\mu = \pm \frac{4\nu - (n-1)}{6} = \pm \frac{1}{3}\left(2\nu - \frac{n-1}{2}\right) = \pm \frac{1}{3}(96 - 81) = \pm 5,$$

$$\mu = 5.$$

On pourra donc satisfaire par des valeurs entières de x, y à l'équation

$$p^5 = x^2 + 163y^2.$$

Revenons aux formules (10) et (16) desquelles on tire

$$(54) \qquad R_{h,k} = F(\rho) = (-1)^{\varpi(h+k)} \Sigma \left[\frac{u}{p}\right]^h \left[\frac{v}{p}\right]^k$$
$$= (-1)^{\varpi h} \Sigma \left[\frac{t^m}{p}\right]^h \left[\frac{1+t^m}{p}\right]^k.$$

Si l'on y remplace ρ par r, on trouvera

$$(55)\quad F(r) \equiv (-1)^{\varpi h} \Sigma t^{m\varpi h}(1+t^m)^{\varpi k}$$
$$\equiv (-1)^{\varpi h} \frac{1.2.3\ldots k\varpi}{[1.2.3\ldots(n-h)\varpi][1.2.\text{—}(h+k-n)\varpi]} n\varpi, (\text{mod}.p);$$

et, comme on a

$$n\varpi \equiv -1, \quad 1.2.3\ldots k\varpi \equiv \frac{(-1)^{k\varpi+1}}{1.2.3\ldots(n-k)\varpi},$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(h+k-n)\varpi} \equiv (-1)^{(h+k)\varpi+l}\, 1.2.3\ldots(2n-h-k)\varpi,$$

on conclura de la formule (55)

$$(56)\quad F(r) \equiv -\frac{1.2.3\ldots(2n-h-k)\varpi}{[1.2.3\ldots(n-h)\varpi]\,[1.2.3\ldots(n-k)\varpi]} = -\Pi_{n-h,\,n-k};$$

ce qui s'accorde avec la formule (39).

Si, dans l'équation (39) ou (56) on remet pour $\Pi_{n-h,\,n-k}$ sa valeur tirée de l'équation (38), savoir,

$$\Pi_{n-h,\,n-k} \equiv -\frac{(-1)^{l\varpi}}{[1.2.3\ldots(n-h)\varpi]\,[1.2.3\ldots(n-k)\varpi]\,[1.2.3\ldots(n-l)\varpi]}$$
$$\equiv (1.2.3\ldots h\varpi)\,(1.2.3\ldots k\varpi)\,(1.2.3\ldots l\varpi)\,(-1)^{l\varpi+1}$$

on trouvera

$$(57)\quad F(r) \equiv (-1)^{l\varpi}\,(1.2.3\ldots h\varpi)\,(1.2.3\ldots k\varpi)\,(1.2.3\ldots l\varpi)$$
$$\equiv (-1)^{(h+k)\varpi}(1.2.3\ldots h\varpi)(1.2.3\ldots k\varpi)(1.2.3\ldots(n-h-k)\varpi), (\text{mod}.p)$$

Il est facile de trouver des nombres équivalents, suivant le module p, aux valeurs de x, y qui vérifient la formule (44) ou (47). En effet, soit toujours p^λ la plus haute puissance de p qui divise simultanément X et Y; on aura

$$(58)\qquad x = \frac{X}{p^\lambda} = \frac{\mathfrak{F}(\rho)}{p^\lambda} + \frac{\mathfrak{F}(\rho^s)}{p^\lambda} \equiv \frac{\mathfrak{F}(r)}{p^\lambda} + \frac{\mathfrak{F}(r^s)}{p^\lambda}, (\text{mod}.\, p)$$

$$(59)\quad y = \frac{Y}{p^\lambda} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(\rho - \rho^s + \ldots - \rho^{s^{n-2}})\left[\frac{\mathfrak{F}(\rho)}{p^\lambda} - \frac{\mathfrak{F}(\rho^s)}{p^\lambda}\right]$$
$$\equiv (-1)^{\frac{n-1}{2}} n(r - r^s + \ldots - r^{s^{n-1}})\left[\frac{\mathfrak{F}(r)}{p^\lambda} - \frac{\mathfrak{F}(r^s)}{p^\lambda}\right], (\text{mod}.p).$$

D'ailleurs, on déduira sans peine des formules (32) et (33) les valeurs des rapports

$$\frac{\mathfrak{F}(r)}{p^{\lambda}},\quad \frac{\mathfrak{F}(r')}{p^{\lambda}},$$

ou plutôt la valeur de celui qui n'est pas divisible par p. En effet, on y parviendra facilement en remplaçant chaque facteur de la forme

$$R_{h,k}$$

par $\frac{p}{R_{n-h,\,n-k}}$, toutes les fois que $h+k$ sera renfermé entre les limites o, n, et remplaçant ensuite ρ par r.

§ II.

Applications nouvelles des formules établies dans le premier paragraphe.

Supposons maintenant que n soit un nombre composé, et prenons

$$n = \omega\nu,$$

ν désignant un facteur premier de n. Soit encore

$$\omega\varpi = \psi$$

On aura

$$p - 1 = n\varpi = \nu\psi.$$

De plus, si l'on désigne par ς une racine primitive de

$$x^{\nu} = 1,$$

et par α une racine primitive de

$$x^{\omega} = 1,$$

on pourra prendre

$$\rho = \alpha\varsigma.$$

Cela posé, soit s une racine primitive de l'équivalence

$$x^{\nu} \equiv 1, \ (\text{mod. } p)$$

et u une racine primitive de l'équivalence

$$x^{\nu-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu).$$

Les nombres entiers

$$1, 2, 3, \ldots n-2, \ n-1$$

seront équivalents, suivant le module n, aux divers termes de la suite

$$1, u, \ldots u^{\nu-2}, \nu+1, \nu+u, \ldots \nu+u^{\nu-2}, \ldots (\omega-1)\nu+1, (\omega-1)\nu+u, \ldots (\omega-1)\nu+u^{\nu-2};$$

et l'on aura

$$\begin{aligned}\Theta_h &= \theta + \rho^h \theta^t + \rho^{2h}\theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}} \\ &= \theta + \alpha^h \varsigma^h \theta^t + \alpha^{2h}\varsigma^{2h}\theta^{t^2} + \ldots + \alpha^{(p-2)h}\varsigma^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}}.\end{aligned}$$

Supposons d'ailleurs les nombres ν, ω premiers entre eux, et faisons

$$v \equiv \frac{1}{\nu}, \quad (\text{mod. } \omega);$$

on trouvera

$$\alpha^{u^m + v\nu(1-u^m)} = \alpha, \quad \varsigma^{u^m + v\nu(1-u^m)} = \varsigma^{u^m},$$

$$\Theta_{u^m + v\nu(1-u^m)} = \theta + \alpha\varsigma^{u^m}\theta^t + \alpha^2\varsigma^{2u^m}\theta^{t^2} + \ldots + \alpha^{p-2}\varsigma^{(p-2)u^m}\theta^{t^{p-2}},$$

et, si l'on pose

$$(1) \qquad \Theta_1 \Theta_{u^2 + v\nu(1-u^2)} \ldots \Theta_{u^{\nu-3} + v\nu(1-u^{\nu-3})} = \mathcal{F}(\alpha, \varsigma)\, \Theta_{v\nu\frac{\nu-1}{2}},$$

on aura encore

$$(2)\qquad \Theta_{u^m+v\nu(h-u^m)} = \Theta_{u^m+v\nu(h+\omega k-u^m)} = \theta + \alpha^h \varsigma^{u^m} \theta^t + \ldots \alpha^{(p-2)h} \varsigma^{(p-2)u^m} \theta^{t^{p-2}}.$$

$$(3)\qquad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^{u^{\nu-3}}),$$

et, en supposant h impair,

$$(4)\qquad \Theta_{1+v\nu(h-1)}\,\Theta_{u^2+v\nu(h-u^2)} \ldots \Theta_{u^{\nu-3}+v\nu(h-u^{\nu-3})} = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)\,\Theta_{v\nu\frac{\nu-1}{2}h},$$

$$(5)\qquad \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^{\nu-3}}),$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \Theta_{-1-v\nu(h-1)}\,\Theta_{-u^2-v\nu(h-u^2)} \ldots \Theta_{-u^{\nu-3}-v\nu(h-u^{\nu-3})} \\ \qquad = \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-1})\,\Theta_{-v\nu\frac{\nu-1}{2}h}, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-1}) = \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-u^2}) = \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-u^{\nu-3}}) = \mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{u^{\frac{\nu-1}{2}}}),$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-1}) = \\ \dfrac{\Theta_{1+v\nu(h-1)}\,\Theta_{-1-v\nu(h-1)} \ldots \Theta_{u^{\nu-3}+v\nu(h-u^{\nu-3})}\,\Theta_{-u^{\nu-3}-v\nu(h-u^{\nu-3})}}{\Theta_{v\nu\frac{\nu-1}{2}h}\,\Theta_{-v\nu\frac{\nu-1}{2}h}}. \end{cases}$$

Le second membre de la formule (8) se réduit toujours, soit à

$$\pm p^{\frac{n-1}{2}},$$

soit à

$$\pm p^{\frac{n-3}{2}}.$$

Exemple. Supposons, pour fixer les idées $\omega = 4$. Si ν est impair et de la forme $4x + 1$, on pourra prendre

$$v = 1.$$

Par suite la formule (8) donnera

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-1}) \\ &= \frac{\Theta_{1+\nu(h-1)}\,\Theta_{-1-\nu(h-1)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}+\nu(h-u^{\nu-3})}\,\Theta_{-u^{\nu-3}-\nu(h-u^{\nu-3})}}{\Theta_{\nu\frac{\nu-1}{2}h}\;\Theta_{-\nu\frac{\nu-1}{2}h}}. \end{aligned} \right.$$

D'ailleurs, si l'on suppose h impair, ainsi que $\frac{\nu-1}{4}$, on trouvera

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Theta_{1+\nu(h-1)}\,\Theta_{-1-\nu(h-1)} = (-1)^{\varpi\nu h}p = (-1)^{\varpi}p, \\ &\Theta_{u^2+\nu(h-u^2)}\Theta_{-u^2-\nu(h-u^2)} = (-1)^{\varpi\nu h}p = (-1)^{\varpi}p, \\ &\text{etc.....} \\ &\Theta_{\nu\frac{\nu-1}{2}h}\,\Theta_{-\nu\frac{\nu-1}{2}h} = (-1)^{\varpi\frac{\nu-1}{2}} = 1. \end{aligned} \right.$$

Donc la formule (9) donnera, pour des valeurs impaires de h,

$$(11)\qquad \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-h},\varsigma^{-1}) = p^{\frac{\nu-3}{2}}.$$

On trouvera en particulier

$$(12)\qquad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^{-1}) = p^{\frac{\nu-3}{2}}.$$

D'autre part, α devant être une racine primitive de

$$x^4 = 1,$$

on pourra prendre

$$\alpha = \sqrt{-1}.$$

Ajoutons que l'on tirera de l'équation (4)

$$(13)\quad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma) = \frac{\Theta_1\Theta_{u^2+\nu(1-u^2)}\,\Theta_{u^4+\nu(1-u^4)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}.$$

Supposons maintenant

$$\nu = 5 \quad \text{ou} \quad n = 4.5 = 20.$$

Les formules (12) et (13) donneront

$$(14)\qquad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^{-1}) = p,$$

$$(15)\qquad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma) = \frac{\Theta_1\Theta_{u^2+5(1-u^2)}}{\Theta_{10}},$$

u étant une racine primitive de

$$x^4 \equiv 1, \text{ (mod. 5)};$$

et par conséquent [à cause de $u^2 \equiv -1$, (mod. 5)],

$$(16)\qquad \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma) = \frac{\Theta_1\Theta_{-11}}{\Theta_{10}} = \frac{\Theta_1\Theta_9}{\Theta_{10}} = R_{1,9},$$

$$(17)\qquad \mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^{-1}) = R_{-1,-9} = R_{19,11}.$$

Donc

$$R_{1,9}\,R_{19,11} = p.$$

De plus, l'équation (4) donnera

$$(18)\qquad \mathfrak{F}(\alpha^3,\varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma) = \frac{\Theta_{11}\Theta_{19}}{\Theta_{30}} = R_{11,19} = \mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^{-1}).$$

Donc la formule (14) pourra être réduite à

$$p = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma).$$

On trouvera de même, en remplaçant ς par ς^3 et α par $\alpha^3 = \alpha^{-1}$,

$$p = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^3)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^3);$$

et l'on tirera des formules (16), (17), (18)

$$\mathfrak{F}(\alpha^3,\varsigma^3) = \mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^3) = R_{3,27} = R_{3,7},$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^{-3},\varsigma^3) = \mathfrak{F}(\alpha^{-3},\varsigma^{-3}) = R_{57,33} = R_{17,13} = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^3),$$

en sorte qu'on aura encore

$$R_{3,7}\,R_{17,13}=p.$$

On trouvera donc, en définitive

$$\begin{aligned} p^2 &= R_{1,9}\,R_{17,13}\times R_{19,11}\,R_{3,7} \\ &= \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^3)\times\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^3)\,; \end{aligned}$$

et comme, en posant

$$2\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)=\lambda'+\mu'\sqrt{-1}+(\lambda''+\mu''\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^2+\varsigma^3-\varsigma^4),$$

on en conclura

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^3) &= \lambda'+\mu'\sqrt{-1}-(\lambda''+\mu''\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4), \\ 2\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma) &= \lambda'-\mu'\sqrt{-1}+(\lambda''-\mu''\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4), \\ 2\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^3) &= \lambda'-\mu'\sqrt{-1}-(\lambda''-\mu''\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4), \end{aligned}$$

on trouvera encore

$$\begin{aligned} 4p &= 4\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma)=4\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^3)\,\mathfrak{F}(\alpha^{-1},\varsigma^3) \\ &= [\lambda'+\lambda''(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)]^2+[\mu'+\mu''(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)]^2 \\ &= [\lambda'-\lambda''(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)]^2+[\mu'-\mu''(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)]^2, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(19)\qquad 4p=\lambda'^2+\mu'^2+5(\lambda''^2+\mu''^2),\quad \lambda'\lambda''=-\mu'\mu''.$$

D'autre part, si l'on nomme s et a les racines primitives des équivalences

$$(20)\qquad x^5\equiv 1,\quad x^4\equiv 1,\ (\text{mod.}\ p),$$

on aura, pour déterminer λ, μ, λ', μ', les formules

$$\begin{aligned} \lambda'+\mu' a+(\lambda''+\mu'' a)(s-s^2-s^3+s^4) &\equiv 2\mathfrak{F}(a,s)\equiv-2\Pi_{19,11}\equiv 0,\ (\text{mod.}\ p) \\ \lambda'+\mu' a-(\lambda''+\mu'' a)(s-s^2-s^3+s^4) &\equiv 2\mathfrak{F}(a,s^3)\equiv-2\Pi_{3,7}, \\ \lambda'-\mu' a+(\lambda''+\mu'' a)(s-s^2-s^3+s^4) &\equiv 2\mathfrak{F}(a^{-1},s)\equiv-2\Pi_{1,9}, \\ \lambda'-\mu' a-(\lambda''+\mu'' a)(s-s^2-s^3+s^4) &\equiv 2\mathfrak{F}(a^{-1},s^3)\equiv-2\Pi_{17,13}\equiv 0, \end{aligned}$$

et par suite

$$(21)\begin{cases}\lambda' + \mu' a \equiv -\Pi_{3,7}, & \lambda'' + \mu'' a = \dfrac{\Pi_{3,7}}{s - s^2 - s^3 + s^4}, \ (\text{mod. } p)\\ \lambda' - \mu' a \equiv -\Pi_{1,9} & \lambda'' - \mu'' a = \dfrac{\Pi_{1,9}}{s - s^2 - s^3 + s^4}, \ (\text{mod. } p)\end{cases}$$

les valeurs de $\Pi_{3,7}$, $\Pi_{1,9}$ étant

$$(22)\qquad \begin{cases}\Pi_{3,7} \equiv \dfrac{10\varpi(10\varpi - 1)\ldots(7\varpi + 1)}{1.2.3\ldots 3\varpi},\\ \Pi_{1,9} \equiv \dfrac{10\varpi(10\varpi - 1)\ldots(9\varpi + 1)}{1.2.3\ldots\varpi}.\end{cases}$$

Appliquons maintenant à un cas particulier les formules que nous venons de trouver, et supposons

$$p = 41, \quad n = \frac{p-1}{2} = 20, \quad \nu = 5, \quad \omega = 4, \quad \varpi = 2.$$

On vérifiera les formules (20) en prenant

$$s = -4, \quad a = 9,$$

et l'on trouvera

$$\Pi_{1,9} = \frac{20.19}{2} = 10.19 \equiv -5.3 \equiv -15,$$

$$\Pi_{3,7} = \frac{20.19.18.17.16.15}{1.2.3.4.5.6} \equiv 8.15.17.19 \equiv 15,$$

$$\lambda' + \mu' a \equiv -15, \quad \lambda' - \mu' a \equiv 15, \quad \lambda' \equiv 0, \quad \mu' \equiv -\frac{15}{9} \equiv 12,$$

$$\frac{1}{s - s^2 - s^3 + s^4} = \frac{1}{28} \equiv -\frac{40}{28} \equiv -\frac{10}{7} \equiv 2\frac{77}{7} \equiv 22,$$

$$\lambda'' + \mu'' a \equiv 22.15 \equiv 2, \quad \lambda'' - \mu'' a \equiv 22.15 \equiv 2,$$

$$\lambda'' = 2, \quad \mu'' = 0.$$

Donc l'équation (19) donnera

$$4p = \mu'^2 + 5\lambda''^2$$

ou

$$p = \left(\frac{\mu'}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{\lambda''}{2}\right)^2.$$

Effectivement

$$41 = 6^2 + 5.1^2 = 36 + 5.$$

Soit encore

$$p = 101.$$

On trouvera

$$\varpi = 5$$

$$\Pi_{1,9} = \frac{50.49.48.47.46}{1.2.3.4.5} = 10.49.2.47.46 \equiv -18,$$

$$\Pi_{3,7} \equiv (-18)\frac{45.44.43.42.41.40.39.38.37.36}{6.7.8.9.10.11.12.13.14.15} \equiv (-18)\frac{3.37.38.41.43}{7} \equiv -18.$$

Par suite on trouvera

$$\lambda'' = 0, \quad \mu' = 0$$

$$4p = \lambda'^2 + 5\mu''^2, \quad p = \left(\frac{\lambda'}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{\mu''}{2}\right)^2.$$

On aura d'ailleurs

$$a = 10$$

et

$$\lambda' \equiv \frac{\Pi_{1,9} + \Pi_{3,7}}{2} \equiv \Pi_{1,9} \equiv -18, \quad \frac{\lambda'}{2} = -9.$$

Effectivement

$$101 = 81 + 5.4 = 9^2 + 5.2^2.$$

En général, lorsque, ν étant impair et de la forme $4x + 1$, on suppose

$$\omega = 4,$$

on peut prendre

$$v = 1, \quad \alpha = \sqrt{-1},$$

et l'on tire de l'équation (4), 1° en supposant $h = 1$

$$(23)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Theta_1 \Theta_{u^2+\nu(1-u^2)}\, \Theta_{u^4+\nu(1-u^4)} \ldots \Theta_{u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})} \\ &\qquad = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma)\, \Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \end{aligned} \right.$$

2° en supposant $h = -1$

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Theta_{1-2\nu}\, \Theta_{u^2-\nu(1+u^2)}\, \Theta_{u^4-\nu(1+u^4)} \ldots \Theta_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3})} \\ &\qquad = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma)\, \Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs, dans cette hypothèse,

$$(25)\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^{\nu-3}}), \\ &\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^{\nu-3}}). \end{aligned} \right.$$

On trouvera de même

$$(26)\left\{ \begin{aligned} &\Theta_{u+\nu(1-u)}\, \Theta_{u^3+\nu(1-u^3)} \ldots \Theta_{u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2})} = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^u)\, \Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \\ &\Theta_{u-\nu(1+u)}\, \Theta_{u^3-\nu(1+u^3)} \ldots \Theta_{u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2})} = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^u)\, \Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(27)\left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^u) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^3}) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^5}) = \ldots = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^{u^{\nu-2}}), \\ &\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^u) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^3}) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^5}) = \ldots = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^{u^{\nu-2}}), \end{aligned} \right.$$

Dans ces diverses équations, u désigne une racine primitive de l'équivalence

$$x^{\nu-1} \equiv, \quad (\text{mod. } \nu),$$

en sorte qu'on aura

$$u^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \quad \text{ou} \quad 1 + u^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 0, \quad (\text{mod. } \nu).$$

Cela posé, on trouvera

$$\Theta_{u^m+\frac{\nu-1}{2}-\nu\left(1+u^m+\frac{\nu-1}{2}\right)}=\Theta_{(1-\nu)u^m u^{\frac{\nu-1}{2}}-\nu}=\Theta_{-(1-\nu)u^m-\nu}=\Theta_{-u^m-\nu(1-u^m)},$$

$$\begin{aligned}\Theta_{u^m+\nu(1-u^m)}\Theta_{u^m+\frac{\nu-1}{2}-\nu\left(1+u^m+\frac{\nu-1}{2}\right)}&=\Theta_{u^m+\nu(1-u^m)}\Theta_{-u^m-\nu(1-u^m)}\\&=(-1)^{\varpi u^m+\varpi\nu(1-u^m)}p=(-1)^{\varpi\nu}p,\end{aligned}$$

et l'on tirera : 1° des équations (23), (24)

$$(28)\qquad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)=\frac{(-1)^{\frac{\varpi\nu(\nu-1)}{2}}p^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}=\frac{p^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}},$$

2° des équations (26) et (27)

$$(29)\qquad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)=\frac{p^{\frac{\nu-1}{2}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}\Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}.$$

On aura donc par suite : 1° en supposant ν de la forme $8x+5$

$$(30)\qquad \begin{cases}\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)=\dfrac{p^{\frac{\nu-1}{2}}}{p}=p^{\frac{\nu-3}{2}},\\ \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)=p^{\frac{\nu-3}{2}},\end{cases}$$

2° en supposant p de la forme $8x+1$, et par conséquent $\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}=\Theta_0=-1$,

$$(31)\qquad \begin{cases}\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)=p^{\frac{n-1}{2}},\\ \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)=p^{\frac{n-1}{2}}.\end{cases}$$

D'autre part, en posant $h=2$, $\omega=4$, $k=-1$ dans la formule (2), on trouvera

$$(32)\qquad \begin{cases}\Theta_{1+\nu}\Theta_{u^2+\nu(2-u^2)}\Theta_{u^4+\nu(2-u^4)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}+\nu(2-u^{\nu-3})}=\Theta_0\Phi(\varsigma)\\ =\Theta_{1-3\nu}\Theta_{u^2-\nu(2+u^2)}\Theta_{u^4-\nu(2+u^4)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}-\nu(2+u^{\nu-3})},\end{cases}$$

$\Phi(\varsigma)$ désignant une fraction de ς et de $\sqrt{-1}$ à coefficients entiers ; et, comme on aura

$$\Theta_{u^m+\frac{\nu-1}{2}+\nu(2-u^m+\frac{\nu-1}{2})}=\Theta_{-u^m+\nu(2+u^m)},$$

on tirera de la formule (32)

$$p^{\frac{\nu-1}{4}}=\Theta_0\Phi(\varsigma)$$

ou

$$\Phi(\varsigma)=-p^{\frac{\nu-1}{4}}:$$

On trouvera de la même manière

$$\Phi(\varsigma^u)=-p^{\frac{\nu-1}{4}}.$$

On aura donc

$$(33)\begin{cases}\Theta_{1+\nu}\,\Theta_{u^2+\nu(2-u^2)}\,\Theta_{u^4+\nu(2-u^4)}\cdots\Theta_{u^{\nu-3}+\nu(2-u^{\nu-3})}=p^{\frac{\nu-1}{4}}\\ =\Theta_{u+\nu(2-u)}\,\Theta_{u^3+\nu(2-u^3)}\,\Theta_{u^5+\nu(2-u^5)}\cdots\Theta_{u^{\nu-2}+\nu(2-u^{\nu-2})};\end{cases}$$

et, comme 2 sera nécessairement de l'une des formes

$$u^{2m},\quad u^{2m+1}$$

on aura encore

$$(34)\begin{cases}\Theta_2\Theta_{2u^2+2\nu(1-u^2)}\Theta_{2u^4+2\nu(1-u^4)}\cdots\cdots\Theta_{2u^{\nu-3}+2\nu(1-u^{\nu-3})}=p^{\frac{\nu-1}{4}},\\ \Theta_{2u+2\nu(1-u)}\Theta_{2u^3+2\nu(1-u^3)}\Theta_{2u^5+2\nu(1-u^5)}\cdots\Theta_{2u^{\nu-2}+2\nu(1-u^{\nu-2})}=p^{\frac{\nu-1}{4}}.\end{cases}$$

Si maintenant on combine l'équation (23) avec la première des formules (34), puis la première des équations (26) avec la seconde des formules (34), on trouvera

$$(35)\quad [\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)]^2=\mathrm{R}_{1,1}\mathrm{R}_{u^2+\nu(1-u^2),\,u^2+\nu(1-u^2)}\cdots\mathrm{R}_{u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3}),\,u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})}\,\frac{p_{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta^2_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}},$$

et

$$(36)\qquad [\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 = R_{u+\nu(1-u),\ u+\nu(1-u)} \ldots\ldots R_{u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2}),\ u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2})} \frac{p^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta^2_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}.$$

On aura au contraire

$$(37)\ [\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)]^2 = R_{1-2\nu,1-2\nu} R_{u^2-\nu(1+u^2),u^2-\nu(1+u^2)} \ldots R_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3}),u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3})} \frac{p^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta^2_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}},$$

et

$$(38)\qquad [\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 = R_{u-\nu(1+u),\ u-\nu(1+u)} \ldots R_{u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2}),\ u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2})} \frac{p^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta^2_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}.$$

D'autre part on aura : 1° en supposant ν de la forme $8x+1$

$$\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Theta_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Theta_0 = -1,$$

et, en supposant ν de la forme $8x+5$,

$$\Theta^2_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Theta^2_{-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = (-1)^{\frac{\varpi\nu(\nu-1)}{2}} p = p.$$

Donc les formules (35), (36), (37), (38) donneront, si ν est de la forme $8x+1$,

$$(39)\left\{\begin{aligned}
[\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)]^2 &= p^{\frac{\nu-1}{4}} R_{1,1} R_{u^2+\nu(1-u^2),\ u^2+\nu(1-u^2)} \ldots\ldots R_{u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3}),\ u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})};\\
[\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 &= p^{\frac{\nu-1}{4}} R_{u+\nu(1-u),\ u+\nu(1-u)} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2}),\ u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2})};\\
[\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)]^2 &= p^{\frac{\nu-1}{4}} R_{1-2\nu,\ 1-2\nu} R_{u^2-\nu(1+u^2),\ u^2-\nu(1+u^2)} \ldots R_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3}),\ u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})};\\
[\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 &= p^{\frac{\nu-1}{4}} R_{u-\nu(1+u),\ u-\nu(1+u)} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2}),\ u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2})}
\end{aligned}\right.$$

et, si ν est de la forme $8x+5$,

$$
(40)\begin{cases}
[\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)]^2 = p^{\frac{\nu-5}{4}} R_{1,1} R_{u^2+\nu(1-u^2),\, u^2+\nu(1-u^2)} \ldots\ldots R_{u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3}),\, u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})}, \\
[\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 = p^{\frac{\nu-5}{4}} R_{u+\nu(1-u),\, u+\nu(1-u)} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2}),\, u^{\nu-2}+\nu(1-u^{\nu-2})}, \\
[\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)]^2 = p^{\frac{\nu-5}{4}} R_{1-2\nu,\, 1-2\nu} R_{u^2-\nu(1+u^2),\, u^2-\nu(1+u^2)} \ldots R_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3}),\, u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3})}, \\
[\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)]^2 = p^{\frac{\nu-5}{4}} R_{u-\nu(1+u),\, u-\nu(1+u)} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2}),\, u^{\nu-2}-\nu(1+u^{\nu-2})}.
\end{cases}
$$

Observons encore qu'en vertu des formules (25) on aura

$$
\begin{aligned}
(41)\ \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) &= b_0+c_0\sqrt{-1}+(b_1+c_1\sqrt{-1})(\varsigma+\varsigma^{u^2}+\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}})+(b_2+c_2\sqrt{-1})(\varsigma^u+\ldots+\varsigma^{u^{\nu-2}}) \\
&= \frac{2b_0-b_1-b_2+(2c_0-c_1-c_2)\sqrt{-1}}{2}+\frac{b_1-b_2+(c_1-c_2)\sqrt{-1}}{2}[\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}}],
\end{aligned}
$$

et par conséquent

$$
(42)\begin{cases}
2\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = f_0+g_0\sqrt{-1}+(f_1+g_1\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}-\varsigma^{u^{\nu-2}}), \\
2\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u) = f_0+g_0\sqrt{-1}-(f_1+g_1\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}-\varsigma^{u^{\nu-2}}), \\
2\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) = f_0-g_0\sqrt{-1}+(f_1-g_1\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}-\varsigma^{u^{\nu-2}}), \\
2\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u) = f_0-g_0\sqrt{-1}-(f_1-g_1\sqrt{-1})(\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}-\varsigma^{u^{\nu-2}}),
\end{cases}
$$

f_0, g_0, f_1, g_1, désignent des nombres entiers. De plus, on aura

$$
(43)\begin{cases}
\varsigma+\varsigma^u+\varsigma^{u^2}+\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}+\varsigma^{u^{\nu-2}} = -1, \\
(\varsigma-\varsigma^u+\varsigma^{u^2}-\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}}-\varsigma^{u^{\nu-2}})^2 = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu = \nu.
\end{cases}
$$

En combinant les formules (42) avec les équations (30) ou (31), on trouvera 1°, en supposant ν de la forme $8x+1$

$$
(44)\qquad 4p^{\frac{\nu-1}{2}} = f_0^2+f_1^2+g_0^2+g_1^2,\quad f_0f_1+g_0g_1=0,
$$

2° en supposant ν de la forme $8x+5$

$$
(45)\qquad 4p^{\frac{\nu-3}{2}} = f_0^2+\nu f_1^2+g_0^2+\nu g_1^2,\quad f_0f_1+g_0g_1=0.
$$

D'ailleurs on vérifie la seconde des formules (44) ou (45), en supposant

$$(46) \qquad f_0 = \beta\delta, \quad g_0 = \beta\varepsilon, \quad f_1 = -\gamma\varepsilon, \quad g_1 = \gamma\delta.$$

On aura donc, si ν est de la forme $8x + 1$,

$$(47) \qquad 4p^{\frac{\nu-1}{2}} = (\beta^2 + \nu\gamma^2)(\delta^2 + \varepsilon^2),$$

et, si ν est de la forme $8x + 5$,

$$(48) \qquad 4p^{\frac{\nu-3}{2}} = (\beta^2 + \nu\gamma^2)(\delta^2 + \varepsilon^2).$$

Enfin les formules (42) donneront

$$(49)\begin{cases} 2\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma) = (\delta + \varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta + \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}\right], \\ 2\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^u) = (\delta + \varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta - \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}\right], \\ 2\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma) = (\delta - \varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta - \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}\right], \\ 2\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^u) = (\delta - \varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta + \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}\right]. \end{cases}$$

Il est bon de remarquer encore que, les valeurs de f_0, g_0, f_1, g_1 étant

$$f_0 = 2b_0 - b_1 - b_2, \quad f_1 = b_1 - b_2,$$
$$g_0 = 2c_0 - c_1 - c_2, \quad g_1 = c_1 - c_2,$$

f_1 sera toujours pair ou impair, en même temps que f_0, et g_1 pair ou impair en même temps que g_0. Cela posé, si des deux nombres β, γ l'un était pair, l'autre impair, il faudrait, en vertu des formules (46), que δ, ε fussent tous deux pairs. On aurait donc alors, en supposant ν de la forme $8x + 1$,

$$(50) \qquad p^{\frac{\nu-1}{2}} = (\beta^2 + \nu\gamma^2)\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right],$$

et, en supposant ν de la forme $8x + 5$,

$$(51) \qquad p^{\frac{\nu-3}{2}} = (\beta^2 + \nu\gamma^2)\left[\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right],$$

$\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2}$ étant deux nombres entiers, l'un pair, l'autre impair. De même, si des deux nombres δ, ε l'un était pair, l'autre impair, β et γ seraient nécessairement pairs, et l'on trouverait 1°, en supposant ν de la forme $8x+1$,

$$(52) \qquad p^{\frac{\nu-1}{2}} = \left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right](\delta^2+\varepsilon^2),$$

2°, en supposant ν de la forme $8x+5$,

$$(53) \qquad p^{\frac{\nu-3}{2}} = \left[\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right](\delta^2+\varepsilon^2),$$

$\frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ étant deux nombres entiers, l'un pair, l'autre impair. D'ailleurs on ne peut supposer les nombres β, γ, δ, ε pairs tous les quatre, puisque le second membre de la formule (47) serait alors divisible par 16, tandis que le premier est seulement divisible par 4.

Si β, γ, δ, ε étaient supposés impairs, l'équation (47) se décomposerait en deux autres, de la forme

$$(54) \qquad 2p^{k'} = \beta^2 + \nu\gamma^2, \quad 2p^{k''} = \delta^2 + \varepsilon^2.$$

Or, p étant de la forme $4x+1$ et β^2, γ^2 de la forme $8x+1$, la première des équations (54) aurait un premier membre de la forme $8x+2$, et un second membre de la forme $8x+6$, si ν était de la forme $8x+5$, ce qui serait absurde.

Donc, lorsque ν est de la forme $8x+5$, les deux nombres β et γ, ou les deux nombres δ, ε, sont pairs, et l'équation (47) se réduit à l'une des équations (51), (53)

Au reste, lorsque ν est de la forme $8x+5$, alors, en écrivant 2β et 2γ au lieu de β et γ, ou 2δ et 2ε au lieu de δ et de ε, on réduit la formule (51) ou (53) à

$$(55)\qquad p^{\frac{\nu-3}{2}} = (6^2 + \nu\gamma^2)(\delta^2 + \varepsilon^2),$$

tandis que les formules (49) deviennent

$$(56)\begin{cases} \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma\ ) = (\delta + \varepsilon\sqrt{-1})[6 + \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}], \\ \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma^u) = (\delta + \varepsilon\sqrt{-1})[6 - \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}], \\ \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma) = (\delta - \varepsilon\sqrt{-1})[6 - \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}], \\ \mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma^u) = (\delta - \varepsilon\sqrt{-1})[6 + \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}]. \end{cases}$$

Ajoutons que, dans ces dernières formules, on peut toujours supposer δ, ε premiers entre eux, attendu que, si δ, ε avaient pour facteur commun une certaine puissance de p, on pourrait évidemment faire passer ce facteur dans les quantités $6, \gamma$. Cela posé, si l'on nomme a et s les racines primitives des deux équivalences

$$(57)\qquad x^4 \equiv 1, \ (\text{mod.}\ p),$$

$$(58)\qquad x^\nu \equiv 1, \ (\text{mod.}\ p)$$

et p^λ la plus haute puissance de p, qui divise à la fois 6 et γ, λ devra être tel, que des quatre rapports

$$(59)\qquad \frac{\mathfrak{F}(a,s)}{p^\lambda},\quad \frac{\mathfrak{F}(a,s^u)}{p^\lambda};\quad \frac{\mathfrak{F}(-a,s)}{p^\lambda},\quad \frac{\mathfrak{F}(-a,s^u)}{p^\lambda}\ .$$

l'un au moins soit équivalent, suivant le module p, à un nombre fini différent de zéro, aucun d'eux n'étant équivalent à $\frac{1}{0}$. De plus, en posant

$$(60)\qquad \mu = \frac{\nu-3}{2} - 2\lambda,\quad 6 = p^\lambda x,\quad \gamma = p^\lambda y,$$

on tirera de l'équation (55)

$$(61)\qquad p^\mu = (\delta^2 + \varepsilon^2)(x^2 + \nu y^2).$$

Si μ se réduit à l'unité, alors $x^2+\nu y^2$ étant >1**, il faudra que l'on ait

$$(62)\qquad \delta^2+\varepsilon^2=1,\quad x^2+\nu y^2=p^\mu,$$

et par suite

$$\delta=0,\quad \varepsilon=\pm 1 \quad \text{ou} \quad \delta=\pm 1,\quad \varepsilon=0,$$

Quant à la valeur de λ, on la déduira sans peine des formules (40). Soit en effet ν' le nombre de ceux des indices

$$(63)\quad 1,\quad u^2+\nu(1-u^2),\quad u^4+\nu(1-u^4),\ldots u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})$$

qui sont équivalents, suivant le module n, à l'un des suivants

$$1, 2, 3,\ldots \frac{n-1}{2},$$

et ν'' le nombre de ceux des indices

$$(64)\quad u+\nu(1-u),\quad u^3+\nu(1-u^3),\ldots u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-2})$$

qui remplissent la même condition.

$$\lambda-\frac{1}{2}\,\frac{\nu-5}{4}$$

sera évidemment le plus petit des quatre nombres

$$(65)\qquad \frac{1}{2}\nu',\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\nu-1}{2}-\nu'\right),\quad \frac{1}{2}\nu'',\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\nu-1}{2}-\nu''\right).$$

Application. Soit

$$\nu=5.$$

** Voir la note II à la fin du mémoire.

On pourra prendre

$$u = 2,\quad u^2 = 4,\quad u^3 \equiv 3,$$

et les formules (23), (24), (26) donneront

$$(66)\begin{cases} \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = \dfrac{\Theta_1\Theta_9}{\Theta_{10}} = R_{1,9}, & \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^2) = \dfrac{\Theta_{17}\Theta_{13}}{\Theta_{30}} = R_{13,17}, \\ \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) = \dfrac{\Theta_{11}\Theta_{19}}{\Theta_{30}} = R_{11,19}, & \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^2) = \dfrac{\Theta_7\Theta_3}{\Theta_{10}} = R_{7,3}. \end{cases}$$

De plus, si l'on pose

$$\begin{aligned} R_{1,9} &= a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{19}\rho^{19} \\ &= a_0 + a_1\varsigma\sqrt{-1} - a_2\varsigma^2 - a_3\varsigma^3\sqrt{-1} + \text{etc.}, \end{aligned}$$

alors, en ayant égard aux formules

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^4), && \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^2) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^3) \\ &\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^4) && \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^2) = \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^3), \end{aligned}$$

on trouvera

$$\begin{aligned} &a_2 - a_{12} = -(a_8 - a_{18}), && a_4 - a_{14} = -(a_6 - a_{16}), \\ &a_1 - a_{11} = a_9 - a_{19}, && a_3 - a_{13} = a_7 - a_{17}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} R_{1,9} = {} & a_0 - a_{10} - (a_2 - a_{12})(\varsigma^2 + \varsigma^3) + (a_4 - a_{14})(\varsigma + \varsigma^4) \\ & + [a_5 - a_{15} - (a_3 - a_{13})(\varsigma^2 + \varsigma^3) + (a_1 - a_{11})(\varsigma + \varsigma_4)]\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

On tirera d'ailleurs de la formule (19) du § Ier

$$\mathfrak{F}(-1,\varsigma) = -1,\quad \mathfrak{F}(1,\varsigma) = -1, \text{ etc.}$$

et par suite

$$\begin{array}{ll} a_0 - a_5 + a_{10} - a_{15} = -1, & a_0 + a_5 + a_{10} + a_{15} = -1, \\ a_1 - a_6 + a_{11} - a_{16} = 0, & a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = 0, \\ a_2 - a_7 + a_{12} - a_{17} = 0, & a_2 + a_7 + a_{12} + a_{17} = 0, \\ a_3 - a_8 + a_{13} - a_{18} = 0, & a_3 + a_8 + a_{13} + a_{18} = 0, \\ a_4 - a_9 + a_{14} - a_{19} = 0, & a_4 + a_9 + a_{14} + a_{19} = 0, \end{array}$$

puis on en conclura

$$a_{10} = -1 - a_0,\quad a_{11} = -a_1,\quad a_{12} = -a_2,\quad a_{13} = -a_3,\quad a_{14} = -a_4,$$
$$a_{15} = -a_5,\quad a_{16} = -a_6,\quad a_{17} = -a_7,\quad a_{18} = -a_8,\quad a_{19} = -a_9,$$

$$R_{1,9} = 1 + 2a_0 + a_2 - a_4 - (a_2 + a_4)(\varsigma - \varsigma^2 - \varsigma^3 + \varsigma^4)$$
$$+ [2a_5 + a_3 - a_1 + (a_1 - a_3)(\varsigma - \varsigma^2 - \varsigma^3 + \varsigma^4)]\sqrt{-1}.$$

Enfin la formule (55) donnera

$$(67) \qquad p = (6^2 + 5\gamma^2)(\delta^2 + \varepsilon^2),$$

et, comme $6^2 + 5\gamma^2$ surpassera l'unité**, on en tirera nécessairement

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = 1, \quad p = 6^2 + 5\gamma^2.$$

** $6^2 + 5\gamma^2$ pourrait se réduire à l'unité, si l'on supposait

$$6^2 = 1, \quad \gamma^2 = 0.$$

Mais alors la formule (67) deviendrait

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = p,$$

et l'on tirerait des équations (69)

$$4p = 4(\delta^2 + \varepsilon^2) = \Pi_{1,9}\,\Pi_{3,7}$$

ce qui est absurde, puisque ni $\Pi_{1,9}$ ni $\Pi_{3,7}$ ne sont divisibles par p. Donc la supposition, que $6^2 + 5\gamma^2$ se réduit à l'unité, doit être rejetée.

Donc, tout nombre premier de la forme $20x+1$ est en même temps de la forme $\beta^2+5\gamma^2$, en sorte qu'on peut satisfaire, par des valeurs entières de x, y, à l'équation

$$p = x^2 + 5y^2. \tag{68}$$

Quant aux valeurs de $x=\beta$, $y=\gamma$, elles pourront être déterminées à l'aide des formules

$$\begin{aligned}
R_{1,9} &= \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) = (\delta-\varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta-\gamma(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)\sqrt{-1}\right],\\
R_{13,17} &= \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^2) = (\delta+\varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta-\gamma(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)\sqrt{-1}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1,9} &= \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = (\delta+\varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta+\gamma(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3-\varsigma^4)\sqrt{-1}\right],\\
R_{3,7} &= \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = (\delta-\varepsilon\sqrt{-1})\left[\beta+\gamma(\varsigma-\varsigma^2-\varsigma^3+\varsigma^4)\sqrt{-1}\right]
\end{aligned}$$

desquelles on tire

$$\left\{\begin{aligned}
R_{1,9} + R_{13,17} &= 2(\delta+\varepsilon\sqrt{-1})\beta,\\
R_{3,7} + R_{11,19} &= 2(\delta-\varepsilon\sqrt{-1})\beta,
\end{aligned}\right. \tag{69}$$

et par suite

$$(R_{1,9}+R_{13,17})(R_{3,7}+R_{11,19}) = 4(\delta^2+\varepsilon^2)\beta^2 = 4\beta^2,$$

puis, en remplaçant ρ par r

$$4\beta^2 \equiv \Pi_{1,9}\,\Pi_{3,7} = 4x^2,$$

$$x^2 \equiv \frac{1}{4}\,\Pi_{1,9}\,\Pi_{3,7}. \tag{70}$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\delta=0,\quad \varepsilon=\pm 1 \quad \text{ou} \quad \delta=\pm 1,\quad \varepsilon=0,$$

on tirera des formules (69), en y remplaçant ρ par r,

$$\pm\,\Pi_{1,9} \equiv \Pi_{3,7}. \tag{71}$$

Exemples. Si l'on prend $p=41$, on trouvera

$$\Pi_{3,7} \equiv -\Pi_{1,9} \equiv 15, \text{ (mod. } 41)$$

$$x^2 \equiv -\frac{225}{4} \equiv -\frac{20}{4} \equiv -5 \equiv 36.$$

Effectivement

$$41 = 36 + 5 = 6^2 + 5.1^2.$$

Si l'on prend $p=101$, on aura

$$\Pi_{1,9} \equiv \Pi_{3,7} \equiv -18,$$

$$x^2 \equiv \left(\frac{18}{2}\right)^2 \equiv 9^2 \equiv 81.$$

Effectivement

$$101 = 81 + 20 = 9^2 + 5.2^2.$$

Si l'on prend $p=61$, on aura $\varpi = 3$

$$\Pi_{1,9} = \frac{30.29.28}{1.2.3} \equiv -27 \equiv 34,$$

$$\Pi_{3,7} = (-27)\frac{27.26.25.24.23.22}{4.5.6.7.8.9} \equiv -34,$$

$$x^2 \equiv -17^2 \equiv -289 \equiv 16 \equiv -45.$$

Effectivement

$$61 = 16 + 45 = 4^2 + 5.3^2.$$

Soit encore $p=181$. On trouvera $\varpi = 9$,

$$\Pi_{1,9} = \frac{90.89.88.87.86.85.84.83.82}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \equiv -\frac{1}{2}\,\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \equiv -2,$$

$$x^2 \equiv -5y^2 \equiv \pm\left(\frac{2}{2}\right)^2 \equiv \pm 1 = \mp 180.$$

Effectivement

$$181 = 1 + 180 = 1^2 + 5.6^2.$$

Seconde application. Supposons

$$\nu = 13.$$

u sera racine de

$$u^{12} \equiv 1, \text{ (mod. 13)},$$

et l'on pourra prendre

$$u = 2,$$

$$u^0 \equiv 1, \quad u \equiv 2, \quad u^2 \equiv 4, \quad u^3 \equiv -5, \quad u^4 \equiv 3, \quad u^5 \equiv 6,$$
$$u^6 \equiv -1, \quad u^7 \equiv -2, \quad u^8 \equiv -4, \quad u^9 \equiv 5, \quad u^{10} \equiv -3, \quad u^{11} \equiv -6.$$

Cela posé, les termes de la série (63) seront équivalents, suivant le module $4.13 = 52$, aux quantités

$$1, \quad 4-39 \equiv 17, \quad 3-26 \equiv 29, \quad -1+26 \equiv 25,$$
$$-4+65 \equiv 9, \quad -3+52 \equiv 49,$$

dont quatre sont renfermées entre les limites 0 et 26, tandis que les termes de la série (64) seront équivalents, suivant le même module, aux quantités

$$2-13 \equiv 41, \quad -5+78 \equiv 21, \quad 6-65 \equiv 45, \quad -2+39 \equiv 37,$$
$$5-52 \equiv 5, \quad -6+39 \equiv 33,$$

dont deux sont renfermées entre les limites 0 et 26. On aura donc,

$$\nu' = 4, \quad \nu'' = 2,$$

$$\frac{1}{2}\nu' = 2, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\nu-1}{2} - \nu'\right) = 1, \quad \frac{1}{2}\nu'' = 1, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\nu-1}{2} - \nu''\right) = 2,$$

et par suite

$$\lambda = \frac{1}{2}\frac{\nu-5}{4} = 1,$$

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{\nu - 5}{4} = 1 + 1 = 2, \quad \mu = \frac{\nu - 3}{2} - 2\lambda = 5 - 4 = 1.$$

Donc on pourra résoudre en nombres entiers l'équation

$$(72) \qquad p = (\delta^2 + \varepsilon^2)(x^2 + 3y^2),$$

et comme $x^2 + 13y^2$ surpassera l'unité*, attendu qu'on ne peut supposer $\gamma = 0$, $y = 0$*, on aura nécessairement

$$(73) \qquad x^2 + 13y^2 = p,$$

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = 1,$$

$$\delta = 0, \quad 2 = \pm 1 \quad \text{ou} \quad \delta = \pm 1, \quad \varepsilon = 0.$$

---

* Si γ s'évanouissait, les formules (56) donneraient

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma),$$

et par suite

$$\frac{\mathfrak{F}(a,s)}{\mathfrak{F}(a,s^u)} \equiv 1, \text{ (mod. } p)^{**},$$

ce qu'on ne saurait admettre, eu égard aux équations (74), en vertu desquelles on a

$$\frac{\mathfrak{F}(a,s)}{\mathfrak{F}(a,s^u)} \equiv 0, \text{ (mod. } p).$$

** Il est bon d'observer qu'on doit entendre ici par

$$\frac{\mathfrak{F}(a,s)}{\mathfrak{F}(a,s^u)}$$

ce que devient le rapport

$$\frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)}{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)}$$

quand on y substitue a au lieu de $\sqrt{-1}$, et ς au lieu de s, après l'avoir transformé à l'aide de la formule (12) du § I[er], de manière que ces substitutions ne rendent pas le numérateur et le dénominateur simultané-

On tirera d'ailleurs des formules (23) et (26)

$$(74)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma\ ) = \dfrac{\Theta_1\Theta_{17}\Theta_{29}\Theta_{25}\Theta_9\Theta_{49}}{\Theta_{26}} = p\mathrm{R}_{1,25}\,\mathrm{R}_{9,17}\,\mathrm{R}_{29,49}, \\ \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u) = \dfrac{\Theta_{41}\Theta_{21}\Theta_{45}\Theta_{27}\Theta_5\Theta_{38}}{\Theta_{26}} = p\mathrm{R}_{37,41}\mathrm{R}_{21,5}\,\mathrm{R}_{33,45}, \end{cases}$$

---

ment divisibles par p. Sous cette condition, la remarque qu'on vient de faire est exacte, et pourrait être exprimée dans les termes suivants.

L'équation

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u),$$

jointe aux formules (68), donnerait

$$\mathrm{R}_{1,25}\,\mathrm{R}_{9,17}\,\mathrm{R}_{29,49} = \mathrm{R}_{37,41}\,\mathrm{R}_{21,5}\,\mathrm{R}_{33,45};$$

puis, en ayant égard à la condition

$$\mathrm{R}_{h,k} = \frac{p}{\mathrm{R}_{-h,\,-k}} = \frac{p}{\mathrm{R}_{n-h,\,n-k}}$$

qui subsiste quand aucun des nombres h, k, $h+k$ n'est divisible par $n = 4\nu = 4.13 = 52$, on en conclurait

$$p\mathrm{R}_{31,47}\,\mathrm{R}_{29,49} = \mathrm{R}_{51,27}\,\mathrm{R}_{43,25}\,\mathrm{R}_{37,41}\,\mathrm{R}'_{33,45}$$

Enfin, en remplaçant dans la dernière formule $\sqrt{-1}$ par a, ς par s, et généralement $\mathrm{R}_{h,k}$ par $-\Pi_{n-h,\,n-k}$, on trouverait

$$p\Pi_{21,5}\,\Pi_{23,3} \equiv \Pi_{1,25}\,\Pi_{9,17}\,\Pi_{15,11}\,\Pi_{19,7},\ (\mathrm{mod.}\ p);$$

ce qui est absurde, puisqu'aucun des nombres

$$\Pi_{1,25}\,\Pi_{9,17}\,\Pi_{15,11}\,\Pi_{19,7}$$

ne sera divisible par p. Le rapport entre le premier et le second nombre de la dernière formule est précisément ce qu'on doit entendre par l'expression $\dfrac{\mathfrak{F}(a,s)}{\mathfrak{F}(a,s'')}$.

puis des équations (24) et (26)

$$(75)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma\ ) = p\mathrm{R}_{51,27}\mathrm{R}_{43,35}\mathrm{R}_{23,3}, \\ \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'') = p\mathrm{R}_{15,11}\mathrm{R}_{31,47}\mathrm{R}_{19,7}. \end{cases}$$

D'autre part, $\delta^2 + \varepsilon^2$ étant réduit à l'unité, les formules (55), (56) donneront

$$p^5 = 6^2 + 13\gamma^2,$$

$$46^2 = [\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) + \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')]\,[\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) + \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')],$$

ou, parce que $6 = px^2$, on trouvera

$$4p^4x^2 = [\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) + \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')]\,[\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) + \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')]$$
$$= p^2\,[\mathrm{R}_{1,25}\mathrm{R}_{9,17}\mathrm{R}_{29,49} + \mathrm{R}_{37,41}\mathrm{R}_{21,5}\mathrm{R}_{33,45}]\,[\mathrm{R}_{51,27}\mathrm{R}_{43,35}\mathrm{R}_{3,23} + \mathrm{R}_{15,11}\mathrm{R}_{31,47}\mathrm{R}_{19,7}],$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{\mathrm{R}_{1,25}\mathrm{R}_{9,17}}{\mathrm{R}_{3,23}} + \frac{\mathrm{R}_{21,5}}{\mathrm{R}_{11,15}\mathrm{R}_{19,7}}\right]\left[p\,\frac{\mathrm{R}_{3,23}}{\mathrm{R}_{1,25}\mathrm{R}_{9,17}} + \frac{\mathrm{R}_{11,15}\mathrm{R}_{9,17}}{\mathrm{R}_{5,21}}\right],$$

ou bien encore

$$x^2 = \frac{1}{4}\left[p\,\frac{\mathrm{R}_{29,49}}{\mathrm{R}_{27,51}\mathrm{R}_{35,45}} + \frac{\mathrm{R}_{37,41}\mathrm{R}_{33,45}}{\mathrm{R}_{31,47}}\right]\left[\frac{\mathrm{R}_{27,51}\mathrm{R}_{25,43}}{\mathrm{R}_{29,49}} + \frac{\mathrm{R}_{31,47}}{\mathrm{R}_{37,41}\mathrm{R}_{33,45}}\right].$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace ρ par r, on en tirera

$$(76)\qquad x^2 \equiv \frac{1}{4}\,\frac{\Pi_{11,15}\Pi_{7,19}}{\Pi_{5,21}}\,\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}},\ (\mathrm{mod.}\ p).$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = \pm\,\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma''),\quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma) = \pm\,\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')$$

on en conclura

$$\frac{\Pi_{11,15}\Pi_{7,19}}{\Pi_{5,21}} = \pm\,\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}},$$

et par suite

$$x^2 \equiv \pm \left(\frac{1}{2} \frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,13}} \right)^2. \tag{77}$$

On aura de plus

$$\left\{ \begin{aligned} \Pi_{1,25} &= \frac{26\varpi(26\varpi-1)\ldots(25\varpi+1)}{1.2.3\ldots\varpi}, \\ \Pi_{3,13} &= \frac{26\varpi(26\varpi-1)\ldots(23\varpi+1)}{1.2.3\ldots3\varpi}, \\ \Pi_{9,17} &= \frac{26\varpi(26\varpi-1)\ldots(17\varpi+1)}{1.2.3\ldots9\varpi}. \end{aligned} \right. \tag{78}$$

Exemples. Supposons

$$p = 53.$$

On aura $\varpi = 1$,

$$\Pi_{1,25} = 26 \equiv -\frac{1}{2},$$

$$\Pi_{3,13} = \frac{26.25.24}{1.2.3} \equiv -\frac{1}{8}\frac{1.3.5}{1.2.3} \equiv 3;$$

$$\Pi_{9,17} = \frac{26.25.24.23.22.21.20.19.18}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \equiv \frac{3}{14}\,\frac{7.9.11.13.15.17}{4.5.6.7.8.9} \equiv \frac{5}{4} \equiv -12,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,13}} \equiv \frac{3}{3} \equiv 1$$

$$x^2 \equiv 1.$$

Effectivement

$$53 = 1 + 52 = 1 + 13.2^2.$$

Supposons encore

$$p = 157.$$

On trouvera $\varpi = 3$,

$$\Pi_{1,25} = \frac{78.77.76}{1.2.3} \equiv -\frac{1}{8}\frac{1.3.5}{1.2.3} \equiv -\frac{5}{16},$$

$$\frac{\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}} = \frac{1}{2^{18}} \, \frac{19.21.23.25.27.29.31.33.35.37.39.41.43.45.47.49.51.53}{10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.21.22.23.24.25.26.27}$$

$$= \frac{1}{2^{18}} \, \frac{29.31.33.35.37.39.41.43.45.47.49.51.53}{10.11.12.13.14.15.16.17.18.20.22.24.26} \equiv -\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} \, \frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}} \equiv \frac{5}{64} \equiv -22$$

$$x^2 \equiv \pm (22)^2 \equiv \pm 13 \equiv \mp 144.$$

Effectivement

$$157 = 144 + 13 = 12^2 + 13 . 1^2.$$

§ III.

Suite du même sujet.

Reprenons les formules (4) et (5) du § II. On en tire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^{\nu-3}}) = \\ \dfrac{\Theta_{1+v\nu(h-1)}\,\Theta_{u^2+v\nu(h-u^2)}\,\Theta_{u^4+v\nu(h-u^4)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}+v\nu(h-u^{\nu-3})}}{\Theta_{v\frac{\nu(\nu-1)}{2}h}}; \end{array} \right.$$

et l'on trouve de la même manière

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^3}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^5}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^{\nu-2}}) = \\ \dfrac{\Theta_{u+v\nu(h-u)}\,\Theta_{u^3+v\nu(h-u^3)}\,\Theta_{u^5+v\nu(h-u^5)}\ldots\Theta_{u^{\nu-2}+v\nu(h-u^{\nu-2})}}{\Theta_{v\frac{\nu(\nu-1)}{2}h}}. \end{array} \right.$$

On aura d'ailleurs, en vertu de la formule (2) du § II,

$$\Theta_{u^m+v\nu(h-u^m)} = \Theta_{u^m+v\nu(h+k\omega-u^m)}.$$

Enfin, comme, en supposant ν premier, on aura

$$u^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \pmod{\nu}$$

on trouvera, si ν est de la forme $4x+1$,

$$\mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{-1}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^{\frac{\nu-1}{2}}}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma), \tag{3}$$

et, si ν est de la forme $4x+3$,

$$\mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{-1}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^{u^{\frac{\nu-1}{2}}}) = \mathfrak{F}(\alpha^h, \varsigma^u). \tag{4}$$

Supposons maintenant que ω soit un nombre premier, et nommons a une racine primitive de

$$x^{\omega-1} \equiv 0, \pmod{\omega}. \tag{5}$$

Si l'on prend

$$\mathfrak{F}(\alpha, \varsigma)\, \mathfrak{F}(\alpha^{a^2}, \varsigma) \ldots \mathfrak{F}(\alpha^{a^{\omega-3}}, \varsigma) = \varphi(\alpha, \varsigma), \tag{6}$$

on aura

$$\varphi(\alpha, \varsigma) = \varphi(\alpha^{a^2}, \varsigma) = \ldots = \varphi(\alpha^{a^{\omega-3}}, \varsigma); \tag{7}$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^a, \varsigma)\, \mathfrak{F}(\alpha^{a^3}, \varsigma) \ldots \mathfrak{F}(\alpha^{a^{\omega-2}}, \varsigma) = \varphi(\alpha^a, \tau), \tag{8}$$

$$\varphi(\alpha^a, \varsigma) = \varphi(\alpha^{a^3}, \varsigma) = \ldots = \varphi(\alpha^{a^{\omega-2}}, \varsigma). \tag{9}$$

On trouvera de plus

$$a^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv -1, \pmod{\omega}.$$

Cela posé, si ω et ν ne sont pas tous deux de la forme $4x+1$, on aura

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha, \varsigma) = {} & a + b\,(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}}) + c\,(\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}}) \\
& + [a' + b'(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}}) + c'(\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})](\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) \\
& + [a'' + b''(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}}) + c''(\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})](\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}})
\end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned}2\varphi(\alpha,\varsigma) = {} & 2a - b - c + (b - c)(\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{a^{\omega-2}}) \\ & + [2a' - b' - c' + (b' - c')(\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{a^{\omega-2}})](\varsigma + \varsigma^u + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) \\ & + [2a'' - b'' - c'' + (b'' - c'')(\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{a^{\omega-2}})](\varsigma^u + \varsigma^u + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}),\end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned}4\varphi(\alpha,\varsigma) = {} & 2(2a - b - c) - (2a' - b' - c') - (2a'' - b'' - c'') \\ & + [(2a' - b' - c') - (2a'' - b'' - c'')](\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} - \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{u^{\nu-2}}) \\ & + [2(b - c) - (b' - c') - (b'' - c'')](\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{a^{\omega-2}}) \\ & + [(b' - c') - (b'' - c'')](\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha - \alpha^a + \ldots\ldots - \alpha^{a^{\omega-2}}).\end{aligned}$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned}A &= 2(2a - b - c) - (2a' - b' - c') - (2a'' - b'' - c''), \\ B &= 2(b - c) - (b' - c') - (b'' - c''), \\ C &= 2a' - b' - c' - (2a'' - b'' - c''), \\ D &= (b' - c') - (b'' - c''),\end{aligned}$$

les quatre nombres, A, B, C, D seront tous pairs, ou tous impairs, et l'on aura

$$(10)\left\{\begin{aligned}4\varphi(\alpha,\varsigma) = {} & A + B(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}}) + C(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}}) \\ & + D(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma - \varsigma^u + \ldots\ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\end{aligned}\right.$$

Si ν et ω étaient tous deux de la forme $4x + 1$, alors l'expression

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = \varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1})$$

se réduirait à une puissance entière de p, et l'équation (10) prendrait la forme

$$(11) \qquad 4\varphi(\alpha,\varsigma) = A,$$

en sorte qu'on aurait

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0.$$

Lorsque ω et ν ne sont pas tous deux de la forme $4x+1$, le produit

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1})$$

se réduit à une puissance entière de p. On a d'ailleurs généralement

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha-\alpha^{u}+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})^2=(-1)^{\frac{\omega-1}{2}}\omega,\\ &(\varsigma-\varsigma^{u}+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})^2=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu. \end{aligned}\right.$$

De plus, on tirera de l'équation (10), en y remplaçant successivement α par α^a et ς par ς^u,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} 4\varphi(\alpha,\varsigma^u) &= A+B(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})-C(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\\ &\quad -D(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}}),\\ 4\varphi(\alpha^a,\varsigma) &= A-B(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})+C(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\\ &\quad -D(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}}),\\ 4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) &= A-B(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})-C(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\\ &\quad +D(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}}); \end{aligned}\right.$$

et l'on trouvera 1°, en supposant ω et ν de la forme $4x+1$

$$\varphi(\alpha,\varsigma)=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma)=\varphi(\alpha,\varsigma^{-1})=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1});$$

2°, en supposant ν de la forme $4x+1$, et ω de la forme $4x+3$,

$$\varphi(\alpha,\varsigma)=\varphi(\alpha,\varsigma^{-1}),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma)=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1});$$

3°, en supposant ν de la forme $4x+3$, et ω de la forme $4x+1$,

$$\varphi(\alpha,\varsigma)=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma),\quad \varphi(\alpha,\varsigma^u)=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1});$$

4°, en supposant ν et ω de la forme $4x+3$,

$$\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)=\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1}).$$

Donc, si l'on fait généralement

$$(14) \qquad \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^{-1},\varsigma^{-1})=p^k,$$

on aura, 1° en supposant ν de la forme $4x+1$, et ω de la forme $4x+3$,

$$(15) \qquad p^k=\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma)=\varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u);$$

2° en supposant ν de la forme $4x+3$, et ω de la forme $4x+1$,

$$(16) \qquad p^k=\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u)=\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u);$$

3° en supposant ν et ω de la forme $4x+3$,

$$(17) \qquad p^k=\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)=\varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma).$$

Si maintenant on substitue dans les formules (15), (16), (17) les valeurs de

$$Q(\alpha,\varsigma),\quad Q(\alpha^a,\varsigma),\quad Q(\alpha,\varsigma^u),\quad Q(\alpha^a,\varsigma^u)$$

tirées des équations (10), (13), on trouvera, en ayant égard aux formules (12) : 1°, en supposant ν de la forme $4x+1$, et ω de la forme $4x+3$,

$$(18) \qquad 16p^k=A^2+\omega B^2+\nu C^2+\omega\nu D^2,\quad AC+\omega BD=0;$$

2° en supposant ν de la forme $4x+3$, et ω de la forme $4x+1$,

$$(19) \qquad 16p^k=A^2+\omega B^2+\nu C^2+\omega\nu D^2,\quad AB+\nu CD=0;$$

3°, en supposant ω et ν de la forme $4x+3$,

$$(20) \qquad 16p^k=A^2+\omega B^2+\nu C^2+\omega\nu D^2,\quad AD-BC=0.$$

On vérifie les équations (18) en prenant

$$A=\beta\delta,\quad B=\beta\varepsilon,\quad C=-\omega\gamma\varepsilon,\quad D=\gamma\delta,$$

et par suite

$$(21)\qquad 16p^k = (\delta^2 + \omega\varepsilon^2)(\beta^2 + \nu\omega\gamma^2),$$

ou bien

$$A = \omega\beta\delta,\quad B = \beta\varepsilon,\quad C = -\gamma\varepsilon,\quad D = \gamma\delta,$$

et par suite

$$(22)\qquad 16p^k = (\omega\delta^2 + \varepsilon^2)(\omega\beta^2 + \nu\gamma^2).$$

On vérifie les équations (19) en prenant

$$A = \beta\delta,\quad B = \nu\gamma\varepsilon,\quad C = -\beta\varepsilon,\quad D = \gamma\delta$$

et par suite

$$(23)\qquad 16p^k = (\delta^2 + \nu\varepsilon^2)(\beta^2 + \omega\nu\gamma^2),$$

ou bien

$$A = \nu\beta\delta,\quad B = \gamma\varepsilon,\quad C = -\beta\varepsilon,\quad D = \gamma\delta,$$

et par suite

$$(24)\qquad 16p^k = (\nu\delta^2 + \varepsilon^2)(\nu\beta^2 + \omega\gamma^2).$$

Enfin, on vérifie les équations (20), en prenant

$$A = \beta\delta,\quad B = \beta\varepsilon,\quad C = \gamma\delta,\quad D = \gamma\varepsilon$$

et par suite

$$(25)\qquad 16p^k = (\delta^2 + \omega\varepsilon^2)(\beta^2 + \nu\gamma^2).$$

Applications. Supposons, pour fixer les idées,

$$\nu = 5,\quad \omega = 3,\quad \omega\nu = 15.$$

on aura

$$v \equiv \frac{1}{\nu} \equiv \frac{1}{5} \equiv -1, \text{ (mod. 3)}$$

$$u = 2, \quad a = 2$$

$$u^0 = 1, \quad u = 2, \quad u^2 \equiv 4, \quad u^3 \equiv 3, \quad (\text{mod. } 5)$$

$$u^m + \nu\nu(h - u^m) = u^m - 5(h - u^m) = 6u^m - 5h,$$

$$\mathcal{F}(\alpha^h, \varsigma) = \mathcal{F}(\alpha^h, \varsigma^h) = \frac{\Theta_{6-5h}\Theta_{24-5h}}{\Theta_{30-10h}} = \frac{\Theta_{6-5h}\Theta_{9-5h}}{\Theta_{-10h}}$$

$$\mathcal{F}(\alpha^h, \varsigma^2) = \mathcal{F}(\alpha^h, \varsigma^3) = \frac{\Theta_{12-5h}\Theta_{18-5h}}{\Theta_{30-10h}} = \frac{\Theta_{12-5h}\Theta_{3-5h}}{\Theta_{-10h}};$$

on trouvera par suite

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha, \varsigma) = \mathcal{F}(\alpha, \varsigma) = \dfrac{\Theta_1\Theta_4}{\Theta_{-10}} = \dfrac{\Theta_1\Theta_4}{\Theta_5} = \mathrm{R}_{1,4}, \\ \varphi(\alpha^2, \varsigma) = \mathcal{F}(\alpha^2, \varsigma) = \dfrac{\Theta_{-4}\Theta_{-1}}{\Theta_{-5}} = \mathrm{R}_{-1,-4} = \mathrm{R}_{14,11}, \\ \varphi(\alpha, \varsigma^2) = \mathcal{F}(\alpha, \varsigma^2) = \dfrac{\Theta_7\Theta_{-2}}{\Theta_5} = \mathrm{R}_{7,-2} = \mathrm{R}_{7,13}, \\ \varphi(\alpha^2, \varsigma^2) = \mathcal{F}(\alpha^2, \varsigma^2) = \dfrac{\Theta_2\Theta_{-7}}{\Theta_{-5}} = \mathrm{R}_{2,-7} = \mathrm{R}_{2,8}. \end{array} \right.$$

Cela posé, on aura

$$p^k = \varphi(\alpha, \varsigma)\,\varphi(\alpha^2, \varsigma) = \varphi(\alpha, \varsigma^2)\,\varphi(\alpha^2, \varsigma^2) = \mathrm{R}_{1,4}\mathrm{R}_{14,11} = \mathrm{R}_{7,13}\mathrm{R}_{2,8} = p,$$

$$k = 1,$$

et la formule (21) ou (22) donnera

$$(27) \qquad 16p = (\delta^2 + 3\varepsilon^2)(6^2 + 15\gamma^2),$$

ou

$$(28) \qquad 16p = (\varepsilon^2 + 3\delta^2)(36^2 + 5\gamma^2).$$

Revenons aux formules (10) et (13), et supposons ν de la forme $4x + 1$, et ω de la forme $4x + 3$. On trouvera, 1°, en prenant

$$A=6\delta,\quad B=6\varepsilon,\quad C=-\omega\gamma\varepsilon,\quad D=\gamma\delta,$$

$$(29)\left\{\begin{array}{c}
4\varphi(\alpha,\varsigma)= \\
[\delta+\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha,\varsigma^u)= \\
[\delta+\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha^2,\varsigma)= \\
[\delta-\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)= \\
[\delta-\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})].
\end{array}\right.$$

Si l'on prend au contraire

$$A=\omega6\delta,\quad B=6\varepsilon,\quad C=-\gamma\varepsilon,\quad D=\gamma\delta,$$

on aura

$$(30)\left\{\begin{array}{c}
4\varphi(\alpha,\varsigma)= \\
[\varepsilon-\delta(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha,\varsigma^u)= \\
[\varepsilon-\delta(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[6(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma)= \\
[\varepsilon+\delta(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[-6(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)= \\
[\varepsilon+\delta(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})]\,[-6(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]
\end{array}\right.$$

Dans les équations (29), (30) on peut toujours supposer ε, δ premiers entre eux, et faire passer les facteurs communs qu'ils pourraient avoir dans 6 et γ. De plus, si les quatre nombres A, B, C, D sont impairs, 6, γ, δ, ε devront l'être aussi, et l'équation (21) se partagera en deux autres, de la forme

$$(31)\qquad 4p^{k'} = \delta^2 + \omega\varepsilon^2,\quad 4p^{k''} = \beta^2 + \nu\omega\gamma^2,$$

ou l'équation (22) en deux autres de la forme

$$(32)\qquad 4p^{k'} = \varepsilon^2 + \omega\delta^2,\quad 4p^{k''} = \omega\beta^2 + \nu\gamma^2.$$

Si, au contraire, A, B, C, D sont pairs, β, γ seront impairs; et les équations (21), (22) se partageront, ou, comme on vient de le dire, lorsque δ, ε seront impairs, ou, dans le cas contraire, ainsi qu'il suit :

$$(33)\qquad p^{k'} = \delta^2 + \omega\varepsilon^2,\quad 4p^{k''} = \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \nu\omega\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2,$$

$$(34)\qquad p^{k'} = \varepsilon^2 + \omega\delta^2,\quad 4p^{k''} = \omega\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \nu\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Ajoutons que l'on déterminera facilement $p^{k''}$ en cherchant la plus haute puissance de p, qui divise simultanément les deux produits

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u),$$

qui se réduiront, si l'on admet les formules (29), à

$$\frac{1}{16}\left[\delta + \varepsilon(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right](\beta^2 + \nu\omega\gamma^2),$$

$$\frac{1}{16}\left[\delta - \varepsilon(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right]^2(\beta^2 + \nu\omega\gamma^2),$$

et, dans le cas contraire, à

$$-\frac{1}{16}\left[\varepsilon - \delta(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right](\omega\beta^2 + \nu\gamma^2),$$

$$-\frac{1}{16}\left[\varepsilon - \delta(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right]^2(\omega\beta^2 + \nu\gamma^2).$$

Supposons comme ci-dessus

$$\omega=3,\quad \nu=5,\quad \omega\nu=15,$$

on aura

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma'')=\mathrm{R}_{1,4}\;\mathrm{R}_{7,13}=p\frac{\mathrm{R}_{7,13}}{\mathrm{R}_{14,11}},$$
$$\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'')=\mathrm{R}_{14,11}\,\mathrm{R}_{2,8}=p\frac{\mathrm{R}_{14,11}}{\mathrm{R}_{13,7}}.$$

Donc alors $k''=1$, et comme on a trouvé $k=1$, on aura nécessairement $k'=0$. Par suite la somme

$$\delta^2+\omega\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2+\omega\delta^2$$

se réduira nécessairement, ou à l'unité, ou à

$$4=1+\omega=1+3,$$

et les nombres β, γ vérifieront l'une des formules

$$4p=\beta^2+15\gamma^2,\qquad 4p=3\beta^2+5\gamma^2,$$
$$4p=\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+15\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2,\quad 4p=3\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+5\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

D'ailleurs, les seconds membres de ces dernières formules seraient divisibles par 8, si β et γ, ou $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$ étaient impairs, tandis que les premiers membres sont divisibles seulement par 4. Donc β et γ, ou $\frac{\beta}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$, doivent être pairs, et l'on peut résoudre en nombres entiers l'une des équations

$$p=x^2+15y^2,\quad p=3x^2+5y^2.$$

Or, comme on a généralement

$$x^2\equiv\pm 1,\ (\text{mod. } 5)$$

on en conclut

$$3x^2 + 5y^2 \equiv \pm 2, \text{ (mod. 5)}.$$

Donc p étant de la forme $15x + 1$, ne pourra être en même temps de la forme $3x^2 + 5y^2$, et tout nombre premier de la forme $15x + 1$ vérifiera la formule

$$p = x^2 + 15y^2. \tag{35}$$

Il reste à trouver la valeur de x.

Or, d'après ce qui vient d'être dit, on aura, 1°, si l'on suppose $\delta^2 + \omega\varepsilon^2 = 1$,

$$16p = \beta^2 + 15\gamma^2 = 16(x^2 + 15y^2),$$
$$x^2 = \frac{\beta^2}{16} = \frac{\beta^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2), \quad y^2 = \frac{\gamma^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2),$$

2° si l'on suppose $\delta^2 + \omega\varepsilon^2 = 4$,

$$4p = \beta^2 + 15\gamma^2 = 4(x^2 + 15y^2),$$
$$x^2 = \frac{\beta^2}{16} = \frac{\beta^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2), \quad y^2 = \frac{\gamma^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2).$$

On aura donc, dans tous les cas,

$$x^2 = \frac{\beta^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2), \quad y^2 = \frac{\gamma^2}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2).$$

D'ailleurs, on tire des formules (29) et (26)

$$\varphi(\alpha, \varsigma)\, \varphi(\alpha^a, \varsigma^u) = \frac{1}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2)\left[\beta + \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right]^2$$
$$= R_{1,4} R_{2,8},$$

$$\varphi(\alpha^a, \varsigma)\, \varphi(\alpha, \varsigma^u) = \frac{1}{16}(\delta^2 + \omega\varepsilon^2)\left[\beta - \gamma(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})\,\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})\right]^2$$
$$= R_{14,11} R_{7,13}.$$

On aura donc par suite

$$\frac{1}{2}[R_{14,11}R_{7,13}+R_{1,4}R_{2,8}]=x^2-\omega\nu y^2=x^2-15y^2,$$

puis on en conclura, en remplaçant ρ par r,

$$x^2-15y^2\equiv\frac{1}{2}\Pi_{1,4}\Pi_{2,8},\ (\text{mod. } p);$$

et, comme on aura de plus

$$x^2+15y^2\equiv 0,\ (\text{mod. } p),$$

on trouvera définitivement

$$(36)\qquad x^2\equiv-15y^2\equiv\frac{1}{4}\Pi_{1,4}\Pi_{2,8}.$$

Exemples. Supposons $p=31$. On aura $\varpi=2$,

$$\Pi_{1,4}=\frac{5\varpi(5\varpi-1)\ldots(4\varpi+1)}{1.2.3\ldots\varpi}=\frac{10.9}{1.2}=45\equiv 14,$$

$$\Pi_{2,8}=\frac{10\varpi(10\varpi-1)\ldots(8\varpi+1)}{1.2.3\ldots2\varpi}=\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=5.19.3.17\equiv 9,$$

$$x^2\equiv\frac{1}{4}9.14\equiv\frac{1}{2}9.7\equiv\frac{1}{2}\equiv 16\equiv-15\equiv-15y^2.$$

Donc

$$p=x^2+15y^2=16+15=4^2+15.1^2.$$

Supposons encore $p=61$. On trouvera $\varpi=4$.

$$\Pi_{1,4}=\frac{20.19.18.17}{1.2.3.4}=5.19.3.17\equiv-5.7\equiv-35\equiv-\frac{9}{2}$$

$$\Pi_{2,8}=\frac{40.39.38.37.36.35.34.33}{1.2.3.4.5.6.7.8}=5.17.19.33.37.39=\frac{5}{2},$$

$$x^2\equiv\frac{1}{4}\Pi_{1,4}\Pi_{2,8}\equiv-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{2}\equiv-\frac{45}{16}\equiv 1\equiv-60.$$

Effectivement

$$61=p=1+60=1^2+15.2^2.$$

En général, ν étant de la forme $4x+1$, ω de la forme $4x+3$, et δ, ε étant supposés premiers entre eux, on conclura des formules (31), (32), ou (33), (34), qu'on peut satisfaire en nombres entiers à l'une des deux équations

$$(36)\qquad 4p^{k''}=X^2+\nu\omega Y^2,\quad 4p^{k''}=\nu X^2+\omega Y^2:$$

et, comme les seconds membres de ces dernières seraient divisibles par 8, si,

$$\nu+\omega\quad \text{ou}\quad 1+\nu\omega$$

étant eux-mêmes divisibles par 8, les deux quantités X, Y étaient impaires, tandis que les premiers membres sont seulement divisibles par 4; on aura nécessairement, dans cette hypothèse,

$$X=2X',\quad Y=2Y'$$

$$(37)\qquad p^{k''}=X'^2+\nu\omega Y'^2\quad \text{ou}\quad p^{k''}=\nu X'^2+\omega Y'^2.$$

Dans ces diverses formules, $p^{k''}$ est la plus haute puissance de p, qui divise simultanément les deux produits

$$(38)\qquad \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u).$$

Soit d'ailleurs p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément les quatre expressions

$$(39)\qquad \varphi(\alpha,\varsigma),\quad \varphi(\alpha,\varsigma^u),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma^u).$$

X, Y seront divisibles par p^λ; et, en posant

$$X=p^\lambda x,\quad Y=p^\lambda y,$$
$$\mu=k''-2\lambda,$$

on tirera des formules (36)

$$(40)\qquad 4p^\mu=x^2+\nu\omega y^2\quad \text{ou}\quad 4p^\mu=\nu x^2+\omega y^2.$$

D'ailleurs, p étant de la forme $\nu\omega x+1$, la seconde des équations (40) ne pourra être vérifiée qu'autant que l'on aura

$$\nu x^2\equiv 4,\ (\text{mod. }\omega);\quad \omega y^2\equiv 4,\ (\text{mod. }\nu),$$

et par suite

$$\nu^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \omega); \quad \omega^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. 1)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left[\frac{\nu}{\omega}\right] = \left[\frac{\omega}{\nu}\right] = 1.$$

Donc, si l'on a

$$(41) \qquad \left[\frac{\nu}{\omega}\right] = \left[\frac{\omega}{\nu}\right] = -1,$$

on ne pourra satisfaire à la seconde des formules (40), et l'on aura nécessairement

$$(42) \qquad 4p^{\mu} = x^2 + \nu\omega y^2.$$

Application. Soit $\omega = 3$. Alors, si ν est de la forme $12x + 5$, on aura

$$\left[\frac{\nu}{3}\right] = \left[\frac{5}{3}\right] = -1,$$

et par conséquent on pourra vérifier, en nombres entiers, l'équation (42). Mais, si ν est de la forme $12x + 1$, on aura

$$\left[\frac{\nu}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}\right] = 1,$$

et l'on pourra seulement assurer que l'une des équations (40) est résoluble en nombres entiers.

Exemple. Soient

$$\omega = 3, \quad \nu = 17, \quad \omega\nu = 51.$$

On trouvera

$$u = 3, \quad a = 2$$

$$u^0 = 1, \quad u = 3, \quad u^2 \equiv -8, \quad u^3 \equiv -7, \quad u^4 \equiv -4, \quad u^5 \equiv 5, \quad u^6 \equiv -2, \quad u^7 \equiv -6$$
$$u^8 \equiv -1, \quad u^9 \equiv -3, \quad u^{10} \equiv 8, \quad u^{11} \equiv 7, \quad u^{12} \equiv 4, \quad u^{13} \equiv -5, \quad u^{14} \equiv 2, \quad u^{15} \equiv 6,$$

$$v \equiv \frac{1}{\nu} \equiv \frac{1}{17} \equiv -1, \text{ (mod. 3)}$$

$$u^m + v\nu(h-u^m) \equiv u^m - 17(h-u^m) \equiv 18u^m - 17h;$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma) = \frac{\Theta_{18-17h}\Theta_{9-17h}\Theta_{30-17h}\Theta_{15-17h}\Theta_{33-17h}\Theta_{42-17h}\Theta_{21-17h}\Theta_{36-17h}}{\Theta_{17h}},$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^u) = \frac{\Theta_{3-17h}\Theta_{27-17h}\Theta_{39-17h}\Theta_{45-17h}\Theta_{48-17h}\Theta_{24-17h}\Theta_{12-17h}\Theta_{6-17h}}{\Theta_{17h}};$$

puis on en conclura

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = \frac{\Theta_1\Theta_{43}\Theta_{13}\Theta_{49}\Theta_{16}\Theta_{25}\Theta_4\Theta_{19}}{\Theta_{17}} = R_{1,16}R_{43,25}R_{13,4}R_{49,19}\frac{\Theta^2_{17}\Theta^2_{68}}{\Theta_{17}}$$
$$= R_{1,16}R_{43,25}R_{13,4}R_{49,19}\Theta^3_{17} = R_{1,16}R_{43,25}R_{13,4}R_{49,19}\,pR_{17,17},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma^u) = \frac{\Theta_{37}\Theta_{10}\Theta_{22}\Theta_{28}\Theta_{31}\Theta_7\Theta_{46}\Theta_{40}}{\Theta_{17}} = R_{37,31}R_{10,7}R_{22,46}R_{28,40}\Theta^3_{17}$$
$$= R_{37,31}R_{10,7}R_{22,46}R_{28,40}\,pR_{17,17},$$

$$\varphi(\alpha^2,\varsigma) = R_{50,35}R_{8,26}\,R_{38,47}R_{2,32}\,pR_{34,34},$$
$$\varphi(\alpha^2,\varsigma^u) = R_{14,20}R_{41,44}R_{29,5}\,R_{23,11}\,pR_{34,34}.$$

En d'autres termes, on aura

$$(43)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha,\varsigma) = p^4\dfrac{R_{43,25}R_{49,19}}{R_{50,35}R_{38,47}R_{34,34}}, \\[2ex] \varphi(\alpha,\varsigma^u) = p^3\dfrac{R_{37,31}R_{22,46}R_{28,40}}{R_{41,44}R_{34,34}}, \\[2ex] \varphi(\alpha^2,\varsigma) = p^3\dfrac{R_{50,35}R_{38,47}R_{34,34}}{R_{43,25}R_{49,19}}, \\[2ex] \varphi(\alpha^2,\varsigma^u) = p^4\dfrac{R_{41,44}R_{34,34}}{R_{37,31}R_{22,46}R_{28,40}}. \end{cases}$$

Or, la plus haute puissance de p, qui divise simultanément les expressions (43), sera p^3. On aura donc $\lambda = 3$. De plus, les produits

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u),\quad \varphi(\alpha^2,\varsigma)\,\varphi(\alpha^2,\varsigma^u)$$

seront l'un et l'autre divisibles par p^7. On aura donc $k''=7$,

$$\mu = k'' - 2\lambda = 7 - 6 = 1,$$

et l'on pourra résoudre en nombres entiers l'équation

$$(44) \qquad 4p = x^2 + 51y^2.$$

On trouvera d'ailleurs, en raisonnant comme plus haut,

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x^2 - 51y^2) &\equiv \frac{1}{2}\,\frac{\Pi_{14,20}\Pi_{29,5}\Pi_{23,11}}{\Pi_{10,7}\Pi_{17,17}}\,\frac{\Pi_{1,16}\Pi_{13,4}\Pi_{17,17}}{\Pi_{8,26}\Pi_{2,32}} \\ &\equiv \frac{1}{2}\,\frac{\Pi_{14,20}\Pi_{29,5}\Pi_{23,11}\Pi_{1,16}\Pi_{13,4}}{\Pi_{10,7}\Pi_{8,26}\Pi_{2,32}},\end{aligned}$$

et par suite

$$(45) \qquad x^2 \equiv -51y^2 \equiv \frac{\Pi_{1,16}\Pi_{4,13}\Pi_{5,29}\Pi_{11,25}\Pi_{14,20}}{\Pi_{2,32}\Pi_{7,10}\Pi_{8,36}}.$$

En général, lorsque ω est de la forme $4x+3$, et ν de la forme $4x+1$, on peut décomposer l'équation (21) en deux autres de la forme

$$(46) \qquad 4p^{k'} = \delta^2 + \omega\varepsilon^2, \quad 4p^{k''} = 6^2 + \nu\omega\gamma^2,$$

ou l'équation (22) en deux autres de la forme

$$(47) \qquad 4p^{k'} = \omega\delta^2 + \varepsilon^2, \quad 4p^{k''} = \omega 6^2 + \nu\gamma^2.$$

Car, chacun des binômes

$$\delta^2 + \omega\varepsilon^2, \quad \omega\delta^2 + \varepsilon^2, \quad 6^2 + \nu\omega\gamma^2, \quad \omega 6^2 + \nu\gamma^2$$

sera nécessairement impair ou divisible par 4, et, si l'un d'eux était impair, les deux termes de l'autre binôme dans la formule (21) ou (22) seraient pairs, et divisibles par le facteur 4, qu'on pourrait évidemment faire passer dans le binôme impair. Ajoutons que l'on pourra toujours supposer δ

et ε premiers entre eux, ou n'ayant d'autre commun diviseur que le nombre 2.

Cela posé, soit toujours p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément les expressions (39). $p^{k''}$ sera la plus haute puissanee de p, qui divise simultanément les produits (38). On aura d'ailleurs

$$k' = k - k'',$$

et l'on pourra résoudre l'équation

$$(48) \qquad 4p^{k''-2\lambda} = x^2 + \nu\omega y^2,$$

ou

$$(49) \qquad 4p^{k''-2\lambda} = \omega x^2 + \nu y^2.$$

De plus, on tirera des équations (29)

$$\begin{gathered} 16[\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) + \varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma)] \\ = 2(\delta^2 + \omega\varepsilon^2)\,(\mathit{6}^2 - \omega\nu\gamma^2) = 8p^{k'+2\lambda}\,(x^2 - \omega\nu y^2), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 16[\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u) + \varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)] \\ = 2(\delta^2 - \omega\varepsilon^2)\,(\mathit{6}^2 + \omega\nu\gamma^2) = 8p^{k''}\,(\delta^2 - \omega\varepsilon^2); \end{gathered}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(50) \qquad \begin{cases} x^2 - \nu\omega y^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) + \varphi(\alpha,\varsigma^u)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma)}{p^{k'+2\lambda}}, \\ \delta^2 - \omega\varepsilon^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\;\varphi'(\alpha,\varsigma^u) + \varphi(\alpha^a,\varsigma)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k''}}. \end{cases}$$

En opérant de la même manière, on tirera des formules (30)

$$(51) \qquad \begin{cases} \omega x^2 - \nu y^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) + \varphi(\alpha,\varsigma^u)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma)}{p^{k'+2\lambda}}, \\ \varepsilon^2 - \omega\delta^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\;\varphi(\alpha,\varsigma^u) + \varphi(\alpha^a,\varsigma)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k''}}. \end{cases}$$

Si, dans les équations (50), (51) on remplace ρ par r, on déduira facilement des formules ainsi obtenues et des équations (46), (47), (48), (49) les valeurs de x, y, δ, ε.

Exemple. Soient toujours

$$\omega = 3, \quad \nu = 5.$$

On aura

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = \mathrm{R}_{1,4}, \quad \varphi(\alpha^a,\varsigma) = \mathrm{R}_{14,11}, \quad \varphi(\alpha,\varsigma'') = \mathrm{R}_{7,13}, \quad \varphi(\alpha^a,\varsigma'') = \mathrm{R}_{2,8}$$
$$k = 1, \quad k' = 0, \quad k'' = 1, \quad \lambda = 0,$$

et les formules (50) donneront

$$(52) \qquad \begin{cases} x^2 - 15y^2 = 2(\mathrm{R}_{1,4}\mathrm{R}_{2,8} + \mathrm{R}_{7,13}\mathrm{R}_{14,11}) \\ \delta^2 - \;\, 3\varepsilon^2 \;= 2\,\dfrac{\mathrm{R}_{1,4}\mathrm{R}_{7,3} + \mathrm{R}_{2,8}\mathrm{R}_{14,11}}{p}. \end{cases}$$

De plus, les formules (46) et (48) donneront

$$(53) \qquad \delta^2 + 3\varepsilon^2 = 4, \quad x^2 + 15y^2 = 4p.$$

Enfin, l'on aura

$$\mathrm{R}_{1,4}\mathrm{R}_{14,11} = p, \quad \mathrm{R}_{2,8}\mathrm{R}_{13,7} = p,$$

et par suite les formules (52) se réduiront à

$$x^2 - 15y^2 = 2\left(\mathrm{R}_{7,13}\mathrm{R}_{14,11} + \frac{p^2}{\mathrm{R}_{7,13}\mathrm{R}_{14,11}}\right),$$
$$\delta^2 - 3\varepsilon^2 = 2\left(\frac{\mathrm{R}_{7,13}}{\mathrm{R}_{14,11}} + \frac{\mathrm{R}_{14,11}}{\mathrm{R}_{7,13}}\right).$$

Si, dans ces dernières, on remplace ρ par r, on trouvera

$$(54) \qquad \left.\begin{cases} x^2 - 15y^2 \equiv 2\Pi_{1,4}\Pi_{2,8} \\ \delta^2 - \;\, 3\varepsilon^2 \equiv 2\left(\dfrac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,8}} + \dfrac{\Pi_{2,8}}{\Pi_{1,4}}\right) \end{cases}\right\}, \ (\mathrm{mod.}\, p);$$

puis, en combinant les formules (54) avec les suivantes

$$\delta^2 + 3\varepsilon^2 = 4, \quad x^2 + 15y^2 \equiv 0, \ (\text{mod. } p),$$

on trouvera

$$x^2 \equiv -15y^2 \equiv \Pi_{1,4}\Pi_{2,8}, \ (\text{mod. } p).$$

Ajoutons que la première des équations (53) entraîne l'une des suppositions

$$\delta^2 = 4, \quad \varepsilon^2 = 0;$$
$$\delta^2 = 1, \quad \varepsilon^2 = 1;$$

en vertu desquelles

$$\delta^2 - 3\varepsilon^2$$

se réduit à 4 ou à -2. Donc

(55) $$\frac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,8}} + \frac{\Pi_{2,8}}{\Pi_{1,4}} \equiv 2 \text{ ou } -1, \ (\text{mod. } p).$$

Quant aux valeurs de x, y, elles doivent être paires, pour que la seconde des équations (53) puisse être vérifiée.

Prenons pour fixer les idées $p = 31$. On aura

$$\Pi_{1,4} = 14, \quad \Pi_{2,8} = 9, \ (\text{mod. } 31)$$
$$\frac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,8}} + \frac{\Pi_{2,8}}{\Pi_{1,4}} \equiv 5 + \frac{1}{5} \equiv 5 - 6 \equiv -1, \ (\text{mod. } 31)$$
$$\delta^2 = 1, \quad \varepsilon^2 = 1,$$
$$\frac{x^2}{4} \equiv -15\frac{y^2}{4} \equiv 16 \equiv -15, \ (\text{mod. } 31)$$
$$31 = 16 + 15 = 4^2 + 15 \cdot 1^2.$$

Prenons encore $p = 61$. On trouvera

$$\Pi_{1,4} \equiv -\frac{9}{2}, \quad \Pi_{2,8} \equiv \frac{5}{2}, \ (\text{mod. } 61)$$

$$\frac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,8}} + \frac{\Pi_{2,8}}{\Pi_{1,4}} \equiv -\frac{9}{5} - \frac{5}{9} \equiv -1,$$
$$\frac{x^2}{4} \equiv -15\frac{y^2}{4} \equiv 1 \equiv -60,$$
$$61 = 1 + 60 = 1^2 + 15.2^2.$$

Supposons maintenant que ω soit de la forme $4x + 1$, et ν de la forme $4x + 3$. L'équation (23) sera divisible en deux autres de la forme

$$(56) \qquad 4p^{k'} = \delta^2 + \nu\varepsilon^2, \quad 4p^{k''} = \beta^2 + \omega\nu\gamma^2,$$

ou l'équation (24) en deux autres, de la forme

$$(57) \qquad 4p^{k'} = \nu\delta^2 + \varepsilon^2, \quad 4p^{k''} = \nu\beta^2 + \omega\gamma^2,$$

δ, ε étant des nombres non divisibles par p. Si d'ailleurs p^λ désigne la plus haute puissance de p, qui divise simultanément β et γ, alors, en posant

$$\beta = p^\lambda x, \quad \gamma = p^\lambda y,$$

on réduira la seconde des équations (56) ou (57) à

$$(58) \qquad 4p^{k''-2\lambda} = x^2 + \nu\omega y^2,$$

ou bien à

$$(59) \qquad 4p^{k''-2\lambda} = \nu x^2 + \omega y^2.$$

Enfin, au lieu des formules (29) ou (30), on trouvera

$$(60)\left\{\begin{array}{c}
4\varphi(\alpha,\varsigma) = \\
[\delta - \varepsilon(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta + \gamma(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha,\varsigma^u) = \\
[\delta + \varepsilon(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta - \gamma(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma) = \\
[\delta - \varepsilon(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta - \gamma(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})] \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) = \\
[\delta + \varepsilon(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta + \gamma(\alpha - \alpha^a + \ldots - \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma - \varsigma^u + \ldots - \varsigma^{u^{\nu-2}})]
\end{array}\right.$$

ou bien

$$
(61)\left\{\begin{array}{c}
4\varphi(\alpha,\varsigma)= \\
[\varepsilon+\delta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[-\beta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})+\gamma(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha,\varsigma^u)= \\
[\varepsilon-\delta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})+\gamma(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma)= \\
[\varepsilon+\delta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[-\beta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})-\gamma(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})], \\
4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)= \\
[\varepsilon-\delta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]\,[\beta(\varsigma-\varsigma^u+\ldots\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})-\gamma(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})];
\end{array}\right.
$$

puis on en conclura, dans le premier cas,

$$
(62)\qquad \left\{\begin{aligned}
x^2-\omega\nu y^2 &= 2\,\frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)+\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u)}{p^{k'+2\lambda}}, \\
\delta^2-\nu\varepsilon^2 &= 2\,\frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma)+\varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k''}};
\end{aligned}\right.
$$

et dans le second cas,

$$
(63)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega y^2-\nu x^2 &= 2\,\frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)+\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u)}{p^{k'+2\lambda}}, \\
\varepsilon^2-\nu\delta^2 &= 2\,\frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma)+\varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k''}}.
\end{aligned}\right.
$$

Exemple. Supposons

$$\omega=5,\quad \nu=7.$$

On trouvera

$$u=3,\quad a=2,$$

$$v\equiv\frac{1}{7}\equiv-2,\ (\mathrm{mod.}\ 5)$$

$$u^m+v\nu(h-u^m)=u^m-14(h-u^m)=15u^m-14h,$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma) = \frac{\Theta_{15-14h}\Theta_{-5-14h}\Theta_{-10-14h}}{\Theta_{-42h}},$$
$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^u) = \frac{\Theta_{-15-14h}\Theta_{5-14h}\Theta_{10-14h}}{\Theta_{-42h}},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = R_{1,16}\,R_{11,17}R_{4,9}\;R_{13,29} = p^3\frac{R_{13,29}}{R_{34,19}R_{24,18}R_{31,26}},$$
$$\varphi(\alpha,\varsigma^u) = R_{34,19}R_{24,18}R_{26,31}R_{22,6} = p\,\frac{R_{34,19}R_{24,18}R_{31,26}}{R_{13,29}},$$

$$\varphi(\alpha^a,\varsigma) = R_{2,22}\,R_{24,32}R_{8,18}\,R_{26,23} = p^2\frac{R_{24,32}R_{26,23}}{R_{33,13}R_{27,17}},$$
$$\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) = R_{33,3}\,R_{1,13}\,R_{27,17}R_{9,12} = p^2\frac{R_{33,3}\;R_{27,17}}{R_{34,22}R_{26,23}};$$

$$k=4,\quad k''=3,\quad k'=1,\quad \lambda=1.$$

On aura par suite

$$x^2-\omega\nu y^2 \quad \text{ou} \quad \omega y^2-\nu x^2 =$$
$$2\left[\frac{R_{34,19}R_{24,18}R_{31,26}R_{24,32}R_{26,23}}{R_{13,29}R_{33,13}R_{27,17}} + p^2\times\text{etc.}\right],$$
$$\delta^2-\nu\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2-\nu\delta^2 =$$
$$2\left[\frac{R_{34,19}R_{24,18}R_{31,26}R_{33,3}\;R_{27,17}}{R_{13,29}R_{34,22}R_{26,23}} + p^2\times\text{etc.}\right);$$

puis on en conclura

$$x^2-35y^2 \text{ ou } 5y^2-7x^2 \equiv 2\frac{\Pi_{1,16}\Pi_{11,17}\Pi_{4,9}}{\Pi_{22,6}}\,\frac{\Pi_{11,3}\Pi_{9,12}}{\Pi_{2,22}\Pi_{8,18}},\ (\text{mod.}\,p),$$
$$\delta^2-\ 7\varepsilon^2 \text{ ou } \varepsilon^2-7\delta^2 \equiv 2\frac{\Pi_{1,16}\Pi_{11,17}\Pi_{4,9}}{\Pi_{22,6}}\,\frac{\Pi_{2,32}\Pi_{8,18}}{\Pi_{1,13}\Pi_{9,12}},\ (\text{mod.}\,p).$$

On aura d'ailleurs, en vertu des formules (56),

$$\delta^2+7\varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad \varepsilon^2+7\delta^2 = 4p,$$
$$x^2+35y^2 \quad \text{ou} \quad 5y^2+7x^2 = 4p.$$

D'autre part, p étant de la forme $15x+1$, on ne peut supposer

$$5y^2+7x^2=4p,$$

puisqu'on en tirerait

$$7x^2\equiv 4,\quad 7\equiv\left(\frac{2}{x}\right)^2,\quad 7^2\equiv 1,\ (\text{mod. } 5),$$

tandis que

$$7^2=49\equiv -1,\ (\text{mod. } 5).$$

Donc, on aura simplement

(64) $$\delta^2+7\varepsilon^2=4p,\quad x^2+35y^2=4p;$$

les valeurs de

$$x^2,\ y^2,\ \delta^2,\ \varepsilon^2$$

pouvant être déterminées par les formules

(65) $$\left\{\begin{aligned} x^2 &\equiv 35y^2\equiv\frac{\Pi_{1,16}\Pi_{11,17}\Pi_{4,9}}{\Pi_{22,6}}\,\frac{\Pi_{11,3}\Pi_{9,12}}{\Pi_{2,22}\Pi_{8,18}},\\ \delta^2 &\equiv 7\varepsilon^2\equiv\frac{\Pi_{1,16}\Pi_{11,17}\Pi_{4,9}}{\Pi_{22,6}}\,\frac{\Pi_{2,32}\Pi_{8,18}}{\Pi_{1,13}\Pi_{9,12}}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on eût pris au contraire

$$\omega=7,\quad \nu=5,$$

on aurait trouvé

$$u=2,\quad a=3$$

$$v\equiv\frac{1}{5}\equiv 3,\ (\text{mod. } 7)$$

$$u^m+v\nu(h-u^m)=15h-14u^m,$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)=\frac{\Theta_{15h-14}\Theta_{15h+14}}{\Theta_{30h}},$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^u)=\frac{\Theta_{15h+7}\Theta_{15h-7}}{\Theta_{30h}},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = \frac{\Theta_1\Theta_{-6}\Theta_{16}\Theta_9\Theta_{11}\Theta_4}{\Theta_{30}\Theta_{25}\Theta_{15}} = R_{1,29}R_{16,9}R_{11,4} = p^3\frac{1}{R_{34,6}R_{19,26}R_{24,31}},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma'') = \frac{\Theta_{22}\Theta_8\Theta_2\Theta_{23}\Theta_{32}\Theta_{18}}{\Theta_{30}\Theta_{25}\Theta_{15}} = R_{22,8}R_{2,23}R_{32,18} = p^2\frac{R_{32,18}}{R_{13,27}R_{33,12}},$$

$$\varphi(\alpha^a,\varsigma) = R_{34,6}R_{19,26}R_{24,31},$$

$$\varphi(\alpha^a,\varsigma'') = p\frac{R_{13,27}R_{33,12}}{R_{32,18}};$$

$$k=3,\quad k''=1,\quad k'=2,\quad \lambda=0,$$

$$4p = x^2+35y^2,\qquad 4p=\delta^2+7\varepsilon^2, \tag{66}$$

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &\equiv 35y^2 \equiv \frac{\Pi_{3,17}}{\Pi_{22,8}\Pi_{2,23}}\Pi_{1,29}\Pi_{16,9}\Pi_{11,4},\\ \delta^2 &\equiv 7\varepsilon^2 \equiv \frac{\Pi_{22,8}\Pi_{2,23}}{\Pi_{3,17}}\Pi_{1,29}\Pi_{16,9}\Pi_{11,4}. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Il est important d'observer que les équations (65) peuvent être présentées sous les formes

$$\left\{\begin{aligned} x^2 \equiv 35y^2 &\equiv \frac{1}{p^3}\left[\varphi(\alpha,\varsigma'')\,\varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'')\right],\\ &\equiv \frac{1}{p^3}\left[\frac{\Theta_6\Theta_{26}\Theta_{31}\Theta_{34}\Theta_{19}\Theta_{24}}{\Theta_{28}\Theta_7}\,\frac{\Theta_{22}\Theta_2\Theta_{32}\Theta_8\Theta_{18}\Theta_{23}}{\Theta_{21}\Theta_{14}} + \text{etc.}\right],\\ \delta^2 \equiv 7\varepsilon^2 &\equiv \frac{1}{p^3}\left[\frac{\Theta_6\Theta_{26}\Theta_{31}\Theta_{34}\Theta_{19}\Theta_{24}}{\Theta_{28}\Theta_7}\,\frac{\Theta_{27}\Theta_{17}\Theta_{12}\Theta_{13}\Theta_{33}\Theta_3}{\Theta_{21}\Theta_{14}} + \text{etc.}\right]. \end{aligned}\right. \tag{68}$$

On tirera au contraire des formules (67)

$$\left\{\begin{aligned} x^2 \equiv 35y^2 &\equiv \frac{1}{p^2}\left[\varphi(\alpha,\varsigma'')\,\varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'')\right]\\ &\equiv \frac{1}{p^2}\left[\frac{\Theta_{34}\Theta_{19}\Theta_{24}\Theta_6\Theta_{26}\Theta_{31}}{\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20}}\,\frac{\Theta_{22}\Theta_2\Theta_{32}\Theta_8\Theta_{18}\Theta_{23}}{\Theta_{30}\Theta_{25}\Theta_{15}} + \text{etc.}\right],\\ \delta^2 \equiv 7\varepsilon^2 &\equiv \frac{1}{p}\left[\varphi(\alpha^a,\varsigma)\;\varphi(\alpha^a,\varsigma'') + \varphi(\alpha,\varsigma)\;\varphi(\alpha,\varsigma'')\right]\\ &\equiv \frac{1}{p}\left[\frac{\Theta_{34}\Theta_{19}\Theta_{24}\Theta_6\Theta_{26}\Theta_{31}}{\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20}}\,\frac{\Theta_{13}\Theta_{33}\Theta_3\Theta_{27}\Theta_{17}\Theta_{12}}{\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20}} + \text{etc.}\right]. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Or, la première des formules (68) coïncide évidemment avec la première des formules (69), attendu que l'on a

$$p^3\,\Theta_{28}\Theta_7\Theta_{21}\Theta_{14} = p^5 = p^2\,\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20}\Theta_{30}\Theta_{25}\Theta_{15}.$$

Quant à la seconde des formules (68), elle fournit des valeurs de δ, ε distinctes de celles que fournit la seconde des équations (69), et si, pour plus de commodité, on désigne ces dernières par

$$\delta', \varepsilon',$$

on aura

$$\frac{\delta'^2}{\delta^2} \equiv \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} \equiv p^2 \frac{\Theta_{28}\Theta_7\Theta_{14}\Theta_{21}}{(\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20})^2} \equiv \frac{p^4}{(\Theta_5\Theta_{10}\Theta_{20})^2} \equiv \frac{p^4}{p^2 R^2_{5,10}}$$
$$\equiv R^2_{30,20} \equiv \Pi^2_{5,10}.$$

Ainsi les équations

$$(70) \qquad \delta^2 + 7\varepsilon^2 = 4p, \quad \delta'^2 + 7\varepsilon'^2 = 4p^2$$

seront vérifiées simultanément, de manière que l'on ait

$$(71) \qquad \frac{\delta'^2}{\delta^2} = \frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2} = \Pi^2_{5,10}, \ (\text{mod. } p).$$

Exemple. Supposons $p = 71$. On aura

$$71 = 64 + 7 = 8^2 + 7 \cdot 1^2 = (8 + 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})(8 - 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}),$$
$$71^2 = (8 + 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^2 (8 - 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})^2$$
$$= (57 + 16 \cdot 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})(57 - 16 \cdot 7^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})$$
$$= 57^2 + 7 \cdot 16^2,$$

$$\frac{\delta}{2} = 8, \quad \frac{\varepsilon}{2} = 1, \quad \frac{\delta'}{2} = 57, \quad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = 16,$$

et l'équation (71) donnera

$$\left(\frac{57}{8}\right)^2 \equiv 16^2 \equiv \Pi^2_{5,10}, \ (\text{mod. } 71).$$

Effectivement $57 \equiv 8.16$, (mod. 71), et de plus

$$\Pi_{5,10} \equiv \frac{15\varpi(15\varpi-1)\ldots(10\varpi+1)}{1.2\ldots5\varpi} \equiv \frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10} \equiv 16.$$

Supposons enfin que ω et ν soient tous deux de la forme $4x+3$. Alors, en posant

$$A = 6\delta, \quad B = 6\varepsilon, \quad C = \gamma\delta, \quad D = \gamma\varepsilon,$$

on tirera des formules (10), (13)

$$(72)\left\{\begin{aligned} 4\varphi(\alpha,\varsigma) &= [\delta+\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})][6+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})],\\ 4\varphi(\alpha,\varsigma^u) &= [\delta+\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})][6-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})],\\ 4\varphi(\alpha^a,\varsigma) &= [\delta-\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})][6+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})],\\ 4\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) &= [\delta-\varepsilon(\alpha-\alpha^a+\ldots-\alpha^{a^{\omega-2}})][6-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})]. \end{aligned}\right.$$

De plus, comme, dans la formule (25), $\delta^2+\omega\varepsilon^2$ ne peut être impair, sans que 6, γ deviennent pairs l'un et l'autre, et qu'alors on peut faire passer dans δ^2 et ε^2 le facteur 4 commun à 6^2 et γ^2, on pourra toujours partager la formule (25) en deux autres de la forme

$$(73) \qquad 4p^{k'} = \delta^2+\omega\varepsilon^2, \quad 4p^{k''} = 6^2+\nu\gamma^2.$$

On pourra d'ailleurs supposer δ, ε non divisibles par p; et, si l'on nomme p^λ la plus haute puissance de p qui divise 6 et γ, alors, en faisant

$$6 = p^\lambda x, \quad \gamma = py,$$

on trouvera

$$(74) \qquad 4p^{k''-2\lambda} = x^2+\nu y^2.$$

D'autre part, il est clair que $p^{k''}$ sera la plus haute puissance de p qui divise les deux produits

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u), \quad \varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u),$$

et p^λ la plus haute puissance de μ, qui divise simultanément les expressions

$$\varphi(\alpha,\varsigma),\quad \varphi(\alpha,\varsigma^u),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma),\quad \varphi(\alpha^a,\varsigma^u);$$

et l'on tirera des équations (72)

$$(75)\qquad \begin{cases} x^2-\nu y^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma)+\varphi(\alpha,\varsigma^u)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k'+2\lambda}}, \\ \delta^2-\omega\varepsilon^2 = 2\,\dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u)+\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^{k''}}. \end{cases}$$

Exemple. Prenons

$$\omega=3,\quad \nu=7.$$

On trouvera

$$a=2,\quad u=3$$

$$v\equiv\frac{1}{\nu}\equiv 1,\ (\text{mod. }\omega)$$

$$u^m+v\nu(h-u^m)=u^m+7(h-u^m)=7h-6u^m,$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)=\frac{\Theta_{7h-6}\Theta_{7h-12}\Theta_{7h+18}}{\Theta_{21h}},$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^u)=\frac{\Theta_{7h+6}\Theta_{7h+12}\Theta_{7h-18}}{\Theta_{21h}},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma)=\frac{\Theta_1\,\Theta_{16}\Theta_4}{\Theta_{21}}=pR_{1,4}=pR_{4,16}=pR_{1,16},$$

$$\varphi(\alpha,\varsigma^u)=\frac{\Theta_{13}\Theta_{19}\Theta_{10}}{\Theta_{21}}=pR_{10,13}=pR_{13,19}=pR_{10,19},$$

$$\varphi(\alpha^2,\varsigma)=\frac{\Theta_8\,\Theta_2\,\Theta_{11}}{\Theta_{42}}=pR_{2,8}=pR_{8,11}=pR_{2,11},$$

$$\varphi(\alpha^2,\varsigma^u)=\frac{\Theta_{20}\Theta_5\,\Theta_{17}}{\Theta_{42}}=pR_{20,5}=pR_{5,17}=pR_{20,17}.$$

Ainsi l'on aura

$$\varphi(\alpha,\varsigma)=\frac{p^2}{R_{20,17}},\quad \varphi(\alpha,\varsigma^u)=pR_{13,19},$$

$$\varphi(\alpha^2,\varsigma)=\frac{p^2}{R_{13,19}},\quad \varphi(\alpha^2,\varsigma^u)=pR^{20,17};$$

$$k = 3, \quad k'' = 3, \quad k' = 0, \quad \lambda = 1,$$

et par suite

(76) $$4 = \delta^2 + 3\varepsilon^2, \quad 4p = x^2 + 7y^2,$$

(77) $$\begin{cases} x^2 \equiv -7y^2 \equiv \mathrm{R}_{13,19}\,\mathrm{R}_{20,17} \equiv \Pi_{2,8}\,\Pi_{1,4} \\ \frac{1}{2}(\delta^2 - 3\varepsilon^2) \equiv \frac{\mathrm{R}_{13,19}}{\mathrm{R}_{20,17}} + \frac{\mathrm{R}_{20,17}}{\mathrm{R}_{13,19}} \equiv \frac{\Pi_{2,8}}{\Pi_{1,4}} + \frac{\Pi_{1,4}}{\Pi_{2,8}}. \end{cases}$$

Supposons, pour fixer les idées, $p = 43$. On aura $\varpi = 2$

$$\Pi_{1,4} = \frac{5\varpi\ldots(4\varpi+1)}{1.2\ldots\varpi} = \frac{10.9}{1.2} = 45 \equiv 2,$$

$$\Pi_{2,8} = \frac{10\varpi\ldots(8\varpi+1)}{1.2\ldots2\varpi} = \frac{20.19.18.17}{1.2.3.4} = 3.17.19.5 \equiv -14,$$

$$\frac{x^2}{4} \equiv -7\frac{y^2}{4} \equiv -\frac{28}{4} \equiv -7 \equiv 36,$$

$$\frac{1}{2}(\delta^2 - 3\varepsilon^2) \equiv -7 - \frac{1}{7} \equiv -1,$$

$$\delta^2 - 3\varepsilon^2 \equiv -2, \quad \delta^2 + 3\varepsilon^2 = 4,$$

et par suite

$$\delta^2 = 1, \quad \varepsilon^2 = 1, \quad \frac{1}{4}x^2 = 36, \quad \frac{1}{2}y^2 = 1.$$

Effectivement

$$43 = 36 + 7 = 6^2 + 7.1^2.$$

Il est bon d'observer qu'on aura encore, en vertu des principes établis dans le § I$^{\text{er}}$,

(78) $$x^2 \equiv \Pi_{3,6}^2.$$

Donc

(79) $$\Pi_{3,6}^2 \equiv \Pi_{1,4}\Pi_{2,8}.$$

Effectivement, si l'on prend $p = 43$, on trouvera

$$\Pi_{3,6} = \frac{18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6} = 6.13.14.17 \equiv -12,$$

$$\Pi_{3,6}^2 \equiv 144 \equiv 15 \equiv -28 \equiv \Pi_{1,4}\Pi_{2,8}.$$

On aura d'ailleurs, en vertu de la première des formules (75),

$$x^2-7y^2=\frac{p^2}{2}\left[\frac{\Theta_1\Theta_4\Theta_{16}}{\Theta_{21}}\,\frac{\Theta_2\Theta_8\Theta_{11}}{\Theta_{21}}+\frac{\Theta_5\Theta_{20}\Theta_{17}}{\Theta_{21}}\,\frac{\Theta_{10}\Theta_{19}\Theta_{13}}{\Theta_{21}}\right],$$

$$x^2-7y^2=\frac{p^2}{2}\left[\Theta_1\Theta_4\Theta_{16}\times\Theta_2\Theta_8\Theta_{11}+\frac{p^2}{\Theta_1\Theta_4\Theta_{16}\times\Theta_2\Theta_8\Theta_{11}}\right],$$

tandis que les principes ci-dessus rappelés donneront

$$x^2-7y^2=\frac{2}{p^2}\left[\Theta_1^2\Theta_2^2\Theta_4^2+\frac{p^2}{\Theta_1^2\Theta_2^2\Theta_4^2}\right].$$

En général, on vérifie l'équation

$$v=\frac{1}{\mathrm{v}},\ (\text{mod. } \omega),$$

lorsque ω est premier, en prenant

$$v=\mathrm{v}^{\omega-2}.$$

Donc la formule (1) peut être réduite à

$$(80)\quad \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma)=\frac{\Theta_{1+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-1)}\,\Theta_{u^2+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-u^2)}\cdots\Theta_{u^{\nu-3}+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-u^{\nu-3})}}{\Theta_{\mathrm{v}^{\omega-1}\frac{\nu-1}{2}h}},$$

et la formule (2) à

$$(81)\quad \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^u)=\frac{\Theta_{u+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-u)}\,\Theta_{u^3+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-u^3)}\cdots\Theta_{u^{\nu-2}+\mathrm{v}^{\omega-1}(h-u^{\nu-2})}}{\Theta_{\mathrm{v}^{\omega-1}\frac{\nu-1}{2}h}}.$$

Par suite, les divers facteurs que renfermera le numérateur de la fraction équivalente à $\varphi(\alpha,\varsigma)$ seront de la forme

$$\Theta_{u^{2m}+\mathrm{v}^{\omega-1}(a^{2m'}-u^{2m})}.$$

De même, les numérateurs des fractions équivalentes à $\varphi(\alpha,\varsigma^u)$, $\varphi(\alpha^a,\varsigma)$, $\varphi(\alpha^a,\varsigma^u)$ auront pour facteurs des expressions de la forme

$$\Theta u^{2m+1} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'} - u^{2m+1}),$$
$$\Theta u^{2m} \quad + \nu^{\omega-1}(a^{2m'+1} - u^{2m}),$$
$$\Theta u^{2m+1} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'+1} - u^{2m'+1}).$$

Cela posé, il sera facile de déterminer les nombres ci-dessus désignés par

$$k,\ k',\ k'',\ \lambda$$

si l'on parvient à trouver combien il y a de nombres entiers de chacune des formes

$$u^{2m} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'} - u^{2m}), \quad u^{2m+1} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'} - u^{2m+1}),$$
$$u^{2m} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'+1} - u^{2m}), \quad u^{2m+1} + \nu^{\omega-1}(a^{2m'+1} - u^{2m+1}),$$

entre les limites $0, \frac{n}{2}$.

§ IV.

Suite du même sujet.

Supposons, comme dans le § II,

$$n = \omega\nu, \quad (\nu \text{ étant un nombre premier}),$$
$$p - 1 = n\varpi = \nu\psi, \quad \psi = \omega\varpi;$$

et soient

$$\rho,\ \alpha,\ \varsigma$$

des racines primitives des équations

$$x^n = 1, \quad x^\omega = 1, \quad x^\nu = 1.$$

Soient encore θ, τ des racines primitives de

$$x^p = 1, \quad x^{p-1} = 1,$$

et t, s, u des racines primitives des équivalences

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p), \quad x^{\nu} \equiv 1, \ (\text{mod. } p),$$
$$x^{\nu-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu).$$

Soit enfin

(10) $$v = \frac{1}{\nu}, \ (\text{mod. } \omega).$$

On aura

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^2}) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^4}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^{\nu-3}}) =$$
$$\frac{\Theta_{1+v\nu(h-1)}\,\Theta_{u^2+v\nu(h-u^2)}\,\Theta_{u^4+v\nu(h-u^4)}\ldots\Theta_{u^{\nu-3}+v\nu(h-u^{\nu-3})}}{\Theta_{v\frac{\nu(\nu-1)}{2}h}},$$

$$\mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u}) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^3}) = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^5}) = \ldots = \mathfrak{F}(\alpha^h,\varsigma^{u^{\nu-2}}) =$$
$$\frac{\Theta_{u+v\nu(h-u)}\,\Theta_{u^3+v\nu(h-u^3)}\,\Theta_{u^5+v\nu(h-u^5)}\ldots\Theta_{u^{\nu-2}+v\nu(h-u^{\nu-2})}}{\Theta_{v\frac{\nu(\nu-1)}{2}h}}.$$

Si ω est un nombre premier, on pourra prendre

$$v = \nu^{\omega-2}.$$

Soit d'ailleurs a une racine de l'équivalence

$$x^{\omega-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } \omega),$$

et faisons

$$\varphi(\alpha,\varsigma) = \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{a^2},\varsigma)\,\mathfrak{F}(\alpha^{a^4},\varsigma)\ldots\mathfrak{F}(\alpha^{a^{\omega-3}},\varsigma),$$
$$\chi(\alpha,\varsigma) = \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'').$$

On aura

$$\chi(\alpha,\varsigma) = \varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'') = \chi(\alpha^a,\varsigma''),$$
$$\chi(\alpha^a,\varsigma) = \varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma'') = \chi(\alpha,\varsigma'').$$

Observons maintenant : 1° que a et u vérifient les formules

$$a^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \omega), \quad u^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \nu),$$

et que $\frac{\omega-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$ seront pairs ou impairs, suivant que ω, ν seront de la forme $4x+1$ ou $4x+3$; 2° que dans une expression de la forme

$$\Theta_{u^m + \nu^{\omega-1}(a^{m'} - u^m)} = \Theta_{(1-\nu^{\omega-1})u^m + \nu^{\omega-1}a^{m'}}.$$

On peut remplacer u^m par un nombre équivalent à u^m, suivant le module ν, et $a^{m'}$ par un nombre équivalent à $a^{m'}$ suivant le module ω. On en conclura sans peine, 1° que chacune des expressions

$$\mathfrak{F}(\alpha,\varsigma),\ \mathfrak{F}(\alpha^a,\varsigma),\ \text{etc.}\ldots \mathfrak{F}(\alpha,\varsigma^u),\ \text{etc.}\ldots$$
$$\varphi(\alpha,\varsigma),\ \varphi(\alpha^a,\varsigma),\ \varphi(\alpha,\varsigma^u),\ \varphi(\alpha^a,\varsigma^u)$$

se réduit à une puissance de p, lorsque ν et ω sont tous deux de la forme $4x+1$; 2° que les expressions

$$\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma^u) = \chi(\alpha,\varsigma) = \chi(\alpha^a,\varsigma^u),$$
$$\varphi(\alpha^a,\varsigma)\,\varphi(\alpha,\varsigma^u) = \chi(\alpha^a,\varsigma) = \chi(\alpha,\varsigma^u),$$

se réduisent à des puissances de p, lorsque ν et ω sont tous deux de la forme $4x+3$. Mais si des deux nombres ω, ν l'un est de la forme $4x+1$, l'autre de la forme $4x+3$, ce sera seulement le produit

$$\chi(\alpha,\varsigma)\,\chi(\alpha^a,\varsigma)$$

qui se réduira à une puissance entière de p. Alors, si l'on fait, pour abréger,

$$\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} - \text{etc.}\ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{u^{\nu-2}} = \Delta,$$
$$\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \text{etc.}\ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{a^{\omega-2}} = \Delta',$$

on aura

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} = \frac{\Delta - 1}{2}, \quad \varsigma^{u} + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}} = -\frac{\Delta + 1}{2},$$

$$\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} = \frac{\Delta' - 1}{2}, \quad \alpha^{a} + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}} = -\frac{\Delta' + 1}{2};$$

et $\chi(\alpha,\varsigma)$ sera une fonction entière et linéaire des polynomes

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}, \quad \varsigma^{u} + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}},$$
$$\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}}, \quad \alpha^{a} + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}},$$

qui restera invariable, tandis que l'on remplacera simultanément ς par ς^u et α par α^a.* Donc $2\chi(\alpha,\varsigma)$ sera une fonction entière et linéaire de Δ et Δ', qui ne changera pas quand on remplacera simultanément Δ par $-\Delta$, Δ' par $-\Delta'$. On aura donc

$$(1) \qquad 2\chi(\alpha,\varsigma) = A + B\Delta\Delta',$$

---

* Il faudra que l'on ait

$$\chi(\alpha,\varsigma) = f$$
$$+ g[(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}})(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) + (\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}})]$$
$$+ h[(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}})(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}) + (\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}})]$$
$$= f + \frac{g}{2}(\Delta\Delta' + 1) + \frac{h}{2}(1 - \Delta\Delta'),$$

f, g, h étant entiers. Donc

$$2\chi(\alpha,\varsigma) = 2f + g + h + (g - h)\Delta\Delta',$$

ou

$$2\chi(\alpha,\varsigma) = A + B\Delta\Delta',$$

A, B étant de même espèce.

A, B désignent deux quantités entières. On trouvera au contraire

$$(2)\qquad 2\chi(\alpha^n,\varsigma) = A - B\Delta\Delta',$$

et par suite

$$4\chi(\alpha,\varsigma)\,\chi(\alpha^n,\varsigma) = A^2 - B^2\Delta^2\Delta'^2 = A^2 + \nu\omega B^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(3)\qquad 4p^{2k} = A^2 + \nu\omega B^2, *$$

A, B étant deux nombres de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs, ou tous deux impairs.

Exemple. Soient

$$\omega = 3,\quad \nu = 5.$$

On trouvera $k = 2$,

$$4p^2 = A^2 + 15B^2.$$

Cette dernière équation ne peut subsister, quand A et B sont impairs, puisque alors $A^2 + 15B^2$ est divisible par 8. Donc

$$A = 2X,\quad B = 2Y,$$

$$(4)\qquad p^2 = X^2 + 15Y^2.$$

Dailleurs p^2, divisé par 8, donne 1 pour reste. Donc X doit être impair, et y pair. Donc $Y^2 = 4x^2y^2$

$$(5)\qquad p^2 - X^2 = 60x^2y^2.$$

Enfin $p - X$, $p + X$ devant être pairs, et $\frac{p-X}{2}$, $\frac{p+X}{2}$

---

* $\chi(\alpha,\varsigma)$ et $\chi(\alpha^n,\varsigma)$ sont des produits de plusieurs facteurs de la forme $R_{h,h'}$, dont le nombre est nécessairement pair ou de la forme $2k$.

devant être premiers entre eux, puisque leur somme p est un nombre premier, l'équation (5) ou

$$\frac{p-X}{2}\,\frac{p+X}{2}=15x^2y^2$$

se décomposera en deux autres, de la forme

$$\frac{p+X}{2}=x^2,\quad \frac{p-X}{2}=15y^2,$$

ou

$$\frac{p+X}{2}=3x^2,\quad \frac{p-X}{2}=5y^2.$$

Mais, dans le dernier cas, on trouverait

$$p=3x^2+5y^2,\quad 3x^2\equiv 1,\ (\text{mod. } 5)$$

$$x^2\equiv\frac{1}{3}\equiv 2,\ (\text{mod. } 5),$$

ce qui est impossible. Donc, le premier cas est seul admissible, et l'on aura

(6) $$p=x^2+15y^2,\quad X=x^2-15y^2.$$

En général, l'équation (3) peut s'écrire comme il suit :

(7) $$(2p^k-A)(2p^k+A)=\nu\omega B^2.$$

Soit p^λ la plus haute puissance de λ, qui divise simultanément A et B; on pourra faire

(8) $$A=p^\lambda X,\quad B=p^\lambda Y,\quad 2k-2\lambda=2\mu,$$

et l'équation (7) deviendra

$$4p^{2k-2\lambda}=4p^{2\mu}=X^2+\nu\omega Y^2$$

ou

(9) $$(2p^\mu+X)(2p^\mu-X)=\omega\nu Y^2.$$

Alors X et Y seront premiers à p, et, comme tout diviseur commun des facteurs

$$(10)\qquad 2p^\mu + X,\quad 2p^\mu - X$$

divisera nécessairement leur somme $4p^\mu$, ces facteurs ne pourront avoir d'autre commun diviseur que 2 ou 4. Cela posé, si les facteurs (10) sont premiers entre eux, on vérifiera la formule (9) en prenant

$$(11)\qquad 2p^\mu + X = \nu x^2,\quad 2p^\mu - X = \omega y^2,$$

et par suite

$$(12)\qquad 4p^\mu = \nu x^2 + \omega y^2,$$

ou bien, en prenant

$$(13)\qquad 2p^\mu + X = x^2,\quad 2p^\mu - X = \nu\omega y^2,$$

et par suite

$$(14)\qquad 4p^\mu = x^2 + \nu\omega y^2.$$

Si les facteurs (10) sont pairs l'un et l'autre, X sera pair ainsi que Y, et, en posant

$$X = 2X',\quad Y = 2Y',$$

on tirera de la formule (9)

$$(15)\qquad (p^\mu + X')(p^\mu - X') = \omega\nu Y'^2,$$

ou

$$p^{2\mu} = X'^2 + \nu\omega Y'^2.$$

Dans cette dernière formule, le premier membre, divisé par 4, donne 1 pour reste. Il doit en être de même du second membre, ce qui exige que X' soit impair, et Y' pair, puisque $\nu\omega$, divisé par 4, donne 3 pour reste. Donc, on ne peut vérifier l'équation (15) qu'en supposant

$$p^{\mu}+X'=\nu x^2,\quad p^{\mu}-X'=\omega y^2,$$

et par suite

$$2p^{\mu}=\nu x^2+\omega y^2,$$

ce qui est inadmissible, puisque $2p^{\mu}$, divisé par 4, donne 2 pour reste, tandis que $\nu x^2+\omega y^2$ ne peut être pair, sans être divisible par 4; ou bien en supposant

$$p^{\mu}+X'=x^2,\quad p^{\mu}-X'=\omega\nu y^2,$$
$$2p^{\mu}=x^2+\omega\nu y^2,$$

ce qui est encore inadmissible pour la même raison, attendu que $x^2+\omega\nu y^2$, en devenant pair, sera toujours divisible par 4; ou en adoptant l'une des hypothèses suivantes

$$p^{\mu}+X'=2\nu x^2,\quad p^{\mu}-X'=2\omega y^2,$$
$$p^{\mu}=\nu x^2+\omega y^2; \tag{16}$$

$$p^{\mu}+X'=2x^2,\quad p^{\mu}-X'=2\omega\nu y^2,$$
$$p^{\mu}=x^2+\omega\nu y^2. \tag{17}$$

Donc, en définitive, on pourra toujours satisfaire par des valeurs entières de x, y à l'une des équations (12), (14), (16), (17).

Comme p est de la forme $\nu\omega x+1$, les équations (12), (16) ne peuvent subsister qu'autant que l'on a

$$\nu x^2\equiv 1,\ \text{ou}\ 4,\ (\text{mod.}\ \omega),$$
$$\omega x^2\equiv 1,\ \text{ou}\ 4,\ (\text{mod.}\ \nu),$$

et par suite

$$\nu^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \omega), \quad \omega^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \nu),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left[\frac{\nu}{\omega}\right] = 1, \quad \left[\frac{\omega}{\nu}\right] = 1.$$

On a d'ailleurs, dans tous les cas,

$$\left[\frac{\nu}{\omega}\right] = \left[\frac{\omega}{\nu}\right].$$

Si

$$\left[\frac{\nu}{\omega}\right] = \left[\frac{\omega}{\nu}\right] = -1,$$

on ne peut admettre que la formule (14) ou (17). Si de plus $1 + \nu\omega$ est divisible par 8, on ne peut admettre que la formule (17).

Observons encore que l'on tire des équations (1), (2) et (8)

$$A = p^\lambda X = \chi(\alpha, \varsigma) + \chi(\alpha^a, \varsigma).$$

Donc

$$X = \frac{\chi(\alpha,\varsigma) + \chi(\alpha^a,\varsigma)}{p^\lambda} = \frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma'')\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'')}{p^\lambda}.$$

D'ailleurs, on tire des formules (11)

$$2X = \nu x^2 - \omega y^2,$$

et des formules (13)

$$2X = x^2 - \nu\omega y^2.$$

Donc

$$\nu x^2 - \omega y^2 \quad \text{ou} \quad x^2 - \nu\omega y^2 = 2\,\frac{\varphi(\alpha,\varsigma)\,\varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma'')\,\varphi(\alpha^a,\varsigma'')}{p^\lambda}.$$

A l'aide de cette dernière équation et de la formule

$$4p^{\mu} = \nu x^2 + \omega y^2, \quad \text{ou} \quad x^2 + \nu\omega y^2,$$

on pourra déterminer x et y. On aura en effet

$$(18) \quad \left\{\begin{array}{l} \nu x^2 \equiv -\omega y^2 = \dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\ \varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma^u)\ \varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^\lambda}, \\ \text{ou} \\ x^2 \equiv -\nu\omega y^2 = \dfrac{\varphi(\alpha,\varsigma)\ \varphi(\alpha^a,\varsigma) + \varphi(\alpha,\varsigma^u)\ \varphi(\alpha^a,\varsigma^u)}{p^\lambda}. \end{array}\right. \quad (\text{mod}.\, p^{\mu}).$$

Ces dernières formules offriront le moyen de déterminer x et y lorsqu'on aura $\mu = 1$. Alors, en effet, il suffira de remplacer dans ces formules α et ς par les racines primitives des équivalences

$$x^{\omega} \equiv 1, \ (\text{mod}.\, p), \quad x^{\nu} \equiv 1, \ (\text{mod}.\, p).$$

En vertu de cette substitution, l'expression

$$\mathrm{R}_{h,k} = \frac{\Theta_h \Theta_k}{\Theta_{h+k}} = \left[\frac{1+1}{p}\right]^{-h-k} + \rho^h \left[\frac{1+t}{p}\right]^{-h-k} + \ldots + \rho^{(p-2)h} \left[\frac{1+t^{p-2}}{p}\right]^{-h-k}$$
$$= \left[\frac{1+1}{p}\right]^{l} + \rho^h \left[\frac{1+t}{p}\right]^{l} + \ldots + \rho^{(p-2)h} \left[\frac{1+t^{p-2}}{p}\right]^{l},$$

dans laquelle on suppose

$$k + h + l \equiv 0, (\text{mod}.\ n),$$

deviendra

$$(1+1)^{l\varpi} + r^h\,(1+t)^{l\varpi} + \ldots + r^{(p-2)h}\,(1+t^{p-2})^{l\varpi}$$
$$= (1+1)^{l\varpi} + t^{h\varpi}(1+t)^{l\varpi} + \ldots + t^{(p-2)h\varpi}(1+t^{p-2})^{l\varpi}$$
$$\equiv (p-1)\,\Pi_{n-h,\,n-k}, \ (\text{mod}.\, p),$$

la valeur de $\Pi_{h,k}$ étant

$$\Pi_{h,k} = \frac{1.2.3\ldots(h+k)\varpi}{(1.2\ldots h\varpi)(1.2\ldots k\varpi)}.$$

Soit maintenant

$$(19) \qquad R_{h,k} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1}.$$

On aura identiquement

$$a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1}$$
$$= \left[\frac{1+1}{p}\right]^l + \rho^h \left[\frac{1+t}{p}\right]^l + \ldots + \rho^{(p-2)h}\left[\frac{1+t^{p-2}}{p}\right]^l,$$

ou

$$a_0 + a_1\tau^{\varpi} + a_2\tau^{2\varpi} + \ldots + a_{n-1}\tau^{(n-1)\varpi}$$
$$= \tau^{l\varpi \mathrm{I}(2)} + \tau^{h\varpi}\tau^{l\varpi \mathrm{I}(1+t)} + \ldots + \tau^{(p-2)h\varpi}\tau^{l\varpi \mathrm{I}(1+t^{p-2})}.$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace τ par t, on aura

$$(20) \qquad a_0 + a_2 t^{\varpi} + a_2 t^{2\varpi} + \ldots + a_{n-1} t^{(n-1)\varpi}$$
$$\equiv (1+1)^{l\varpi} + t^{h\varpi}(1+t)^{l\varpi} + \ldots + t^{(p-2)h\varpi}(1+t^{p-2})^{l\varpi}, \ (\text{mod. } p).$$

Soit maintenant T une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p^{\mu}).$$

Je dis qu'on aura

$$(21) \qquad a_0 + a_1 T^{\varpi p^{\mu-1}} + a_2 T^{2\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + a_{n-1} T^{(n-1)\varpi p^{\mu-1}}$$
$$\equiv (1+1)^{l\varpi p^{\mu-1}} + T^{h\varpi p^{\mu-1}}(1+T)^{l\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + T^{(p-2)h\varpi p^{\mu-1}}(1+T^{p-2})^{l\varpi p^{\mu-1}}, \ (\text{mod.}$$

En effet, t étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p),$$

on pourra supposer

$$T \equiv t, \ (\text{mod. } p),$$

ou

$$T = t + py,$$

et on en conclura

$$T^{p^{\mu-1}} = (t+py)^{p^{\mu-1}} = t^{p^{\mu-1}} + p^{\mu}Y,$$

ou

$$T^{p^{\mu-1}} \equiv t^{p^{\mu-1}}, \ (\text{mod.}\, p^{\mu})^{**}.$$

De même, si l'on à

$$(1+t^{i})^{l} \equiv t^{j}, \ (\text{mod.}\, p),$$

on en conclura

$$(1+T^{i})^{l} \equiv (1+t^{i})^{l} \equiv t^{j} = T^{j}, \ (\text{mod.}\, p),$$

ou

$$(1+T^{i})^{l} = T^{j} + pz;$$

et par suite

$$(1+T^{i})^{lp^{\mu-1}} = (T^{j}+pz)^{p^{\mu-1}} = T^{jp^{\mu-1}} + p^{\mu}Z,$$

** En effet une équivalence de la forme

$$x \equiv y, \ (\text{mod.}\ p^{i})$$

pouvant s'écrire comme il suit

$$x = y + p^{i}z,$$

entraîne la formule

$$x^{p} = y^{p} + p^{i+1}z + \text{etc.}$$

ou

$$x^{p} \equiv y^{p}, \ (\text{mod.}\, p^{i+1}).$$

Donc l'équivalence

$$T \equiv t, \ (\text{mod.}\, p)$$

entraînera successivement les suivantes

$$T^{p} \equiv t^{p}, (\text{mod.}\, p^{2}), \quad T^{p^{2}} \equiv t^{p^{2}}, (\text{mod.}\ p^{3}), \text{etc} \ldots T^{p^{\mu-1}} \equiv t^{p^{\mu-1}} (\text{mod.}\ p^{\mu}).$$

ou

$$(1 + T^i)^{lp^{\mu-1}} = T^{ip^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu) \;**.$$

Au reste, l'équation (20) entraîne encore la suivante

$$(22) \qquad a_0 + a_1 t^{\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + a_{n-1} t^{(n-1)\varpi p^{\mu-1}}$$
$$= (1+1)^{l\varpi p^{\mu-1}} + t^{h\varpi p^{\mu-1}} (1+t)^{l\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + t^{(p-2)h\varpi p^{\mu-1}} (1 + t^{p-2})^{l\varpi p^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu)$$

Il est bon d'observer que, pour obtenir le premier membre de la formule (21), il suffit de remplacer, dans $R_{h,k}$,

$$\rho \text{ par } T^{\varpi p^{\mu-1}}$$

qui est ainsi que T^ϖ une racine primitive de l'équivalence

$$x^n \equiv 1, \text{ (mod. } p^\mu).$$

D'autre part, comme on aura

$$T^{p-1} \equiv 1, \text{ (mod. } p^\mu),$$

** De ce que l'équivalence

$$(1 + t^i)^l \equiv t^i, \text{ (mod. } p)$$

entraîne les suivantes

$$(1 + t^i)^{lp^{\mu-1}} \equiv t^{ip^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu), \quad \text{et} \quad (1 + T^i)^{lp^{\mu-1}} \equiv T^{ip^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu),$$

il résulte immédiatement que l'équivalence

$$t^{ih\varpi} (1 + t^i)^{l\varpi} \equiv t^{k\varpi}, \text{ (mod. } p)$$

entraîne les suivantes

$$t^{ih\varpi p^{\mu-1}} (1 + t^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} \equiv t^{k\varpi p^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu),$$
$$T^{ih\varpi p^{\mu-1}} (1 + T^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} \equiv T^{k\varpi p^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu).$$

Or, en vertu de ces dernières formules, l'équivalence (20) entraîne à son tour les équivalences (22) et (21).

et par suite

$$T^{p^\mu} \equiv T^{p^{\mu-1}} \equiv \ldots \equiv T^p \equiv T, \text{ (mod. } p^\mu\text{)},$$

la formule (21) pourra être réduite à

$$(23) \qquad \mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1 T^{\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + \mathrm{a}_{n-1} T^{(n-1)\varpi p^{\mu-1}} \equiv$$
$$(1+1)^{l\varpi p^{\mu-1}} + T^{h\varpi}(1+T)^{l\varpi p^{\mu-1}} + \ldots + T^{(p-2)h\varpi}(1+T^{p-2})^{l\varpi p^{\mu-1}}, \text{ (mod. } p^\mu\text{)}.$$

Il est facile de trouver un nombre équivalent suivant le module p^μ au second membre de la formule (23). En effet, on a

$$(1+T^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} = 1 + \frac{l\varpi p^{\mu-1}}{1} T^i + \frac{l\varpi p^{\mu-1}(l\varpi p^{\mu-1}-1)}{1.2} T^{2i} + \text{etc.},$$

et par suite

$$\Sigma(1+T^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} = p-1 + \frac{l\varpi p^{\mu-1}}{1} \Sigma T^i + \frac{l\varpi p^{\mu-1}(l\varpi p^{\mu-1}-1)}{1.2} \Sigma T^{2i} + \text{etc.},$$
$$\Sigma T^{ih\varpi}(1+T^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} = \Sigma T^{ih\varpi} + \frac{l\varpi p^{\mu-1}}{1} \Sigma T^{i(h\varpi+1)} + \text{etc.},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de i, renfermées entre les limites 0, $p-2$. D'ailleurs on aura

$$\Sigma T^k \equiv 0, \text{ (mod. } p^\mu\text{)}$$

lorsque k ne sera pas divisible par $p-1 = n\varpi$, et

$$\Sigma T^k = p - 1 \equiv n\varpi, \text{ (mod. } p^\mu\text{)}$$

dans le cas contraire. Donc

$$(24) \left| \begin{array}{l} \Sigma T^{ih\varpi}(1+T^i)^{l\varpi p^{\mu-1}} \\ \equiv (p-1)\left[\Pi_{n-h,\, lp^{\mu-1}+h-n} + \Pi_{2n-h,\, lp^{\mu-1}+h-2n} + \text{etc.}\right], \end{array} \right.$$

la valeur de $\Pi_{h,k}$ étant

$$(25) \qquad \Pi_{h,k} = \frac{1.2.3\ldots(h+k)\varpi}{(1.2\ldots h\varpi)(1.2\ldots k\varpi)}.$$

Cela posé, on aura

$$\Pi_{n-h,\, lp^{\mu-1}+h-n} = \frac{1.2.3\ldots(lp^{\mu-1}\varpi)}{[1.2\ldots(n-h)\varpi][1.2\ldots(lp^{\mu-1}+h-n)\varpi]}$$
$$= \frac{[lp^{\mu-1}\varpi][lp^{\mu-1}\varpi-1]\ldots[(lp^{\mu-1}+h-n)\varpi+1]}{1.2.3\ldots(n-h)\varpi}$$
$$\equiv -\frac{lp^{\mu-1}}{n-h}, \ (\text{mod. } p^\mu),$$

$$\Pi_{2n-h,\, lp^{\mu-1}+h-2n} = \frac{[lp^{\mu-1}\varpi][lp^{\mu-1}\varpi-1]\ldots[(lp^{\mu-1}+h-2n)\varpi+1]}{1.2.3\ldots(2n-h)\varpi}$$
$$\frac{(lp^{\mu-1}\varpi)(lp^{\mu-1}\varpi-p)}{(2n-h)\varpi.p}$$
$$\equiv \frac{lp^{\mu-2}\varpi(lp^{\mu-2}\varpi-1)}{1.(2n-h)\varpi}p, \ (\text{mod. } p^\mu).$$

$$\Pi_{3n-h,\, lp^{\mu-1}+h-3n} = \frac{[lp^{\mu-1}\varpi][lp^{\mu-1}\varpi-1]\ldots[(lp^{\mu-1}+h-3n)\varpi+1]}{1.2.3\ldots(3n-h)\varpi}$$
$$\equiv -\frac{(lp^{\mu-1}\varpi)(lp^{\mu-1}\varpi-p)(lp^{\mu-1}\varpi-2p)}{p.2p.(3n-h)\varpi}$$
$$\equiv -\frac{lp^{\mu-2}\varpi(lp^{\mu-2}\varpi-1)(lp^{\mu-2}\varpi-2)}{1.2.(3n-h)\varpi}p, (\text{mod.} p^\mu)$$

etc...

Généralement on aura

$$(26) \ \Pi_{in-h,\, lp^{\mu-1}+h-in} \equiv (-1)^i \frac{lp^{\mu-2}\varpi(lp^{\mu-2}\varpi-1)\ldots(lp^{\mu-2}\varpi-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1).(in-h)\varpi}p$$
$$\equiv (-1)^i p^{\mu-1} \frac{l}{in-h} \frac{(lp^{\mu-2}\varpi-1)\ldots(lp^{\mu-2}\varpi-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)}, \ (\text{mod.} p^\mu).$$

Lorsque μ surpasse 2, la formule (26) donne

$$\Pi_{in-h,\, lp^{\mu-1}+h-in} \equiv -p^{\mu-1}\frac{l}{in-h}.$$

Lorsque $\mu=2$, elle donne

$$\Pi_{in-h,\,lp+h-in}\equiv(-1)^i p\,\frac{l}{in-h}\,\frac{(l\varpi-1)(l\varpi-2)\ldots(l\varpi-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)}.$$

Pour montrer une application des formules qui précèdent, supposons $n=3$. On trouvera, en prenant $h=1$, $k=1$, $l=1$,

$$R_{1,1}=a+a_1\rho+a_2\rho^2=\left[\frac{1+1}{p}\right]+\rho\left[\frac{1+t}{p}\right]+\rho^2\left[\frac{1+t^2}{p}\right]+\text{etc.},$$

$$R_{2,2}=a_0+a_1\rho^2+a_2\rho^4=\left[\frac{1+1}{p}\right]^2+\rho^2\left[\frac{1+t}{p}\right]^2+\rho^4\left[\frac{1+t^2}{p}\right]^2+\text{etc.},$$

$$(27)\qquad 4p=(2a_0-a_1-a_2)^2+3(a_1-a_2)^2=x^2+3y^2,$$

$$(28)\qquad x=R_{1,1}+R_{2,2}\equiv(1+1)^\varpi+t^\varpi(1+t)^\varpi+t^{2\varpi}(1+t^2)^\varpi+\ldots$$
$$+(1+1)^{2\varpi}+t^{2\varpi}(1+t)^{2\varpi}+t^{4\varpi}(1+t^2)^{2\varpi}+\ldots$$
$$\equiv(p-1)\,\Pi_{1,1}.$$

D'autre part, en ayant égard aux formules (21), (24), et prenant $\mu=2$, on trouvera encore

$$(29)\qquad x\equiv\Sigma\, T^{i\varpi p}(1+T^i)^{\varpi p}+\Sigma\, T^{2i\varpi p}(1+T^i)^{2\varpi p}$$
$$\equiv(p-1)\left[\Pi_{2,p-2}+\Pi_{5,p-5}+\Pi_{8,p-8}+\ldots+\Pi_{1,2p-1}+\Pi_{4,2p-4}+\ldots\right]$$

Enfin, la formule (26) donnera

$$\Pi_{3i-1,p+1-3i}\equiv(-1)^i\frac{p}{3i-1}\,\frac{(\varpi-1)(\varpi-2)\ldots(\varpi-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)},$$

$$\Pi_{3i-2,2p+2-3i}\equiv(-1)^i\frac{2p}{3i-2}\,\frac{(2\varpi-1)(2\varpi-2)\ldots(2\varpi-i+1)}{1.2.3\ldots(i-1)},\ (\text{mod.}\,p^2).$$

Donc, on tirera de la formule (29)

$$(30)\qquad x\equiv(p-1)\left[-\frac{p}{2}+\frac{p}{5}\,\frac{\varpi-1}{1}-\frac{p}{8}\,\frac{(\varpi-1)(\varpi-2)}{1.2}+\text{etc.}\right]$$
$$+(p-1)\left[-\frac{2p}{1}+\frac{2p}{4}\,\frac{2\varpi-1}{1}-\frac{2p}{7}\,\frac{(2\varpi-1)(2\varpi-2)}{1.2}+\text{etc.}\right].$$

Il est important d'observer qu'en prenant

$$h = n - 1, \quad \text{et} \quad i = \frac{p+n-1}{n} = \varpi + 1,$$

on obtiendra une valeur de

$$\Pi_{in-h,\, lp^{\mu-1}+h-in} = \Pi_{p,\, lp^{\mu-1}-p}$$

déterminée, non plus par la formule (26), mais par la suivante

$$\Pi_{p,\,(lp^{\mu-2}-1)p} \equiv \frac{(lp^{\mu-1}\varpi)(lp^{\mu-1}\varpi-1)\ldots(lp^{\mu-1}\varpi-p\varpi+1)}{1.2.3\ldots p\varpi},$$

de laquelle on tirera, en supposant $n=3$, $\mu=2$, $l=2$,

$$(31) \qquad \Pi_{p,p} = \frac{2p\varpi(2p\varpi-1)\ldots(p\varpi+1)}{1.2.3\ldots p\varpi}, \text{ (mod. } p^2).$$

Comme on a d'ailleurs

$$(1+px)(2+px)\ldots(p-1+px)$$

$$\equiv 1.2.3\ldots(p-1)\left[1+px\right]\left[1+\frac{px}{2}\right]\left[1+\frac{px}{3}\right]\ldots\left[1+\frac{px}{p-1}\right]$$

$$\equiv 1.2.3\ldots(p-1)\left[1+px\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)\right]$$

$$\equiv 1.2.3\ldots(p-1), \text{ (mod. } p^2)\ {}^{**}$$

** En effet, les divers termes de la progression arithmétique

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ p-1$$

seront équivalents, suivant le module p, si l'on fait abstraction de l'ordre dans lequel on les range, aux divers termes de la progression géométrique

$$1,\ t,\ t^2,\ldots\ t^{p-2};$$

on en conclut

$$\frac{(1+px)(2+px)\ldots(p-1+px)}{1.2.3\ldots(p-1)} \equiv 1, \text{ (mod. } p^2\text{)},$$

et la formule (31) peut être réduite à

$$(32) \qquad \Pi_{p,p} \equiv \frac{2p\varpi(2p\varpi-p)\ldots(p\varpi+p)}{p.2p\ldots p\varpi} \equiv \frac{2\varpi(2\varpi-1)\ldots(\varpi+1)}{1.2.3\ldots\varpi}$$
$$\equiv \Pi_{1,1}, \text{ (mod. } p^2\text{)}.$$

---

d'où il résulte que les divers termes de la suite

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{p-1}$$

seront équivalents, abstraction faite de l'ordre suivant lequel ils sont rangés, aux divers termes de la progression géométrique

$$1, \frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, \ldots \frac{1}{t^{p-2}},$$

ou, ce qui revient au même, aux divers termes de la suivante

$$t^{p-1}, t^{p-2}, t^{p-3}, \ldots t.$$

D'ailleurs, la somme de ces derniers termes, savoir

$$t+t^2+t^3+\ldots+t^{p-1} = \frac{t^p-t}{t-1}$$

sera, ainsi que la différence t^p-t, équivalente à zéro, suivant le module p. On aura donc aussi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1} \equiv 0, \text{ (mod. } p\text{)};$$

puis on en conclura

$$p\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right) \equiv 0, \text{ (mod. } p^2\text{)},$$

et

$$1.2.3\ldots(p-1)\left[1+px\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}\right)\right]$$
$$\equiv 1.2.3\ldots(p-1), \text{ (mod. } p^2\text{)}.$$

D'ailleurs, dans la formule (29), les quantités désignées à l'aide de la lettre II, étant égales deux à deux, à l'exception de

$$\text{II}_{p,p} \equiv \text{II}_{1,1}, \pmod{p^2},$$

on trouvera

$$x \equiv (p-1)\left\{\begin{array}{l}\text{II}_{p,p} + 2(\text{II}_{2,p-2} + \text{II}_{5,p-5} + \ldots + \text{II}_{\frac{p-3}{2},\frac{p+3}{2}}) \\ \quad + 2(\text{II}_{1,2p-1} + \text{II}_{4,2p-4} + \ldots + \text{II}_{p-3,p+3})\end{array}\right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33) \quad x \equiv (p-1)\frac{2\varpi(2\varpi+1)\ldots(\varpi+1)}{1.2.3\ldots\varpi}, \qquad \pmod{p^2}$$

$$-2p(p-1)\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\frac{\varpi-1}{1} + \frac{1}{8}\frac{(\varpi-1)(\varpi-2)}{1.2} - \text{etc}\ldots \pm \frac{1}{\frac{1}{2}(p-3)}\frac{(\varpi-1)\ldots\left(\frac{\varpi+2}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{\varpi-2}{2}\right)}\right.$$

$$-2p(p-1)\left\{2 - \frac{2}{4}\frac{2\varpi-1}{1} + \frac{2}{7}\frac{(2\varpi-1)(2\varpi-2)}{1.2} - \ldots\ldots \mp \frac{2}{p-3}\frac{(2\varpi-1)\ldots(\varpi+1}{1.2.3\ldots(\varpi-1)}\right.$$

Ainsi, par exemple, on trouvera, en prenant $p=7$, $\varpi=2$,

$$\begin{aligned} x &\equiv 6\left[\text{II}_{7,7} + 2(\text{II}_{2,5} + \text{II}_{1,13} + \text{II}_{4,10})\right], \pmod{49} \\ &\equiv 6.6 + 14\left(\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2}\right) \equiv 36 + 14 \equiv 1; \end{aligned}$$

en prenant $p=13$, $\varpi=4$,

$$\begin{aligned} x &\equiv 12\left[\text{II}_{13,13} + 2(\text{II}_{2,11} + \text{II}_{5,8} + \text{II}_{1,25} + \text{II}_{4,22} + \text{II}_{7,19} + \text{II}_{10,16})\right] \\ &\equiv 12\left[70 - 26\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + 2 - \frac{7}{2} + 6 - 7\right)\right] \\ &\equiv 12\left[70 + 26\left(2 + \frac{3}{5}\right)\right] \equiv 12.70 \equiv (13-1)(13+1)5 \\ &\equiv -5, \pmod{13^2}. \end{aligned}$$

NOTE PREMIÈRE.

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS Θ_h, Θ_k....

n étant un nombre entier quelconque, et u, v deux quantités entières positives ou négatives, nous disons que u est *équivalent* à v suivant le *module* n, lorsque la différence $u-v$ ou $v-u$ est divisible par n, et nous indiquons cette *équivalence*, nommée congruence par M. Gauss, à l'aide de la notation

$$u \equiv v, \text{ (mod. } n),$$

employée par ce géomètre. De plus, μ étant un nombre premier, nous disons avec Euler d'une part, et de l'autre avec M. Poinsot, que r est *racine* primitive de l'équivalence

$$x^n \equiv 1, \text{ (mod. } p),$$

et ρ *racine primitive* de l'équation

$$x^n = 1,$$

lorsque r^n est la plus petite puissance de r, qui soit équivalente à l'unité suivant le module p, et ρ^n la plus petite puissance de ρ, qui se réduise à l'unité. Dans cette hypothèse, les diverses racines de l'équation

$$x^n = 1$$

sont les diverses puissances de p; et comme deux puissances, dont les exposants restent équivalents suivant le module n, sont égales entre elles, il est clair que ces diverses racines peuvent être réduites à

$$1, \rho, \rho^2, \ldots \rho^{n-1}.$$

De plus, m étant une quantité entière, on peut affirmer que la somme

$$1 + \rho^m + \rho^{2m} + \ldots + \rho^{(n-1)m} = \frac{\rho^{nm} - 1}{\rho^m - 1}$$

se réduira au nombre n ou à zéro, suivant que m sera divisible ou non divisible par n. Enfin, si n est un nombre pair, on aura

$$\rho^{\frac{n-1}{2}} = -1.$$

Pareillement, si l'équivalence

$$x^n \equiv 1, (\text{mod.} p)$$

offre n racines distinctes, ce qui arrivera si n est diviseur de $p - 1$, ces diverses racines seront les diverses puissances de r; et, comme deux puissances, dont les exposants seraient équivalents entre eux suivant le module n, resteraient équivalentes entre elles suivant le module p, il est clair que ces diverses racines pourront être réduites à

$$1, r, r^2, \ldots r^{n-1}.$$

De plus, m étant une quantité entière, on peut affirmer que la somme

$$1 + r^m + r^{2m} + \ldots + r^{(n-1)m} = \frac{r^{nm} - 1}{r^m - 1}$$

sera équivalente, suivant le module p, au nombre n ou à zéro, selon que m sera divisible ou non divisible par n. Enfin, si n est un nombre pair, on aura

$$r^{\frac{n}{2}} \equiv -1, \quad (\text{mod.}\, p).$$

Ces principes étant admis, les propositions rappelées dans les premières pages de ce mémoire, et relatives aux propriétés fondamentales des fonctions

$$\Theta_h, \quad \Theta_k, \ldots$$

pourront être facilement établies de la manière suivante.

Nommons p un nombre premier impair, θ une racine primitive de l'équation

$$x^p = 1,$$

τ une racine primitive de l'équation

$$x^{p-1} = 1,$$

et t une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod.}\, p).$$

Comme les diverses racines de cette équivalence peuvent être représentées par les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots p-1,$$

ou, si l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel elles sont rangées, par les divers termes de la progression géométrique

$$1, t, t^2, \ldots t^{p-2},$$

l'équation

$$1 + \theta + \theta^2 + \ldots + \theta^{p-1} = 0$$

pourra s'écrire comme il suit

$$(1) \qquad 1 + \theta^t + \theta^{t^2} + \ldots + \theta^{t^{p-2}} = 0.$$

On aura d'autre part

$$\tau^{\frac{p-1}{2}} = -1\,;$$

et

$$1 + \tau^m + \tau^{2m} + \ldots + \tau^{(p-2)m} = p - 1,$$

ou bien

$$1 + \tau^m + \tau^{2m} + \ldots + \tau^{(p-2)m} = 0,$$

suivant que m sera divisible ou non divisible par $p - 1$. Soient d'ailleurs h, k des quantités entières, et posons

$$\Theta_h = \theta + \tau^h \theta^t + \tau^{2h} \theta^{t^2} + \ldots + \tau^{(p-2)h} \theta^{t^{p-2}},$$

il est elair que Θ_h, Θ_k seront égaux, lorsque h et k seront équivalents entre eux suivant le module $p - 1$. De plus, l'équation (1) pourra être présentée sous la forme

$$\Theta_0 = -1.$$

Enfin l'on aura évidemment, quels que soient h et k,

$$(2) \qquad \Theta_h \Theta_k = \mathrm{S}(\tau^{ih + jk} \theta^{t^i + t^j}),$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i et de j comprises dans la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ p - 2.$$

Les valeurs de i et de j, qui, dans l'équation (2), rendront, sous le signe S, l'exposant de θ équivalent à zéro suivant le module p, sont celles qui vérifieront la formule

$$t^i + t^j \equiv 0,\ (\text{mod.}\ p)$$

de laquelle on tire

$$t^{j-i} \equiv -1 \equiv t^{\pm\frac{p-1}{2}},\ (\text{mod.}\ p),$$

et par suite

$$j - i = \pm \frac{p-1}{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$j = i \pm \frac{p-1}{2};$$

le signe supérieur ou inférieur devant être adopté, suivant que i est inférieur ou supérieur à $\frac{p-1}{2}$. Donc, dans l'équation (2), l'exposant de θ, sous le signe S, deviendra équivalent à zéro, suivant le module p, pour $p-1$ systèmes de valeurs correspondantes de i et de j, la valeur de i pouvant être un quelconque des termes de la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2;$$

et, dans la somme que représente le second membre de l'équation (2), la partie correspondante à ces valeurs de i et de j sera

$$S(\tau^{ih+jk}) = S\left[\tau^{i(h+k)}\tau^{\pm\frac{p-1}{2}k}\right]$$

ou, ce qui revient au même,

$$(-1)^k S\left[\tau^{i(h+k)}\right] = (-1)^k\left(1 + \tau^{h+k} + \tau^{2(h+k)} + \ldots + \tau^{(p-2)(h+k)}\right).$$

Donc, en vertu de ce qui a été dit plus haut, cette partie se réduira simplement à

$$(-1)^k(p-1) = (-1)^h(p-1),$$

ou bien à zéro, suivant que $h+k$ sera divisible ou non divisible par $p-1$.

Considérons à présent les systèmes de valeurs de i et de j qui, dans l'équation (2), rendent, sous le signe S, l'exposant de θ équivalent à l'unité suivant le module p. Ces systèmes seront ceux pour lesquels l'équivalence

$$t^i + t^j \equiv 1, \text{ (mod. } p)$$

se trouvera vérifiée. Or, cette équivalence, présentée sous la forme

$$t^j = 1 - t^i$$

fournira une seule valeur de j, comprise dans la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2,$$

pour toute valeur de i, qui, étant comprise dans la même suite, ne rendra pas nulle la différence

$$1 - t^i;$$

et, comme la seule valeur $i=0$ fera évanouir cette différence, il en résulte que l'équivalence dont il s'agit se vérifiera pour $p-2$ systèmes de valeurs correspondantes de i et de j, chacune des valeurs de j étant un terme de la suite

$$1, 2, 3, \ldots p-2.$$

Cela posé, concevons d'abord que la somme $h+k$ ne soit pas divisible par $p-1$, et désignons alors par $R_{h,k}$ la somme des termes qui, dans le second membre de l'équation (2), seront proportionnels à la première puissance de θ. La valeur de $R_{h,k}$, qui sera déterminée par la formule

$$R_{h,k} = S(\tau^{ih+jk}) \tag{3}$$

jointe à la condition

$$t^i + t^j \equiv 1, \text{ (mod. } p), \tag{4}$$

se composera seulement de $p-2$, termes de la forme

$$\tau^{ih+jk};$$

et comme chacun de ces termes sera nécessairement égal à l'un des termes de la progression géométrique

$$1, \tau, \tau^2, \ldots \tau^{p-2},$$

il est clair qu'on aura

$$R_{h,k} = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_{p-2}\tau^{p-2}, \tag{5}$$

$a_0, a_1, \ldots a_{p-2}$ désignant des nombres entiers, dont plusieurs pourront s'évanouir, et dont la somme vérifiera la condition

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-2} = p - 2. \tag{6}$$

Soit maintenant m l'un quelconque des nombres entiers compris dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots p - 2.$$

La somme des termes proportionnels à

$$\theta^{t^m},$$

dans le second membre de la formule (2), sera évidemment

$$\theta^{t^m} S(\tau^{ih+jk})$$

pourvu que l'on étende le signe S à toutes les valeurs de i et de j, qui, n'étant pas situées hors des limites $0, p-2$, vérifient l'équivalence

$$t^i + t^j \equiv t^m, \quad (\text{mod. } p).$$

Or, cette équivalence pouvant être présentée sous la forme

$$t^{i-m} + t^{j-m} \equiv 1, \quad (\text{mod. } p),$$

si l'on étend le signe S à toutes les valeurs de $i - m$ et de $j - m$ qui la vérifient, on trouvera, en faisant usage de la notation ci-dessus adoptée,

$$\mathrm{R}_{h,k} = \mathrm{S}[\tau^{(i-m)h+(j-m)k}]$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{R}_{h,k} = \tau^{-m(h+k)}\,\mathrm{S}(\tau^{ih+jk}),$$

et par suite

$$\mathrm{S}(\tau^{ih+jk}) = \mathrm{R}_{h,k}\tau^{m(h+k)}.$$

Donc, dans le second membre de l'équation (2), la somme des termes proportionnels à

$$\theta^{tm}$$

sera généralement

$$\mathrm{R}_{h,k}\,\tau^{m(h+k)}\theta^{tm}.$$

Donc, la somme des termes qui renfermeront des puissances positives de θ sera

$$\mathrm{R}_{h,k}\,\mathrm{S}[\tau^{m(h+k)}\theta^{tm}],$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de m non situées hors des limites $0, p-2$. D'ailleurs, on aura évidemment, sous cette condition,

$$\Theta_h = \mathrm{S}(\tau^{mh}\theta^{tm}),$$

et par suite

$$\Theta_{h+k} = \mathrm{S}[\tau^{m(h+k)}\theta^{tm}].$$

Ainsi, dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire, lorsque $h+k$ n'est pas divisible par $p-1$, la somme des termes qui, dans le second membre de l'équation (2), renferment des puissances positives de θ, se réduit simplement à

$$\mathrm{R}_{h,k}\,\Theta_{h+k};$$

et comme alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, la somme des autres termes se réduit à zéro, il en résulte qu'on a

$$(7)\qquad \Theta_h \Theta_k = R_{h,k}\, \Theta_{h+k},$$

la valeur de $R_{h,k}$ étant déterminée par la formule (3), jointe à la formule (4); ou, ce qui revient au même

$$(8)\qquad \Theta_h \Theta_k = \Theta_{h+k}\, S(\tau^{ih+jk}),$$

pourvu que l'on étende le signe S à toutes les valeurs de i et de j, qui, étant comprises dans la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2,$$

vérifient la condition (4).

Passons au cas où la somme $h+k$ est divisible par $p-1$. Alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on devra remplacer l'équation (8) par la suivante

$$\Theta_h \Theta_k = \Theta_{h+k}\, S(\tau^{ih+jk}) + (-1)^h (p-1)$$

que l'on pourra réduire à

$$\Theta_h \Theta_{-h} = -S[\tau^{(i-j)h}] + (-1)^h (p-1),$$

attendu que l'équivalence

$$h + k \equiv 0, \quad \text{ou} \quad k \equiv -h, \ (\text{mod.}\ p-1)$$

entraînera les formules

$$\tau^k = \tau^{-h}, \quad \Theta_k = \Theta_{-h}$$
$$\Theta_{h+k} = \Theta_0 = -1.$$

Donc, si on suppose la formule (7) étendue au cas où la somme $h+k$ est divisible par $p-1$, c'est-à-dire, si, en choisissant $R_{h,k}$ de manière à vérifier dans tous les cas cette formule, on pose

$$(9)\qquad \Theta_h \Theta_{-h} = R_{h,-h}\, \Theta_0,$$

on aura

$$R_{h,-h} = S[\tau^{(i-j)h}] - (-1)^h (p-1).$$

Dans le second membre de cette dernière formule, le signe S doit toujours être étendu aux valeurs de i et de j qui, étant comprises dans la suite,

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2,$$

vérifient la condition (4), ou, ce qui revient au même, à toutes les valeurs de $i-j$ qui, étant comprises dans la même suite, vérifient la formule

$$t^{i-j} \equiv t^{-j} - 1, \text{ (mod. } p-1),$$

et par conséquent, à toutes les valeurs de $i-j$, distinctes de la valeur

$$\frac{p-1}{2}$$

qui donnerait

$$t^{j-i} \equiv -1, \text{ (mod. } p-1).$$

Or, comme en admettant cette dernière valeur de $i-j$, on aurait généralement

$$S[\tau^{(i-j)h}] = 0,$$

on trouvera au contraire, en l'excluant,

$$S[\tau^{(i-j)h}] = -\tau^{\frac{p-1}{2}h} = -(-1)^h,$$

et par suite, la valeur trouvée de $R_{h,-h}$ deviendra

(10) $$R_{h,-h} = -(-1)^h p,$$

pourvu que h ne soit pas divisible par $p-1$. Alors aussi l'équation (9) donnera

(11) $$\Theta_h \Theta_{-h} = (-1)^h p.$$

Si h devenait lui-même divisible par $p-1$, il serait pair, et, comme on aurait

$$(-1)^h \equiv 1, \quad \tau^h \equiv 1,$$

la valeur trouvée de $R_{h,-h}$ se réduirait à

$$p-2-(p-1) = -1.$$

Au reste, on peut conclure immédiatement de la formule (7) 1° que la valeur de $R_{h,k}$ ne varie pas lorsqu'on fait croître ou décroître h ou k d'un multiple de $p-1$; 2° que $R_{h,k}$ se réduit à -1, dès que l'une des quantités h, k est divisible par $p-1$. Ainsi, par exemple, si l'on suppose k divisible par $p-1$, l'on aura

$$\Theta_k = \Theta_0 = -1,$$

et par suite, la formule (7) donnera

$$R_{h,0} = R_{0,h} = -1. \tag{12}$$

Si, dans la formule (7), on change les signes de h et de k, l'on trouvera

$$\Theta_{-h}\Theta_{-k} = R_{-h,-k}\,\Theta_{-h-k},$$

puis, de cette équation combinée par voie de multiplication avec la formule (7), on tirera, en ayant égard à la formule (11),

$$R_{h,k}R_{-h,-k} = p. \tag{13}$$

L'équation (13) suppose évidemment h, k et $h+k$ non divisibles par $p-1$.

Les équations (7), (10), (11), (12), (13), coïncident avec les formules (9), (11), (13) et (12) du § I[er] de ce mémoire, lorsque le diviseur de $p-1$, représenté dans ce paragraphe par la lettre ϖ, se réduit à l'unité. Dans le cas contraire, pour passer des unes aux autres, il suffira de remplacer

$$h \text{ par } \varpi h, \quad k \text{ par } \varpi k,$$

puis d'écrire, pour abréger,

$$\Theta_h \text{ au lieu de } \Theta_{\varpi h}$$
$$\text{et } R_{h,k} \text{ au lieu de } R_{\varpi h, \varpi k}.$$

Lorsque dans la formule (11) on pose

$$h = \frac{p-1}{2},$$

elle fournit un théorème très-remarquable de M. Gauss, et se réduit à

$$(14) \qquad \Theta^2_{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$(14) \quad (\theta - \theta^r + \theta^{r^2} - \theta^{r^3} + \ldots + \theta^{r^{p-3}} - \theta^{r^{p-2}})^2 = (-1)^{\frac{p-1}{1}} p.$$

Cette dernière équation coïncide avec diverses formules du mémoire, par exemple, avec les formules (12) du § III.

NOTE II.

SUR DIVERSES FORMULES OBTENUES DANS LE DEUXIÈME PARAGRAPHE.

Il est facile de s'assurer que la formule (61) du § II entraîne les formules (62), non-seulement, comme nous l'avons avancé, dans le cas particulier où μ se réduit à l'unité, mais généralement, et quelle que soit la valeur de μ. C'est ce que nous allons démontrer.

Lorsque ν sera de la forme $4x+1$, les termes des suites (63), (64), étant eux-mêmes de cette forme, puisqu'on a généralement

$$u^m + \nu(1-u^m) = 1 + (\nu-1)(1-u^m), \text{ et } \nu - 1 \equiv 0, (\text{mod. } 4),$$

seront équivalents, suivant le module $n=4\nu$, à certains termes de la suite

$$1, 5, 9, \ldots 4\nu-11, \quad 4\nu-7, \quad 4\nu-3.$$

D'ailleurs celle-ci renfermera : 1° un terme égal à ν, 2° $\nu - 1$ termes premiers, non-seulement à ν, mais encore à

$$n = 4\nu,$$

et qui, étant en même nombre que les termes des deux suites (63), (64), devront être équivalents, les uns aux termes de la suite (63), les autres aux termes de la suite (64). Parmi ces $\nu-1$ termes, ceux qui se réduiront à l'un des suivants

$$1, 2, 3, \ldots \frac{n-1}{2} = 2\nu,$$

étant précisément

$$1,\ 5,\ 9,\ldots\ 2\nu-9,\quad 2\nu-5,\quad 2\nu-1,$$

seront en nombre égal à

$$\frac{\nu-1}{2};$$

les uns, dont le nombre sera ν', étant équivalents à certains termes de la suite (63), et les autres, dont le nombre sera ν'', étant équivalents à certains termes de la suite (64). On aura en conséquence

$$\nu'+\nu''=\frac{\nu-1}{2}.$$

Observons maintenant qu'en vertu des formules

$$u^{\frac{\nu-1}{2}}+1\equiv 0,\ (\text{mod. }\nu),\quad \nu-1\equiv 0,\ (\text{mod. }4),$$

on trouvera, quel que soit le nombre entier m,

$$[u^m+\nu(1-u^m)]+[u^{m+\frac{\nu-1}{2}}+\nu(1-u^{m+\frac{\nu-1}{2}})]\equiv 2\nu,(\text{mod.}\,n=4\nu).$$

Donc, chacune des suites (63), (64) se composera de termes qui, pris deux à deux, pourront être représentés par des nombres de la forme

$$h,\quad 2\nu-h,$$

auxquels ils seront équivalents, suivant le module $n=4\nu$. D'ailleurs, si l'indice h se trouve compris dans la suite

$$1,\ 5,\ 9,\ldots\ 2\nu-9,\quad 2\nu-5,\quad 2\nu-1,$$

on pourra en dire autant de l'indice $2\nu-h$, qui sera distinct de h, si h diffère de ν. Donc, chacun des nombres désignés par ν', ν'' sera pair, et

$$\frac{1}{2}\nu', \quad \frac{1}{2}\nu''$$

seront entiers. Enfin, comme on aura

$$\frac{\nu'+\nu''}{2}=\frac{\nu-1}{4},$$

on peut affirmer que, si ν est non-seulement de la forme $4x+1$, mais aussi de la forme $8x+5$, les deux entiers

$$\frac{1}{2}\nu', \quad \frac{1}{2}\nu''$$

seront l'un pair, l'autre impair. Donc alors la différence

$$\frac{1}{2}\nu'-\frac{1}{2}\nu''$$

sera impaire elle-même, et ne pourra se réduire à zéro.

A l'aide des observations qui précèdent, on peut ramener à une forme très-simple les valeurs de

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma), \quad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')$$

fournies par les équations (23), (26); et d'abord, puisque les différents termes de chacune des séries (63), (64), pris deux à deux, peuvent être censés de la forme

$$h, \quad 2\nu-h,$$

les équations (23), (26), combinées avec la formule

$$\Theta_h\Theta_{2\nu-h}=\mathrm{R}_{h,2\nu-h}\,\Theta_{2\nu}$$

donneront

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = \mathrm{R}_{1,2\nu-1}\,\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^2,\,\nu+(\nu-1)u^2}\cdots\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}}}\,\frac{\Theta_{2\nu}^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}},$$

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)] = \mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u,\,\nu+(\nu-1)u}\cdots\cdots\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}}}\,\frac{\Theta_{2\nu}^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}.$$

Si d'ailleurs ν est de la forme $8x+5$, alors $\frac{\nu-5}{4}$ sera un nombre pair, et l'on aura, non-seulement

$$\Theta_{2\nu} = \Theta_{-2\nu}, \quad \Theta_{2\nu}\Theta_{-2\nu} = \Theta_{2\nu}^2 = (-1)^{2\nu\varpi}p = p,$$

mais encore

$$\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Theta_{2\nu}, \quad \frac{\Theta_{2\nu}^{\frac{\nu-1}{4}}}{\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}} = \Theta_{2\nu}^{\frac{\nu-5}{4}} = p^{\frac{\nu-5}{2}},$$

ce qui réduira les formules précédentes à

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = p^{\frac{\nu-5}{8}}\,\mathrm{R}_{1,2\nu-1}\,\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^2,\,\nu+(\nu-1)u^2}\cdots\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}}},$$
$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u) = p^{\frac{\nu-5}{8}}\,\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u,\,\nu+(\nu-1)u}\cdots\cdots\mathrm{R}_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}}}.$$

Ces dernières équations, et les équations analogues, qui fourniraient les valeurs de

$$\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma), \quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma^u)$$

coïncident, comme on devait s'y attendre, avec les formules (66), lorsqu'on prend $\nu=5$, et avec les formules (74), (75), lorsqu'on prend $\nu=13$.

Si ν était de la forme $8x+1$, alors $\frac{\nu-1}{4}$ étant un nombre pair, on aurait

$$\Theta_{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = \Theta_{4\nu} = \Theta_0 = -1, \quad \Theta_{2\nu}^{\frac{\nu-1}{4}} = p^{\frac{\nu-1}{8}},$$

ce qui réduirait les formules précédemment obtenues à

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = -p^{\frac{\nu-1}{8}} R_{1,2\nu-1} R_{\nu-(\nu-1)u^2,\,\nu+(\nu-1)u^2} \ldots R_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}}},$$
$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u) = -p^{\frac{\nu-1}{8}} R_{\nu-(\nu-1)u,\,\nu+(\nu-1)u} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-2}{2}}}.$$

Dans tous les cas, en divisant la valeur de $\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)$ par celle de $\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)$, on trouvera

$$\frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)}{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)} = \frac{R_{1,2\nu-1} R_{\nu-(\nu-1)u^2,\,\nu+(\nu-1)u^2} \ldots R_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-5}{2}}}}{R_{\nu-(\nu-1)u,\,\nu+(\nu-1)u} \ldots\ldots\ldots\ldots R_{\nu-(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}},\,\nu+(\nu-1)u^{\frac{\nu-3}{2}}}}.$$

Si, dans cette dernière formule, on remplace

$$R_{h,k} \text{ par } \frac{p}{R_{n-h,\,n-k}},$$

toutes les fois que h et k sont équivalents, suivant le module $n=4\nu$, à des nombres compris entre les limites

$$0, \quad 2\nu,$$

on en tirera

$$\frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)}{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma^u)} = \frac{p^{\frac{\nu'}{2}} f(\rho)}{p^{\frac{\nu''}{2}} \mathrm{f}(\rho)}$$

$f(\rho)$ et $\mathrm{f}(\rho)$ désignant des produits de la forme

$$R_{h,\,2\nu-h} R_{k,\,2\nu-k} \ldots$$

composés de facteurs

$$R_{h,\,2\nu-h}, \quad R_{k,\,2\nu-k}, \quad \text{etc.}$$

dont aucun ne deviendra divisible par p, lorsqu'on y substituera r à ρ; puis, en ayant égard aux formules (49) ou (56), et représentant par $\frac{x}{y}$ la valeur du rapport $\frac{\beta}{\gamma}$ réduit à sa plus simple expression, l'on trouvera successivement

$$\frac{\beta+\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}}{\beta-\gamma(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}}=\frac{p^{\frac{\nu'}{2}}f(\rho)}{p^{\frac{\nu''}{2}}\mathrm{f}(\rho)},$$

et

$$\frac{x+y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}}{x-y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}}=\frac{p^{\frac{\nu'}{2}}f(\rho)}{p^{\frac{\nu''}{2}}\mathrm{f}(\rho)}.$$

On aura d'ailleurs, en vertu de la seconde des formules (43),

$$[x+y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}]\,[x-y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}]$$
$$=x^2+\nu y^2;$$

et par suite on trouvera encore

$$[x+y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}]^2\,\mathrm{f}(\rho)=p^{\frac{\nu'-\nu''}{2}}(x^2+\nu y^2)f(\rho),$$
$$[x-y(\varsigma-\varsigma^u+\ldots-\varsigma^{u^{\nu-2}})\sqrt{-1}]^2 f(\rho)=p^{\frac{\nu''-\nu'}{2}}(x^2+\nu y^2)\,\mathrm{f}(\rho).$$

Si, dans ces dernières équations, on remplace ρ par r, on devra y remplacer en même temps ς par s, $\sqrt{-1}$ par a, et le signe $=$ par $\equiv$, le module étant le nombre p. On trouvera ainsi

$$\left.\begin{aligned}&[x+(s-s^u+\ldots-s^{u^{\nu-2}})ay]^2\,\mathrm{f}(r)\equiv p^{\frac{\nu'-\nu''}{2}}(x^2+\nu y^2)f(r)\\&[x-(s-s^u+\ldots-s^{u^{\nu-2}})ay]^2 f(r)\equiv p^{\frac{\nu''-\nu}{2}}(x^2+\nu y^2)\,\mathrm{f}(r)\end{aligned}\right\},\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Observons à présent que x et y, n'ayant pas de facteurs communs, ne peuvent être simultanément divisibles par p. Par suite, on pourra en dire autant des expressions

$$x+(s-s^u+\ldots-s^{u^{\nu-2}})ay,\quad x-(s-s^u+\ldots-s^{u^{\nu-2}})ay,$$

qui ne peuvent devenir simultanément divisibles par p qu'avec leur somme

$$2x,$$

et leur différence

$$2(s - s^u + \ldots - s^{u^{\nu-2}})ay,$$

par conséquent avec x et y, attendu que les quantités

$$s - s^u + \ldots - s^{u^{\nu-2}}, \quad \text{et} \quad a$$

sont racines des équivalences

$$x^2 \equiv \nu, \text{ (mod. } p), \quad x^4 \equiv 1, \text{ (mod. } p).$$

Cela posé, comme $\mathrm{f}(r)$ et $f(r)$ ne seront pas non plus divisibles par p, il est clair que des deux produits

$$[x + (s - s^u + \ldots - s^{u^{\nu-2}})ay]^2 \,\mathrm{f}(r), \quad [x - (s - s^u + \ldots - s^{u^{\nu-2}})ay]^2 f(r)$$

l'un au moins sera équivalent, suivant le module p, à un terme de la suite

$$1, 2, 3, \ldots p - 1.$$

Donc, en vertu des formules obtenues, on pourra en dire autant de l'un des produits

$$p^{\frac{\nu' - \nu''}{2}}(x^2 + \nu y^2), \quad p^{\frac{\nu'' - \nu'}{2}}(x^2 + \nu y^2).$$

D'ailleurs le binome

$$x^2 + \nu y^2,$$

étant diviseur de

$$\beta^2 + \nu\gamma^2,$$

devra, en vertu de la formule (47) ou (48), diviser l'un des produits

$$4p^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad 4p^{\frac{\nu-3}{2}};$$

et par conséquent il sera, ou de la forme

$$p^{\mu},$$

si l'un des deux nombres x, y est pair, l'autre impair; ou de la forme

$$2p^{\mu}$$

si x, y sont tous deux impairs, attendu qu'alors $x^2+\nu y^2$, divisé par 4, donnera 2 pour reste, et ne pourra devenir égal à $4p^{\mu}$. Or, comme les produits

$$p^{\frac{\nu'-\nu''}{2}}(x^2+\nu y^2), \quad p^{\frac{\nu''-\nu'}{2}}(x^2+\nu y^2),$$

se réduiront, dans le premier cas, à

$$p^{\mu+\frac{\nu'-\nu''}{2}}, \quad p^{\mu+\frac{\nu''-\nu'}{2}},$$

et, dans le second cas, à

$$2p^{\mu+\frac{\nu'-\nu''}{2}}, \quad 2p^{\mu+\frac{\nu''-\nu'}{2}},$$

il est clair que l'un des exposants

$$\mu+\frac{\nu'-\nu''}{2}, \quad \mu+\frac{\nu''-\nu'}{2}$$

devra être égal à zéro. Par conséquent, *si, en prenant pour* μ *la valeur numérique de la différence* $\frac{\nu'}{2}-\frac{\nu''}{2}$, *on pose*

$$\mu=\pm\frac{\nu'-\nu''}{2},$$

on pourra satisfaire, par des nombres x, y *entiers et premiers entre eux, à l'une des formules*

$$p^{\mu}=x^2+\nu y^2,$$
$$2p^{\mu}=x^2+\nu y^2,$$

savoir, à la première, par deux nombres entiers, l'un pair, l'autre impair, ou à la seconde par deux nombres entiers impairs. Mais la seconde formule ne peut subsister, lorsque ν est de la forme $8x+5$, puisqu'alors, pour des valeurs impaires de x, y, $x^2+\nu y^2$ est de la forme $8x+6$, tandis que

$$2p^\mu = 2(4\nu\omega\varpi+1)^\mu$$

est de la forme $8x+2$. Donc, *si ν est de la forme $8x+5$, des nombres x, y, entiers et premiers entre eux, vérifieront la formule*

$$p^\mu = x^2+\nu y^2,$$

pourvu que l'on y suppose μ égal à la valeur numérique de la différence $\frac{1}{2}\nu' - \frac{1}{2}\nu''$, par conséquent

$$\mu = \pm\frac{\nu'-\nu''}{2}.$$

D'ailleurs, la valeur précédente de μ est précisément celle que fournit la première des équations (60). En effet, les expressions (65) se réduisant, en vertu de la formule

$$\nu'+\nu'' = \frac{\nu-1}{2},$$

aux deux suivantes

$$\frac{1}{2}\nu', \quad \frac{1}{2}\nu'',$$

si l'on égale l'une ou l'autre à la différence $\lambda - \frac{1}{2}\frac{\nu-5}{4}$, on aura

$$2\lambda - \frac{\nu-5}{4} = \nu' \quad \text{ou} \quad \nu'',$$

et la première des formules (60) donnera

$$\mu = \frac{\nu-3}{2} - 2\lambda = \frac{\nu-1}{4} + \left(\frac{\nu-5}{4} - 2\lambda\right) = \frac{\nu'+\nu''}{2} + \left(\frac{\nu-5}{4} - 2\lambda\right)$$
$$= \pm\frac{\nu'-\nu''}{2}.$$

Pour établir les propositions ci-dessus énoncées, nous avons eu recours à la formule qui fournit la valeur du rapport des expressions imaginaires

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma),\quad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'');$$

et nous avons transformé la fraction qui représente cette valeur, de manière à mettre en évidence tous les facteurs égaux à p, soit dans le numérateur, soit dans le dénominateur. On pourrait faire subir une semblable transformation aux valeurs mêmes des deux expressions imaginaires

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma),\quad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma''),$$

ou bien encore des deux suivantes

$$\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma),\quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'').$$

Concevons en particulier que, dans les valeurs précédemment trouvées de $\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)$ et de $\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')$, l'on remplace

$$R_{h,k}\quad \text{par}\quad \frac{p}{R_{n-h,\,n-k}},$$

toutes les fois que h et k sont équivalents, suivant le module $n=4\nu$, à des nombres compris entre les limites

$$0,\ 2\nu.$$

On trouvera, si ν est de la forme $8x+5$,

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma) = p^{\frac{\nu-5}{8}+\frac{\nu'}{2}}\varphi(\rho),\quad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'') = p^{\frac{\nu-5}{8}+\frac{\nu''}{2}}\chi(\rho),$$

en désignant par

$$\varphi(\rho),\quad \chi(\rho)$$

deux fractions qui auront pour numérateurs et pour dénominateurs des produits de la forme

$$R_{h,n-h}\,R_{k,n-k}\ldots$$

composés de facteurs dont aucun ne deviendra divisible par p, lorsqu'on substituera r à ρ; puis, en ayant égard aux équations (30) du § II, et à la formule

$$\frac{\nu-3}{2}=\frac{\nu-5}{4}+\frac{\nu-1}{4}=\frac{\nu-5}{4}+\frac{\nu'+\nu''}{2},$$

on trouvera encore

$$\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)=p^{\frac{\nu-5}{8}+\frac{\nu''}{2}}\frac{1}{\varphi(\rho)},\quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')=p^{\frac{\nu-5}{8}+\frac{\nu'}{2}}\frac{1}{\chi(\rho)}.$$

Si ν, au lieu d'être de la forme $8x+5$, était de la forme $8x+1$, les valeurs de

$$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma),\quad \mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma''),\quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma),\quad \mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')$$

seraient semblables à celles que nous venons de trouver, à cela près que, dans les exposants de p, la première partie

$$\frac{\nu-5}{8}$$

se trouverait remplacée par

$$\frac{\nu-1}{8}.$$

Dans l'un et l'autre cas, on aura

$$\frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)}{p^{\frac{\nu'}{2}}\varphi(\rho)}=\frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma'')}{p^{\frac{\nu''}{2}}\chi(\rho)}=\frac{\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)}{p^{\frac{\nu''}{2}}\frac{1}{\varphi(\rho)}}=\frac{\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')}{p^{\frac{\nu'}{2}}\frac{1}{\chi(\rho)}};$$

puis on tirera de cette dernière formule, combinée avec les équations (49),

$$\frac{\delta + \varepsilon\sqrt{-1}}{\delta - \varepsilon\sqrt{-1}} = \frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma)}{\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma'')} = \frac{\mathfrak{F}(\sqrt{-1}, \varsigma'')}{\mathfrak{F}(-\sqrt{-1}, \varsigma)} = \varphi(\rho)\,\chi(\rho);$$

et par suite

$$(\delta + \varepsilon\sqrt{-1})^2 = (\delta^2 + \varepsilon^2)\,\varphi(\rho)\,\chi(\rho),$$
$$(\delta - \varepsilon\sqrt{-1})^2 = (\delta^2 + \varepsilon^2)\,\frac{1}{\varphi(\rho)\,\chi(\rho)}.$$

Si dans ces dernières formules on remplace ρ par r, on devra remplacer en même temps $\sqrt{-1}$ par a, et le signe $=$ par le signe $\equiv$, le module étant le nombre p. On trouvera ainsi

$$\left.\begin{aligned}(\delta + \varepsilon a)^2 &\equiv (\delta^2 + \varepsilon^2)\,\varphi(r)\,\chi(r),\\ (\delta - \varepsilon a)^2 &\equiv (\delta^2 + \varepsilon^2)\,\frac{1}{\varphi(r)\,\chi(r)}.\end{aligned}\right\} (\text{mod. } p)$$

Donc, puisque $\varphi(r)$, $\chi(r)$ ne sont équivalents ni à zéro, ni à $\frac{1}{0}$, suivant le module p, la somme

$$\delta^2 + \varepsilon^2$$

ne pourra devenir divisible par p, qu'avec les deux binomes

$$\delta + \varepsilon a, \quad \delta - \varepsilon a,$$

par conséquent avec les deux nombres

$$\delta, \ \varepsilon.$$

D'ailleurs il est permis de supposer que les nombres δ, ε sont premiers entre eux, attendu qu'on n'altère pas les équations (49), en transportant dans $\mathfrak{G}$ et dans γ les facteurs qui seraient communs à δ et à ε. Donc, cette hypothèse étant admise, $\delta^2 + \varepsilon^2$ sera premier à p; et, si l'on nomme comme ci-dessus $\frac{x}{y}$ la forme la plus simple de la fraction $\frac{\beta}{\gamma}$, l'équation (47) ou (48) entraînera, ou les deux suivantes

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = 1, \quad x^2 + \nu y^2 = p^\mu,$$

si des nombres x, y l'un est pair et l'autre impair, ou les deux suivantes

$$\delta^2 + \varepsilon^2 = 2, \quad x + \nu y^2 = 2p^\mu,$$

si les nombres x, y sont tous deux impairs. Dans le premier cas on aura

$$\delta = \pm 1, \quad \varepsilon = 0$$

ou

$$\delta = 0, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

par conséquent

$$(\delta \pm \varepsilon a)^2 \equiv \pm 1, (\text{mod. } p)$$

et

$$\varphi(r)\, \chi(r) \equiv \pm 1, (\text{mod. } p).$$
$$[\varphi(r)\, \chi(r)]^2 \equiv 1, \quad (\text{mod. } p).$$

Dans le second cas, qui ne se présente jamais lorsque ν est de la forme $8x + 5$, on aurait

$$\delta = \pm 1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

par conséquent

$$(\delta \pm \varepsilon a)^2 \equiv \pm 2a, (\text{mod. } p)$$

et

$$[\varphi(r)\, \chi(r)]^2 \equiv \pm a, (\text{mod. } p).$$
$$\varphi(r)\, \chi(r) \equiv -1, (\text{mod. } p).$$

Pour déduire de ce qui a été dit plus haut la valeur du produit

$$\varphi(r)\, \chi(r),$$

il suffirait d'observer que les deux expressions

$$p^{\frac{\nu'}{2}}\varphi(\rho),\quad p^{\frac{\nu''}{2}}\chi(\rho)$$

renferment tous les facteurs de la forme

$$R_{h,\,2\nu-h} = R_{h,\,n+2\nu-h} = R_{h,\,6\nu-h},$$

h désignant un nombre distinct de ν et compris parmi les termes de la suite

$$1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ 4\nu-11,\ 4\nu-7,\ 4\nu-3.$$

Comme d'ailleurs, pour mettre en évidence les facteurs égaux à p, il suffit de remplacer

$$R_{h,\,2\nu-h}\quad\text{par}\quad \frac{p}{R_{n-h,\,n-2\nu+h}} = \frac{p}{R_{4\nu-h,\,2\nu+h}},$$

lorsque h est renfermé entre les limites 0, 2ν, on trouvera

$$\varphi(\rho)\,\chi(\rho) = \frac{R_{2\nu+3,\,4\nu-3}\,R_{2\nu+7,\,4\nu-7}\ldots R_{3\nu-2,\,3\nu+2}}{R_{2\nu+1,\,4\nu-1}\,R_{2\nu+5,\,4\nu-5}\ldots R_{3\nu-4,\,3\nu+4}}.$$

Il y a plus : comme on aura généralement, ainsi qu'il est facile de le prouver

$$R^2_{h,\,2\nu-h} = R_{h,h}\,R_{2\nu-h,\,2\nu-h},$$

on trouvera encore

$$[\varphi(\rho)\,\chi(\rho)]^2 = \frac{R_{2\nu+3,\,2\nu+3}\,R_{2\nu+7,\,2\nu+7}\ldots R_{4\nu-3,\,4\nu-3}}{R_{2\nu+1,\,2\nu+1}\,R_{2\nu+5,\,2\nu+5}\ldots R_{4\nu+1,\,4\nu-1}}.$$

Si maintenant on remplace ρ par r, et le signe $=$ par le signe $\equiv$, on devra remplacer généralement

$$R_{h,k}$$

par

$$-\Pi_{n-h,\,n-k};$$

et l'on aura par suite

$$\varphi(r)\chi(r) \equiv \frac{\Pi_{3,2\nu-3}\Pi_{7,2\nu-7}\ldots\Pi_{\nu-2,\nu+2}}{\Pi_{1,2\nu-1}\Pi_{5,2\nu-5}\ldots\Pi_{\nu-4,\nu+4}}, \ (\text{mod.}\ p)$$

$$[\varphi(r)\chi(r)]^2 \equiv \frac{\Pi_{3,8}\Pi_{7,7}\ldots\Pi_{\nu-2,\nu-2}\Pi_{\nu+2,\nu+2}\ldots\Pi_{2\nu-3,2\nu-3}}{\Pi_{1,1}\Pi_{5,5}\ldots\Pi_{\nu-4,\nu-4}\Pi_{\nu+4,\nu+4}\ldots\Pi_{2\nu-1,2\nu-1}}, \ (\text{mod.}\ p).$$

En joignant cette dernière formule à celles que nous avons précédemment obtenues, on arrivera immédiatement aux conclusions renfermées dans le théorème suivant :

Théorème. ν et p étant deux nombres premiers, l'un de la forme $4x+1$, et l'autre de la forme $4\nu x+1$, supposons que la suite des nombres

$$1,\ 5,\ 9, \ldots\ 2\nu-9,\ 2\nu-5,\ 2\nu-1$$

offre ν' racines de l'équivalence

$$x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod.}\ \nu)$$

et ν'' raeine de l'équivalenee

$$x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \ (\text{mod.}\ \nu),$$

on aura

$$\nu' + \nu'' = \frac{\nu-1}{2},$$

et, si l'on nomme

$$\mu$$

la valeur numérique de

$$\frac{\nu'-\nu''}{2},$$

on pourra satisfaire, par des nombres x, y entiers et premiers entre eux, à l'équation

$$x^2 + \nu y^2 = p^\mu,$$

non-seulement lorsque ν sera de la forme $8x + 5$, mais aussi lorsque, ν étant de la forme $8x + 1$, le rapport

$$\frac{\Pi_{1,2\nu-1}\Pi_{5,2\nu-5}\ldots\Pi_{\nu-1,\nu+1}}{\Pi_{3,2\nu-3}\Pi_{7,2\nu-7}\ldots\Pi_{\nu-2,\nu+2}}$$

sera une des racines de l'équivalence

$$x^2 \equiv 1, \ (\text{mod. } p).$$

Si le même rapport cessait d'être équivalent, suivant le module p, à $+1$ ou à -1, il suit de ce qu'on a dit qu'il deviendrait racine de l'équivalence

$$x^2 \equiv -1, \ (\text{mod. } p);$$

et alors on pourrait satisfaire, par des nombres x, y entiers et premiers entre eux, à l'équation

$$x^2 + \nu y^2 = 2p^\mu.$$

Au reste nous n'avons pas encore trouvé d'exemple dans lequel le rapport dont il s'agit ne fût équivalent, suivant le module p, à ± 1; et, si l'on démontrait qu'il en est toujours ainsi, on en conclurait immédiatement qu'on peut satisfaire, par des nombres x, y entiers et premiers entre eux, à l'équation

$$x^2 + \nu y^2 = p^\mu,$$

non-seulement, lorsque ν est de la forme $8x + 5$, mais encore, lorsque ν est de la forme $8x + 1$.

Il nous reste à montrer comment on peut déterminer directement la valeur du nombre

$$\mu = \pm \frac{\nu' - \nu''}{2}.$$

Parmi les termes de la suite

$$1,\ 5,\ 9,\ \dots\ 2\nu-9,\ 2\nu-5,\ 2\nu-1,$$

plusieurs, en nombre égal à ν', vérifient l'équation

$$x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu);$$

d'autres, en nombre égal à ν'', vérifient l'équivalence

$$x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, (\text{mod. } \nu),$$

et un seul, savoir le terme ν, satisfait à la condition

$$x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 0, (\text{mod. } \nu).$$

Cela posé, il est clair qu'on aura non-seulement

$$\nu' + \nu'' = \frac{\nu-1}{2},$$

mais encore

$$\nu'-\nu'' \equiv 1^{\frac{\nu-1}{2}} + 5^{\frac{\nu-1}{2}} + 9^{\frac{\nu-1}{2}} + \dots + (2\nu-9)^{\frac{\nu-1}{2}} + (2\nu-5)^{\frac{\nu-1}{2}} + (2\nu-1)^{\frac{\nu-1}{2}}, (\text{mod. } \nu),$$

par conséquent

$$\nu'-\nu'' \equiv \frac{d^{\frac{\nu-1}{2}}}{dz^{\frac{\nu-1}{2}}}\left(e^{z} + e^{5z} + e^{9z} + \dots + e^{(2\nu-9)z} + e^{(2\nu-5)z} + e^{(2\nu-1)z}\right), (\text{mod. } \nu)$$

pourvu que l'on suppose $z=0$, après les différenciations effectuées. On aura d'ailleurs

$$e^{z} + e^{5z} + e^{9z} + \dots + e^{(2\nu-1)z} = \frac{e^{(2\nu+3)z} - e^{z}}{e^{4z}-1} = (e^{2\nu z}-1)\frac{e^{z}}{e^{2z}-e^{-2z}} + \frac{1}{e^{z}+e^{-z}};$$

et, comme le facteur

$$e^{2\nu z} - 1,$$

ainsi que ses dérivées relatives à z, devient, pour une valeur nulle de z, équivalent à zéro suivant le module ν, on trouvera en définitive

$$\nu' - \nu'' \equiv \frac{d^{\frac{\nu-1}{2}}}{dz^{\frac{\nu-1}{2}}}\left(\frac{1}{e^z + e^{-z}}\right), \pmod{\nu};$$

par conséquent

$$\nu' - \nu'' \equiv \frac{1}{2}\frac{d^{\frac{\nu-1}{2}}}{dz^{\frac{\nu-1}{2}}}\left(1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)^{-1} \pmod{\nu},$$

et

$$\mu \equiv \pm\frac{1}{4}\frac{d^{\frac{\nu-1}{2}}}{dz^{\frac{\nu-1}{2}}}\left(1 + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)^{-1}, \pmod{\nu},$$

z devant être réduit à zéro après les différenciations; puis on en conclura

$$\mu \equiv \pm\frac{1.2.3\ldots\frac{\nu-1}{2}}{4}\,\mathrm{S}\left[(-1)^{f+g+h+\ldots}\frac{1.2.3..(f+g+..)}{(1.2..f)\,(1.2..g)..}\left(\frac{1}{1.2}\right)^f\left(\frac{1}{1.2.3.4}\right)^g\ldots\right], \pmod{\nu},$$

le signe S devant s'étendre à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de $f, g, \ldots$ qui vérifient la formule

$$f + 2g + 3h + \ldots = \frac{\nu-1}{4},$$

et chacun des produits $1.2..f$, $1.2..g$,... devant être remplacé par l'unité, lorsque le dernier facteur f, ou g,... se réduit à zéro. La valeur de l'exposant μ se trouvera ainsi complétement déterminée, puisque d'ailleurs cet exposant doit être positif et inférieur à

$$\frac{\nu' + \nu''}{2} = \frac{\nu - 1}{4}.$$

Si l'on prend successivement pour ν les différents termes de la suite

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41,\ 53,\ 61,\ldots$$

on trouvera successivement

pour $\nu = 5$, $\mu \equiv \mp \frac{1.2}{4}\frac{1}{2} \equiv \mp \frac{1}{4} \equiv \pm 1$, $\mu = 1$,

pour $\nu = 13$, $\mu \equiv \mp \frac{1.2.3.4.5.6}{4}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\right) \equiv \pm 1$,

$$\mu = 1;$$

pour $\nu = 17$, $\mu = 2$, etc...

NOTE III.

SUR LA MULTIPLICATION DES FONCTIONS Θ_h, Θ_k,...

Les principales formules auxquelles nous sommes parvenus dans le précédent mémoire, y sont déduites de la considération des produits de la forme

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots$$

Lorsque, p étant un nombre premier impair, on désigne par

$$\theta, \tau$$

des racines primitives des équations

$$x^p = 1, \quad x^{p-1} = 1,$$

et par t une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p);$$

alors la valeur de Θ_h, déterminée par la formule

$$\Theta_h = \theta + \tau^h \theta^t + \tau^{2h} \theta^{t^2} + \ldots + \tau^{(p-2)h} \theta^{t^{p-2}},$$

ne varie pas quand on fait croître ou diminuer h d'un multiple de $p-1$; et l'on a, 1°, en supposant h divisible par $p-1$,

$$\Theta_h = \Theta_0 = -1,$$

2°, en supposant h non divisible par $p-1$,

$$\Theta_h \Theta_{-h} = (-1)^h p.$$

Si, au contraire, en nommant h un diviseur de $p-1$, on pose

$$\varpi = \frac{p-1}{n}, \quad \rho = \tau^\varpi,$$

et de plus

$$(1) \qquad \Theta_h = \theta + \rho^h \theta^t + \rho^{2h} \theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)h} \theta^{t^{p-2}},$$

alors Θ_h sera une fonction des racines primitives

$$\theta, \quad \rho$$

des deux équations

$$x^p = 1, \quad x^n = 1,$$

qui ne variera pas quand on fera croître ou diminuer h d'un multiple de n; et l'on aura, 1°, en supposant h divisible par n

$$(2) \qquad \Theta_h = \Theta_0 = -1;$$

2°, en supposant h non divisible par n

$$(3) \qquad \Theta_h \Theta_{-h} = (-1)^{\varpi h} p = \Theta_h \Theta_{n-h}.$$

Ajoutons qu'en vertu des principes établis dans la note première, si l'on multiplie Θ_h par Θ_k, on trouvera

$$(4)\qquad \Theta_h\Theta_k = R_{h,k}\Theta_{h+k},$$

$R_{h,k}$ désignant une fraction qui ne renfermera plus θ, mais seulement la racine primitive $\rho = \tau^{\varpi}$ et ses puissances entières. On aura d'ailleurs, lorsque $h+k$ ne sera pas divisible par n,

$$(5)\qquad R_{h,k} = S(\tau^{ih+jk})$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i et de j qui, étant comprises dans la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ p-2,$$

vérifient la formule

$$(6)\qquad t^i + t^j \equiv 1,\ (\text{mod.}\, p).$$

Soient maintenant

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

des nombres entiers divers. On trouvera successivement

$$\Theta_h\Theta_k = R_{h,k}\Theta_{h+k},$$
$$\Theta_h\Theta_k\Theta_l = R_{h,k}\Theta_{h+k}\Theta_l = R_{h,k}R_{h+k,l}\Theta_{h+k+l},\ \text{etc.}\ldots$$

Donc, si l'on pose généralement

$$(7)\qquad \Theta_h\Theta_k\Theta_l\ldots = R_{h,k,l,}\ldots\ \Theta_{h+k+l+\ldots}$$

$R_{h,k,l,}\ldots$ sera encore une fonction de ρ, déterminée par une équation de la forme

$$R_{h,k,l,}\ldots = R_{h,k}R_{h+k,l,}\ldots$$

Il est bon d'observer que si

$$h+k+l+\ldots$$

n'est pas divisible par n, on aura

$$R_{h,k,l,\dots} = S(\rho^{ih+i'k+i''l+\dots}) \tag{8}$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de $i, i', i'', \dots$ qui, étant comprises dans la suite

$$0, 1, 2, 3, \dots p-2,$$

vérifient la condition

$$t^i + t^{i'} + t^{i''} + \dots \equiv 1, \text{ (mod. } p). \tag{9}$$

Ajoutons qu'en vertu de la formule (7), l'expression

$$R_{h,k,l,\dots} = \frac{\Theta_h \Theta_k \Theta_l \dots}{\Theta_{h+k+l} \dots};$$

sera, comme le produit

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \dots$$

et comme l'expression

$$\Theta_{h+k+l\dots}$$
$$= \theta + \rho^h \rho^k \rho^l \dots \theta^t + \rho^{2h} \rho^{2k} \rho^{2l} \dots \theta^{t^2} + \dots + \rho^{(p-2)h} \rho^{(p-2)k} \rho^{(p-2)l} \dots \theta^{t^{p-2}},$$

une fonction entière et symétrique de

$$\rho^h, \rho^k, \rho^l, \dots$$

par conséquent une fonction linéaire des sommes

$$\rho^h + \rho^h + \rho^l + \dots$$
$$\rho^{2h} + \rho^{2k} + \rho^{2l} + \dots$$
$$\text{etc}\dots$$
$$\rho^{(n-1)h} + \rho^{(n-1)k} + \rho^{(n-1)l} + \dots,$$

dans lesquelles les coefficients seront des nombres entiers.

Les équations (2), (3) et (7), entraînent les diverses formules que nous avons données dans le mémoire, et particulièrement celles qui changent le quadruple d'un nombre premier p, ou d'une puissance entière de p, et quelquefois ce nombre lui-même, en expressions de la forme

$$x^2 + ny^2,$$

n étant un diviseur de $p-1$.

D'abord, si l'on suppose $n=2$, et par suite $\varpi = \frac{p-1}{2}$, la racine primitive ρ de l'équivalence

$$x^2 \equiv 1,$$

sera simplement

$$\rho \equiv -1,$$

et, en posant $h=1$, on tirera de la formule (3)

$$\Theta_1^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$$

ou, ce qui revient au même,

$$(10) \qquad (\theta - \theta^t + \theta^{t^2} - \ldots - \theta^{t^{p-2}})^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

On se trouvera ainsi ramené à la formule (14) de la note Ire.

Concevons maintenant que n soit un nombre premier impair. Alors les diverses racines primitives de l'équation

$$(11) \qquad x^n \equiv 1$$

seront

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-3}, \rho^{n-2}, \rho^{n-1};$$

et si l'on prend successivement pour h les divers exposants de ρ dans ces racines primitives, c'est-à-dire, les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots \quad n-3, n-2, n-1,$$

on obtiendra pour valeurs correspondantes de Θ_h les expressions

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ldots\ \Theta_{n-3},\ \Theta_{n-2},\ \Theta_{n-1},$$

lesquelles, eu égard à l'équation (3), vérifieront la formule

$$\Theta_1\Theta_{n-1}=\Theta_2\Theta_{n-2}=\ldots=\Theta_{\frac{n-1}{2}}\Theta_{\frac{n+1}{2}}=p,$$

par conséquent la suivante

$$(12)\qquad p^{\frac{n-1}{2}}=\Theta_1\Theta_2\Theta_3\ldots\Theta_{n-3}\,\Theta_{n-2}\,\Theta_{n-1}.$$

D'ailleurs les divers termes de la progression arithmétique

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ n-3,\ n-2,\ n-1$$

peuvent être censés représenter les diverses racines de l'équivalence

$$(13)\qquad x^{n-1}\equiv 1,\ (\text{mod. } n).$$

Il y a plus : si l'on nomme s une racine primitive de cette équivalence, les termes dont il s'agit, abstraction faite de l'ordre dans lequel ils sont rangés, seront équivalents, suivant le module n, aux divers termes de la progression géométrique

$$1,\ s,\ s^2,\ldots\ s^{n-2},$$

et par suite la formule (12) donnera

$$(14)\qquad p^{\frac{n-1}{2}}\equiv\Theta_1\Theta_s\Theta_{s^2}\ldots\Theta_{s^{n-3}}\,\Theta_{s^{n-2}}.$$

Observons à présent que l'équivalence (14) se décompose en deux autres, dont la première,

$$x^{\frac{n-1}{2}}\equiv 1,\ (\text{mod. } n),$$

a pour racines les puissances paires de s, savoir :

$$1,\ s^2,\ s^4, \ldots\ s^{n-3},$$

tandis que la seconde

$$x^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1,\ (\text{mod. } n)$$

a pour racines les puissances impaires de s. Donc le produit qui constitue le second membre de l'équation (14), peut être décomposé en deux autres produits de la forme

$$\Theta_1 \Theta_{s^2} \Theta_{s^4} \ldots \Theta_{s^{n-3}} = \mathrm{R}_{1,s^2,s^4 \ldots s^{n-3}}\, \Theta_{1+s^2+s^4+\ldots+s^{n-3}},$$
$$\Theta_s \Theta_{s^3} \Theta_{s^5} \ldots \Theta_{s^{n-2}} = \mathrm{R}_{s,s^3,s^5 \ldots s^{n-2}}\, \Theta_{s+s^3+s^5+\ldots+s^{n-2}};$$

et comme on aura

$$1 + s^2 + s^4 + \ldots + s^{n-3} = \frac{s^{n-1} - 1}{s^2 - 1} \equiv 0,\ (\text{mod. } n),$$
$$s + s^3 + s^5 + \ldots + s^{n-2} = s\frac{s^{n-1} - 1}{s^2 - 1} \equiv 0,\ (\text{mod. } n),$$

par conséquent

$$\Theta_{1+s^2+s^4+\ldots+s^{n-3}} = \Theta_0 = -1,$$
$$\Theta_{s+s^3+s^5+\ldots+s^{n-2}} = \Theta_0 = -1,$$

il est clair que les deux produits

$$\Theta_1 \Theta_{s^2} \Theta_{s^4} \ldots \Theta_{s^{n-3}}, \quad \Theta_s \Theta_{s^3} \Theta_{s^5} \ldots \Theta_{s^{n-2}},$$

se réduiront, le premier avec $\mathrm{R}_{1,s^2,s^4 \ldots s^{n-3}}$, à une fonction entière et symétrique de

$$\rho,\ \rho^{s^2},\ \rho^{s^4}, \ldots \rho^{s^{n-3}};$$

le second, avec $\mathrm{R}_{s,s^3,s^5 \ldots s^{n-2}}$, à une fonction semblable de

$$\rho^s,\ \rho^{s^3},\ \rho^{s^5}, \ldots \rho^{s^{n-2}},$$

les coefficients étant des nombres entiers. D'ailleurs, une fonction entière et symétrique de

$$\rho, \rho^{s^2}, \rho^{s^4}, \ldots \rho^{s^{n-3}},$$

sera simplement une fonction linéaire des sommes de la forme

$$\rho^m + \rho^{ms^2} + \rho^{ms^4} + \ldots + \rho^{ms^{n-3}},$$

m désignant un entier inférieur à n; et une semblable somme se réduit toujours à

$$\rho + \rho^{s^2} + \rho^{s^4} + \ldots + \rho^{s^{n-3}},$$

ou bien à

$$\rho^s + \rho^{s^3} + \rho^{s^5} + \ldots + \rho^{s^{n-2}},$$

selon que m est équivalent, suivant le module n, à une puissance paire ou à une puissance impaire de s. On aura donc, en désignant par c_0, c_1, c_2 des quantités entières,

$$\Theta_1 \Theta_{s^2} \Theta_{s^4} \ldots \Theta_{s^{n-3}} = c_0 + c_1 (\rho + \rho^{s^2} + \ldots + \rho^{s^{n-3}}) + c_2 (\rho^s + \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-2}}),$$

puis on en conclura, en remplaçant ρ par ρ^s,

$$\Theta_s \Theta_{s^3} \Theta_{s^5} \ldots \Theta_{s^{n-2}} = c_0 + c_1 (\rho^s + \rho^{s^3} + \ldots + \rho^{s^{n-2}}) + c_2 (\rho + \rho^{s^2} + \ldots + \rho^{s^{n-3}}).$$

D'autre part, les expressions

$$1, \rho, \rho^s, \ldots \rho^{s^{n-2}},$$

qui coïncident, à l'ordre près, avec les suivantes

$$1, \rho, \rho^2, \ldots \rho^{n-1},$$

représentent les diverses racines de l'équation

$$x^n = 1,$$

et offrent une somme nulle; en sorte qu'on a

$$\rho+\rho^{s}+\rho^{s^2}+\ldots+\rho^{s^{n-2}}=-1.$$

Ce n'est pas tout : si l'on pose

$$\rho-\rho^{s}+\rho^{s^2}-\ldots-\rho^{s^{n-2}}=\Delta,$$

on tirera de l'équation (10), en y remplaçant p par n, θ par ρ, et t par s,

$$\Delta^2=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n. \tag{15}$$

Cela posé, on trouvera

$$\rho+\rho^{s^2}+\ldots+\rho^{s^{n-3}}=-\frac{1-\Delta}{2},$$

$$\rho^{s}+\rho^{s^2}+\ldots+\rho^{s^{n-2}}=-\frac{1+\Delta}{2},$$

et par suite

$$\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\ldots\Theta_{s^{n-3}}=\frac{1}{2}(A+B\Delta),$$

$$\Theta_s\Theta_{s^3}\Theta_{s^5}\ldots\Theta_{s^{n-2}}=\frac{1}{2}(A+B\Delta),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{\begin{aligned} 2\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\ldots\Theta_{s^{n-3}}&=A+B\Delta,\\ 2\Theta_s\Theta_{s^3}\Theta_{s^5}\ldots\Theta_{s^{n-2}}&=A-B\Delta,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

les valeurs de A, B étant

$$A=2c_0-c_1-c_2,\quad B=c_1-c_2; \tag{17}$$

puis on tirera des équations (16), combinées avec les formules (14) et (15),

$$4p^{\frac{n-1}{2}}=A^2-B^2\Delta^2,$$

ou, ce qui revient au même

$$(18) \qquad 4p^{\frac{n-1}{2}} = A^2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} B^2,$$

les valeurs numériques de A, B étant deux entiers qui, en vertu des formules (17), seront de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs ou tous deux impairs.

Observons encore qu'en vertu de la formule

$$s^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } n),$$

l'équation

$$\Theta_h \Theta_{-h} = p,$$

pourra s'écrire comme il suit

$$(19) \qquad \Theta_{s^m} \Theta_{s^{m \pm \frac{n-1}{2}}} \equiv p, \text{ (mod. } n).$$

D'ailleurs, si l'exposant m est un terme de la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-2,$$

pour que l'exposant $m \pm \frac{n-1}{2}$ soit lui-même un terme de cette suite, il suffira de réduire le double signe $\pm$ au signe $+$ ou au signe $-$, selon que m sera inférieur ou supérieur à $\frac{n-1}{2}$. Enfin, dans la formule (19), les exposants

$$m, m \pm \frac{n-1}{2}$$

seront évidemment de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs ou tous deux impairs, si n est de la forme $4x+1$; tandis qu'ils seront d'espèces différentes, si n est de la forme $4x+3$. Donc, si n est de la forme $4x+1$, chacune des expressions

$$\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\Theta\ldots\Theta_{s^{n-3}},\quad \Theta_s\Theta_{s^3}\Theta_{s^5}\ldots\Theta_{s^{n-2}},$$

se composera de facteurs qui, multipliés deux à deux l'un par l'autre, fourniront des produits égaux à p. Donc alors les formules (16) devront se réduire à

$$\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\ldots\Theta_{s^{n-3}}=p^{\frac{n-1}{2}},$$
$$\Theta_s\Theta_{s^3}\Theta_{s^5}\ldots\Theta_{s^{n-2}}=p^{\frac{n-1}{2}},$$

et l'on aura en conséquence

$$A=2p^{\frac{n-1}{2}},\quad B=0.$$

Si au contraire n est de la forme $4x+3$, alors $\frac{n-1}{2}$ étant pair, l'équation (18) donnera

(20) $$4p^{\frac{n-1}{2}}=A^2+nB^2,$$

et, si, en nommant p^λ la plus haute puissance de p qui divise simultanément A et B, on pose

$$A=p^\lambda x,\quad B=p^\lambda y,$$
$$\mu=\frac{n-1}{2}-2\lambda,$$

on verra la formule (20) se réduire à

(21) $$4p^\mu=x^2+ny^2.$$

Si, pour abréger, on désignait par la notation

$$[1]$$

le produit

$$\Theta_1\Theta_{s^2}\Theta_{s^4}\ldots\Theta_{s^{n-3}}$$

composé des facteurs de la forme Θ_h qui correspondent aux valeurs de h propres à vérifier la formule

$$x^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1, (\text{mod.}\ n)$$

et par la notation

$$[-1]$$

le produit

$$\Theta_s\,\Theta_{s^3}\,\Theta_{s^5}\ldots\Theta_{s^{n-2}}$$

composé des facteurs de la forme Θ_h qui correspondent aux valeurs de h propres à vérifier la formule

$$x^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1, (\text{mod.}\ n),$$

les équations (14), (16) se présenteraient sous les formes

$$p^{\frac{n-1}{2}} = [1]\,[-1],$$
$$2[1] = A + B\Delta, \quad 2[-1] = A - B\Delta,$$

et les deux dernières se réduiraient, lorsque n serait de la forme $4x+1$, aux deux équations

$$[1] = p^{\frac{n-1}{2}}, \quad [-1] = p^{\frac{n-1}{2}}.$$

Concevons maintenant que n soit un nombre composé, en sorte qu'on ait

$$n = \nu\omega,$$

et supposons d'abord les facteurs

$$\nu,\ \omega$$

premiers entre eux. L'un d'eux, ν par exemple, sera nécessairement impair. Si d'ailleurs on nomme ς une racine primitive de l'équation

$$x^\nu = 1,$$

et α une racine primitive de l'équation

$$x^\omega = 1,$$

on pourra prendre

$$\rho = \varsigma\alpha;$$

puis, en supposant qu'un nombre entier donné h soit équivalent à i suivant le module ν, et j suivant le module ω, on trouvera

$$\rho^h = \varsigma^i\alpha^j.$$

Par suite l'équation (1) donnera

$$(22)\quad \Theta_h = \theta + \varsigma^i\alpha^j\theta^t + \varsigma^{2i}\alpha^{2j}\theta^{t^2} + \ldots + \varsigma^{(p-2)i}\alpha^{(p-2)j}\theta^{t^{p-2}}.$$

Pour abréger, nous désignerons par

$$\Theta_{i,j}$$

la valeur de Θ_h que fournit l'équation (22). Cela posé, on reconnaîtra sans peine, 1°, que la valeur de l'expression

$$\Theta_{i,j},$$

complétement déterminée pour chaque système de valeurs de i et de j, ne varie pas quand on fait croître i d'un multiple de ν, ou j d'un multiple de ω; 2° que l'équation

$$\Theta_h = \Theta_{i,j}$$

entraîne la suivante

$$\Theta_{-h} = \Theta_{-i,-j};$$

3° que les nombres h et i seront de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs ou tous deux impairs, si

$$\varpi = \frac{p-1}{\nu\omega}$$

est un nombre impair, puisque, ν étant impair et $p-1$ pair, ϖ ne pourra devenir impair que pour des valeurs paires de ω. De plus on tirera des formules (2) et (3), 1° en supposant à la fois i divisible par ν, et j par ω,

$$(23) \qquad \Theta_{i,j} = \Theta_{0,0} = -1;$$

2° dans la supposition contraire

$$(24) \qquad \Theta_{i,j}\Theta_{-i,-j} = (-1)^{\varpi j} p = \Theta_{i,j}\Theta_{\nu-i,\omega-j}.$$

Si ω est impair, ainsi que ν, alors ϖ étant nécessairement pair, la formule (24) donnera simplement

$$(25) \qquad \Theta_{i,j}\Theta_{-i,-j} = p.$$

Pour montrer une application de ces nouvelles formules, considérons d'abord le cas où

$$\omega \text{ et } \nu$$

seraient deux nombres premiers impairs. Soient dans ce cas, u une racine primitive de l'équivalence

$$(26) \qquad x^{\nu-1} \equiv 1, \pmod{\nu},$$

et a une racine primitive de l'équivalence

$$(27) \qquad x^{\omega-1} \equiv 1, \pmod{\omega}.$$

Les diverses racines de l'équivalence (26), en nombre égal à $\nu-1$, pourront être représentées indifféremment, soit par les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots \nu-2, \nu-1,$$

soit par les divers termes de la progression arithmétique

$$1,\ u,\ u^2,\ldots\ u^{\nu-3},\ u^{\nu-2};$$

et pareillement les diverses racines de l'équivalence (17), en nombre égal à $\omega-1$, pourront être représentées indifféremment, soit par les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots\ \omega-2,\ \omega-1,$$

soit par les divers termes de la progression géométrique

$$1, a, a^2, \ldots\ a^{\omega-3},\ a^{\omega-2}.$$

Or, parmi les valeurs de

$$\Theta_h = \Theta_{i,j}$$

que fournira l'équation (22), celles qu'on obtiendra en supposant h premier à n, ne différeront pas de celles qu'on peut obtenir en prenant pour i une racine quelconque de la formule (26), et pour j une racine quelconque de la formule (27). Donc elles coïncideront avec l'une quelconque de celles que présente le tableau suivant

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\Theta_{1,1}, & \Theta_{u,1}, & \Theta_{u^2,1}, \ldots\ldots & \Theta_{u^{\nu-2},1}; \\
\Theta_{1,a}, & \Theta_{u,a}, & \Theta_{u^2,a}, \ldots\ldots & \Theta_{u^{\nu-2},a}; \\
\Theta_{1,a^2}, & \Theta_{u,a^2}, & \Theta_{u^2,a^2}, \ldots\ldots & \Theta_{u^{\nu-2},a^2}; \\
\text{etc.}\ldots & & & \\
\Theta_{1,a^{\omega-2}}, & \Theta_{u,a^{\omega-2}}, & \Theta_{u^2,a^{\omega-2}}, \ldots & \Theta_{u^{\nu-2},u^{\omega-2}};
\end{array}\right.$$

et leur nombre N, déterminé par la formule

$$N = (\nu-1)(\omega-1)$$

ne sera autre chose que le nombre des termes de la suite

$$1, 2, 3, \ldots n-1$$

inférieurs à

$$n = \omega\nu,$$

mais premiers à n. D'ailleurs l'équation (7), combinée avec la formule

$$\Theta_{h+k+l+\ldots} = -1,$$

et réduite ainsi à la forme

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots = -R_{h,k,l,\ldots}$$

fournira pour valeur du produit

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots$$

une fonction entière et symétrique de

$$\rho^h,\ \rho^k,\ \rho^l, \ldots;$$

par conséquent une fonction entière et symétrique, non-seulement de

$$\varsigma^h,\ \varsigma^k,\ \varsigma^l, \ldots$$

mais encore de

$$\alpha^h,\ \alpha^k,\ \alpha^l, \ldots,$$

si la somme

$$h + k + l + \ldots$$

est divisible par

$$n = \omega\nu,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, si cette somme est divisible à la fois par ν et par ω. Or cette condition sera évidemment remplie, si l'on fait coïncider

$$\Theta_h,\ \Theta_k,\ \Theta_l, \ldots$$

avec celles des expressions de la forme

$$\Theta_{i,j}$$

qui, dans le tableau (28), offrent pour premier indice une puissance paire de u, et pour second indice une puissance paire de a; puisqu'alors la somme

$$h + k + l + \ldots$$

sera équivalente, suivant le module ν, au produit

$$\frac{\omega - 1}{2}(1 + u^2 + \ldots + u^{\nu-3}) = \frac{\omega - 1}{2}\,\frac{u^{\nu-1} - 1}{u^2 - 1} \equiv 0,$$

et suivant le module ω au produit

$$\frac{\nu - 1}{2}(1 + a^2 + \ldots + a^{\omega-3}) = \frac{\nu - 1}{2}\,\frac{a^{\omega-1} - 1}{a^2 - 1} \equiv 0.$$

D'autre part, en supposant

$$\Theta_h = \Theta_{i,j},$$

et par conséquent

$$i \equiv h, \ (\text{mod. } \nu), \quad j \equiv h, \ (\text{mod. } \omega),$$

on en conclura

$$\varsigma^h = \varsigma^i, \quad \alpha^h = \alpha^j.$$

Donc, en vertu des remarques précédentes, le produit

$$(\Theta_{1,1}\,\Theta_{u^2,1}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},1})(\Theta_{1,a^2}\,\Theta_{u^2,a^2}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a^2})\ldots(\Theta_{1,a^{\omega-3}}\,\Theta_{u^2,a^{\omega-3}}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a^{\omega-3}})$$

sera en même temps fonction symétrique de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2}, \varsigma^{u^4}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}}$$

et de

$$\alpha, \alpha^{a^2}, \alpha^{a^4}, \ldots \alpha^{a^{\omega-3}}.$$

Concevons maintenant que, pour abréger, on désigne par la notation

$$[1, 1]$$

le produit dont nous venons de parler, c'est-à-dire, en d'autres termes, le produit des valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui, étant premières à n, vérifient les deux équivalences

$$(29)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \nu), \quad x^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \omega).$$

Désignons de même par

$$[1, -1]$$

le produit des valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui vérifient les deux équivalences

$$(30)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \nu), \quad x^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \omega),$$

par

$$[-1, 1]$$

le produit des valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui vérifient les deux équivalences

$$(31)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \nu), \quad x^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } \omega),$$

enfin par

$$[-1, -1]$$

le produit des valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui vérifient les équivalences

$$(32)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \nu), \quad x^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \omega),$$

on aura

$$(33)\qquad [1, 1] =$$
$$(\Theta_{1,1}\Theta_{u^2,1}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},1})(\Theta_{1,a^2}\Theta_{u^2,a^2}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a^2})\ldots(\Theta_{1,a^{\omega-3}}\Theta_{u^2,a^{\omega-3}}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a^{\omega-3}}),$$

(34) $$[1, -1] =$$
$$(\Theta_{1,a}\Theta_{u^2,a}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a})(\Theta_{1,a^3}\Theta_{u^2,a^3}\ldots\Theta_{a^{\nu-3},a^3})\ldots(\Theta_{1,a^{\nu-2}}\Theta_{u^2,a^{\nu-2}}\ldots\Theta_{u^{\nu-3},a^{\nu-2}}),$$

(35) $$[-1, 1] =$$
$$(\Theta_{u,1}\Theta_{u^3,1}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},1})(\Theta_{u,a^2}\Theta_{u^3,a^2}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},a^2})\ldots(\Theta_{u,a^{\omega-3}}\Theta_{u^3,a^{\omega-3}}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},a^{\omega-3}}),$$

(36) $$[-1, -1] =$$
$$(\Theta_{1,a}\Theta_{u^3,a}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},a})(\Theta_{u,a^3}\Theta_{u^3,a^3}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},a^3})\ldots(\Theta_{u,a^{\omega-2}}\Theta_{u^3,a^{\omega-2}}\ldots\Theta_{u^{\nu-2},a^{\omega-2}}),$$

et, d'après ce qu'on a dit ci-dessus, le produit

$$[1, 1]$$

sera une fonction symétrique, non-seulement de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2}, \varsigma^{u^4}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}},$$

mais encore de

$$\alpha, \alpha^{a^2}, \alpha^{a^4}, \ldots \alpha^{a^{\omega-3}}.$$

Pareillement, on reconnaîtra que le produit

$$[1, -1]$$

est fonction symétrique, non-seulement de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2}, \varsigma^{u^4}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}},$$

mais encore de

$$\alpha^a, \alpha^{a^3}, \alpha^{a^5}, \ldots \alpha^{a^{\nu-2}};$$

que le produit

$$[-1, 1]$$

est fonction symétrique, non-seulement de

$$\varsigma^u, \varsigma^{u^3}, \varsigma^{u^5} \ldots \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore de

$$\alpha, \alpha^{a^2}, \alpha^{a^4} \ldots \alpha^{a^{\nu-3}};$$

enfin que le produit

$$[-1, -1]$$

est fonction symétrique, non-seulement de

$$\varsigma^u,\ \varsigma^{u^3}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore de

$$\alpha^a,\ \alpha^{a^3}, \ldots \alpha^{a^{\omega-2}}.$$

D'autre part, comme on aura

$$u^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \nu), \quad a^{\frac{\omega-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } \omega),$$

l'équation (25) pourra s'écrire comme il suit

$$(37) \qquad \Theta_{u^m, a^{m'}}\, \Theta_{u^{m \pm \frac{\nu-1}{2}}, a^{m' \pm \frac{\omega-1}{2}}} = p;$$

et il est clair que, dans cette équation, les exposants

$$m, \quad m \pm \frac{\nu - 1}{2}$$

seront de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs ou tous deux impairs, si ν est de la forme $4x + 1$, mais d'espèces différentes si ν est de la forme $4x + 3$. Pareillement, les exposants

$$m', \quad m' \pm \frac{\omega - 1}{2}$$

seront de même espèce, si ω est de la forme $4x + 1$, et d'espèces différentes, si ω est de la forme $4x + 3$. Cela posé, si les nombres

$$\nu, \omega$$

sont tous deux de la forme $4x + 1$, chacun des produits

$$[1, 1], \quad [1, -1], \quad [-1, 1], \quad [-1, -1],$$

composé de facteurs de la forme $\Theta_{i,j}$, en nombre égal à $\frac{N}{4}$, se réduira évidemment, en vertu de l'équation (37), à

$$p^{\frac{N}{8}}.$$

On aura donc alors les formules

$$[1, 1]=p^{\frac{N}{8}},\quad [1, -1]=p^{\frac{N}{8}},\quad [-1, 1]=p^{\frac{N}{8}},\quad [-1, -1]=p^{\frac{N}{8}},$$

qui entraîneront l'équation

$$(38)\qquad p^{\frac{N}{2}}=[1, 1]\,[1, -1]\,[-1, 1]\,[-1, 1],$$

analogue à la formule (14).

Si les nombres ν, ω, sont tous deux de la forme $4x+3$, alors on tirera des formules (33) et (36), ou (34) et (35), jointes à la formule (37)

$$(39)\qquad [1, 1]\,[-1, -1]=p^{\frac{N}{4}},\quad [1, -1]\,[-1, 1]=p^{\frac{N}{4}},$$

et l'on déduira encore de ces dernières, l'équation (38).

Enfin, si des nombres ν, ω un seul, ν par exemple, est de la forme $4x+1$, l'autre, ω, étant de la forme $4x+3$, alors on tirera des formules (33) et (34), ou (35) et (36) jointes à la formule (37)

$$(40)\qquad [1, 1]\,[1, -1]=p^{\frac{N}{4}},\quad [-1, 1]\,[-1, -1]=p^{\frac{N}{4}},$$

et l'on déduira encore de ces dernières, l'équation (38).

L'équation (38), analogue à (14), conduit aussi à des conclusions du même genre, lorsque les nombres

$$\nu, \omega$$

ne sont pas tous deux de la forme $4x+1$; et d'abord, supposons qu'ils soient tous deux de la forme $4x + 3$. Alors, dans le second membre de l'équation (38), le produit

$$[1, 1][1, -1]$$

représentera une fonction symétrique non-seulement de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}}$$

mais encore de

$$\alpha, \alpha^a, \alpha^{a^2}, \ldots \alpha^{a^{\omega-3}}, \alpha^{a^{\omega-2}},$$

par conséquent une fonction linéaire non-seulement des sommes

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}, \quad \varsigma^u + {}^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore de la somme

$$\alpha + \alpha^a + \alpha^{a^2} + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} + \alpha^{a^{\omega-2}}.$$

Or, comme cette dernière somme, qui comprend toutes les racines de l'équation

$$x^\omega = 1,$$

à l'exception de la racine 1, se réduira simplement à -1, il est clair qu'en supposant ν et ω tous deux de la forme $4x + 3$, et désignant par c_0, c_1, c_2 des quantités entières, on trouvera

$$[1,1][1,-1] = c_0 + c_1(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) + c_2(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}),$$

puis en remplaçant ς par ς^u

$$[-1,1][-1,-1] = c_0 + c_1(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}) + c_2(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}).$$

On pourra d'ailleurs présenter les deux équations qui précèdent, sous une forme analogue à celle des équations (16), et alors, en les multipliant l'une par l'autre, on obtiendra, au lieu de la formule (20), la suivante

(41) $$4p^{\frac{N}{2}} = A^2 + \nu B^2,$$

les valeurs entières de A, B étant toujours déterminées par les formules (17). Enfin, si, en nommant p^λ la plus haute puissance de p qui divise simultanément A et B, on pose

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y,$$
$$\mu = \frac{N}{2} - 2\lambda,$$

on verra la formule (41) se réduire à

(42) $$4p^\mu = x^2 + \nu y^2.$$

On pourrait encore, dans l'hypothèse admise, c'est-à-dire, lorsque ν, ω sont tous deux de la forme $4x + 3$, décomposer le second membre de la formule (38) en deux facteurs égaux, non plus aux deux produits

$$[1, 1][1, -1], \quad [-1, 1][-1, -1],$$

mais aux deux produits

$$[1, 1][-1, 1], \quad [1, -1][-1, -1],$$

et alors on se trouverait conduit, non plus à la formule (42), mais à une équation de la forme

(43) $$4p^\mu = x^2 + \omega y^2.$$

Considérons maintenant le cas où ν serait de la forme $4x + 1$, ω étant de la forme $4x + 3$. Alors la formule (41) se trouverait remplacée par les formules (40); en sorte qu'on aurait simplement

$$A = 2p^{\frac{N}{4}}, \quad B = 0;$$

et en conséquence la formule (42) cesserait de fournir la transformation d'une puissance entière de p, multipliée par 4, en un binôme de la forme

$$x^2 + \nu y^2.$$

Mais la formule (43) continuerait de subsister, et l'on pourrait au reste déduire une nouvelle formule de la décomposition du second membre de l'équation (38) en deux facteurs de la forme

$$[1, 1][-1, -1], \quad [1, -1][-1, 1].$$

Alors en effet le produit

$$[1, 1][-1, -1]$$

serait une fonction entière et symétrique, non-seulement de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}},$$

et de

$$\varsigma^{u}, \varsigma^{u^3}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore de

$$\alpha, \alpha^{a^2}, \ldots \alpha^{a^{\omega-3}}$$

et de

$$\alpha^{a}, \alpha^{a^3}, \ldots \alpha^{a^{\omega-2}},$$

qui ne serait point altérée, quand on y remplacerait simultanément

$$\varsigma \text{ par } \varsigma^{u}, \quad \alpha \text{ par } \alpha^{a},$$

les coefficients numériques des différents termes étant d'ailleurs des nombres entiers. Par suite, le produit

$$[1, 1][-1, -1]$$

se réduirait à une fonction linéaire, non-seulement des sommes

$$(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}}) + (\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}),$$
$$(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots \alpha^{a^{\omega-3}}) + (\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}}),$$

mais encore des sommes

$$(\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}})(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}})$$
$$+ (\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}),$$

$$(\alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}})(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}})$$
$$+ (\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}})(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}).$$

Or, des quatre sommes qui précèdent, les deux premières se réduiront à -1, puisqu'on aura généralement

$$\varsigma + \varsigma^u + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} + \varsigma^{u^{\nu-2}} = -1,$$
$$\alpha + \alpha^a + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} + \alpha^{a^{\omega-2}} = -1;$$

et quant aux deux dernières, comme, en posant pour abréger

$$\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{\nu-2} = \Delta,$$
$$\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} - \alpha^{\omega-2} = \Delta',$$

on trouve

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} = -\frac{1-\Delta}{2}, \quad \varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}} = -\frac{1+\Delta}{2},$$
$$\alpha + \alpha^{a^2} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-3}} = -\frac{1-\Delta'}{2}, \quad \alpha^a + \alpha^{a^3} + \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}} = -\frac{1+\Delta'}{2},$$

elles pourront être représentées par les expressions

$$\frac{1-\Delta'}{2}\,\frac{1-\Delta}{2} + \frac{1+\Delta'}{2}\,\frac{1+\Delta}{2} = \frac{1+\Delta\Delta'}{2},$$
$$\frac{1-\Delta'}{2}\,\frac{1-\Delta}{2} + \frac{1+\Delta'}{2}\,\frac{1+\Delta}{2} = \frac{1-\Delta\Delta'}{2}.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, le produit

$$[1, 1][-1, -1]$$

se réduira simplement à une fonction entière et linéaire des rapports

$$\frac{1+\Delta\Delta'}{2}, \quad \frac{1-\Delta\Delta'}{2},$$

les coefficients étant des nombres entiers ; en sorte qu'on aura

$$[1,\ 1]\,[-1,\ -1] = c_0 + c_1\,\frac{1+\Delta\Delta'}{2} + c_2\,\frac{1-\Delta\Delta'}{2},$$

c_0, c_1, c_2 désignant des quantités entières. Si l'on pose maintenant

$$A = 2c_0 + c_1 + c_2, \quad B = c_1 - c_2,$$

la formule précédente donnera

$$2[1,\ 1]\,[-1,\ -1] = A + B\Delta\Delta', \tag{44}$$

les valeurs numériques de A, B étant deux entiers de même espèce, c'est-à-dire, tous deux pairs ou tous deux impairs. D'autre part, si dans la formule (44) on remplace ς par ς^u, sans remplacer en même temps α par α^a, alors, au lieu de cette formule, on obtiendra la suivante

$$2[1,\ -1]\,[-1,\ 1] = A - B\Delta\Delta', \tag{45}$$

puis on tirera des formules (44), (45), combinées avec l'équation (38),

$$4p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2\Delta^2\Delta'^2. \tag{46}$$

De plus on aura, en vertu de l'équation (10),

$$(\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} - \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}} - \varsigma^{u^{\nu-2}})^2 = (-1)^{\frac{\nu-2}{2}}\,\nu,$$

$$(\alpha - \alpha^a + \alpha^{a^2} - \ldots + \alpha^{a^{\omega-2}} - \alpha^{a^{\omega-3}})^2 = (-1)^{\frac{\omega-2}{2}}\,\omega,$$

ou, ce qui revient au même

$$\Delta^2 = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu, \quad \Delta'^2 = (-1)^{\frac{\omega-1}{2}}\omega.$$

Donc, lorsque ν sera, comme on le suppose, de la forme $4x+1$, ω étant de la forme $4x+3$, on trouvera

$$\Delta^2 = \nu, \quad \Delta'^2 = -\omega,$$

et la formule (46) donnera

(47) $$4p^{\frac{N}{2}} = A^2 + \nu\omega B^2.$$

Enfin, si l'on nomme p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément A et B, alors en posant

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y,$$
$$\mu = \frac{N}{2} - 2\lambda,$$

on verra la formule (47) se réduire à

(48) $$4p^\mu = x^2 + \nu\omega y^2,$$

ou, ce qui revient au même, à l'équation

(49) $$4p^\mu = x^2 + ny^2,$$

la valeur de n étant

$$n = \nu\omega.$$

Il est bon d'observer que, le nombre ν étant supposé de la forme $4x+1$, et le nombre ω de la forme $4x+3$, le nombre n sera de la forme $4x+3$, dans l'équation (49) aussi bien que dans l'équation (21). On peut ajouter que n, étant le produit de deux facteurs premiers impairs, ν, ω, ne pourra être de la forme $4x+3$ que dans le cas où un seul des facteurs sera de cette forme. Effectivement, si ν et ω étaient tous deux de la forme $4x+3$, ou tous deux de la forme $4x+1$, leur produit

$$n=\nu\omega$$

serait évidemment de la forme $4x+1$.

Les diverses formules qui précèdent, s'accordent avec celles que nous avons établies dans le premier et les deux derniers paragraphes du mémoire. Elles peuvent d'ailleurs être facilement étendues au cas où n serait le produit de plusieurs nombres premiers impairs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

Ainsi, en particulier, supposons

$$n=\nu\nu'\nu'',$$

ν, ν', ν'' désignant trois nombres premiers impairs, et représentons par

$$[1,\ 1,\ 1]$$

le produit des diverses valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui, étant premières à n, vérifient les équivalences

$$(50)\quad x^{\frac{\nu-1}{2}}\equiv 1,(\mathrm{mod}.\ \nu),\quad x^{\frac{\nu'-1}{2}}\equiv 1,(\mathrm{mod}.\ \nu'),\quad x^{\frac{\nu''-1}{2}}\equiv 1,(\mathrm{mod}.\ \nu'').$$

Soit encore

$$[-1,\ -1,\ -1]$$

le produit des diverses valeurs de Θ_h, correspondantes aux valeurs de h, qui, étant premières à n, vérifient les équivalences

$$(51)\ x^{\frac{\nu-1}{2}}\equiv -1,(\mathrm{mod}.\nu),\ x^{\frac{\nu'-1}{2}}\equiv -1,(\mathrm{mod}.\nu'),\ x^{\frac{\nu''-1}{2}}\equiv -1,(\mathrm{mod}.\nu'');$$

et concevons que l'on emploie, dans un sens analogue, chacune des huit expressions comprises dans la formule

$$[\pm 1, \pm 1, \pm 1],$$

de sorte qu'à un changement de signe opéré dans le dernier membre de la première, ou de la seconde, ou de la troisième des formules (50), doive toujours correspondre un changement du signe qui affecte la première, la seconde ou la troisième unité dans la notation

$$[1, 1, 1].$$

Soient d'ailleurs respectivement

$$u, u', u''$$

des racines primitives des trois équivalences

$$x^{\nu-1} \equiv 1, (\text{mod. } \nu), \quad x^{\nu'-1} \equiv 1, (\text{mod. } \nu'), \quad x^{\nu''-1} \equiv 1, (\text{mod. } \nu''),$$

et

$$\varsigma, \varsigma', \varsigma''$$

des racines primitives des trois équations

$$x^{\nu} = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1.$$

Enfin posons

$$(52) \qquad \varsigma - \varsigma^{u} + \varsigma^{u^2} - \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{u^{\nu-2}} = \Delta,$$

et nommons Δ', Δ'' ce que devient Δ quand on remplace ν par ν' ou ν''. Chacune des huit expressions

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} [1, 1, 1], [1, -1, -1], [-1, 1, -1], [-1, -1, 1], \\ [-1, -1, -1], [-1, 1, 1], [1, -1, 1], [1, 1, -1], \end{array} \right.$$

sera une fonction entière et symétrique, non-seulement de

$$\varsigma, \varsigma^{u^2} \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}}$$

ou de

$$\varsigma^{u}, \quad \varsigma^{u^3}, \dots . \varsigma^{u^{\nu-3}}$$

mais encore de

$$\varsigma', \quad \varsigma'^{u'^2}, \dots . \varsigma'^{u'^{\nu'-3}},$$

ou de

$$\varsigma'^{u'}, \quad \varsigma'^{u'^3}, \dots . \varsigma'^{u'^{\nu'-2}},$$

et aussi de

$$\varsigma'', \quad \varsigma''^{u''^2}, \dots \varsigma''^{u''^{\nu''-3}},$$

ou de

$$\varsigma''^{u''}, \varsigma''^{u''^3}, \dots . \varsigma''^{u''^{\nu''-3}},$$

les coefficients numériques étant des nombres entiers. Par suite, on pourra en dire autant des produits qu'on obtient en multipliant l'une par l'autre, deux ou plusieurs des expressions (53); et chacun de ces produits, ainsi que chacune de ces expressions, sera non-seulement une fonction linéaire des deux sommes

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \dots + \varsigma^{u^{\nu-3}} = -\frac{1-\Delta}{2}, \quad \varsigma, + \varsigma^{u^3} + \dots + \varsigma^{u^{\nu-2}} = -\frac{1+\Delta}{2}$$

par conséquent des deux rapports

$$\frac{1-\Delta}{2}, \quad \frac{1+\Delta}{2},$$

mais encore une fonction linéaire des deux rapports

$$\frac{1-\Delta'}{1}, \quad \frac{1+\Delta'}{2},$$

et aussi une fonction linéaire des deux rapports

$$\frac{1-\Delta''}{2}, \quad \frac{1+\Delta''}{2}.$$

Donc chacune des expressions (53), ou chacun de leurs produits, multiplié par $2^3 = 8$, deviendra non-seulement une fonction linéaire de

$$1 - \Delta, \quad 1 + \Delta,$$

par conséquent de Δ, mais encore une fonction linéaire de

$$1-\Delta', \quad 1+\Delta',$$

par conséquent de Δ', et aussi une fonction linéaire de

$$1-\Delta'', \quad 1+\Delta'',$$

par conséquent de Δ''; de manière à offrir généralement huit termes dont l'un sera constant, les sept autres termes étant respectivement proportionnels à

$$\Delta,\ \Delta',\ \Delta'',\ \Delta\Delta',\ \Delta\Delta'',\ \Delta'\Delta'',\ \Delta\Delta'\Delta'',$$

et les coefficients numériques étant toujours des nombres entiers. Ajoutons que de la première des expressions (53) on peut déduire successivement les sept autres, en y remplaçant séparément ou simultanément

$$\Delta \text{ par } -\Delta, \quad \Delta' \text{ par } -\Delta', \quad \Delta'' \text{ par } -\Delta'';$$

c'est-à-dire, en changent le signe de Δ, ou de Δ', ou de Δ'', au moment où, dans la notation

$$[1, 1, 1],$$

on change le signe qui affecte la première, la seconde, ou la troisième unité. Cela posé, si l'on considère en particulier les deux produits

$$(54)\quad \begin{cases} [1, 1, 1]\,[1, -1, -1]\,[-1, 1, -1]\,[-1, -1, 1], \\ [-1, -1, -1]\,[-1, 1, 1]\,[1, -1, 1]\,[1, 1, -1], \end{cases}$$

il est clair que chacun d'eux restera invariable, tandis que des trois différences représentées par

$$\Delta,\ \Delta',\ \Delta''$$

deux seulement changeront de signe, et que, pour déduire le second produit du premier, il suffira de changer à la fin le signe de Δ, celui de Δ' et celui de Δ''. Il suit de cette remarque, et de ce qui a été dit plus haut, que les produits (54), multipliés par le nombre $2^3 = 8$, ne devront renfermer aucun terme proportionnel à une seule des différences

$$\Delta,\ \Delta',\ \Delta''$$

ou à l'un des produits partiels

$$\Delta\Delta',\ \Delta\Delta'',\ \Delta'\Delta'',$$

et devront se réduire à deux binômes de la forme

$$\begin{aligned} &a + b\Delta\Delta'\Delta'' \\ &a - b\Delta\Delta'\Delta'', \end{aligned}$$

a, b désignant deux quantités entières. On aura donc

$$(55)\left\{\begin{aligned} &8[1,1,1][1,-1,-1][-1,1,-1][-1,-1,1] = a + b\Delta\Delta'\Delta'', \\ &8[-1,-1,-1][-1,1,1][1,-1,1][1,1,-1] = a - b\Delta\Delta'\Delta''. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, chacun des produits (54), pouvant être considéré comme une fonction entière des rapports

$$\frac{1-\Delta}{2},\quad \frac{1+\Delta}{2},\quad \frac{1-\Delta'}{2},\quad \frac{1+\Delta'}{2},\quad \frac{1-\Delta''}{2},\quad \frac{1+\Delta''}{2},$$

dans laquelle les coefficients numériques sont entiers, se réduira, au signe près, à un nombre entier, si l'on y remplace chacune des différences

$$\Delta,\ \Delta',\ \Delta''$$

par un nombre impair; par exemple, par l'unité. Donc un tel remplacement doit rendre le premier membre, et par suite le second membre de chacune des équations (55), divisible par 8. Donc les deux binômes

$$a+b, \quad a-b$$

seront divisibles par 8; d'où il suit que leurs deux sommes a, et leurs demi-différences b seront divisibles par 4, ou de la forme

$$a=4A, \quad b=4B,$$

A, B étant des quantités entières. Donc les formules (55) donneront

$$(56)\begin{cases} 2[1,1,1][1,-1,-1][-1,1,-1][-1,-1,1]=A+B\Delta\Delta'\Delta'', \\ 2[-1,-1,1][-1,1,1][1,-1,1][1,1,-1]=A-B\Delta\Delta'\Delta'', \end{cases}$$

les valeurs numériques de A, B étant des nombres entiers.

Observons à présent que -1 sera une racine de l'équivalence

$$(57) \qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } \nu)$$

si, ν étant de la forme $4x+1$, le rapport $\frac{\nu-1}{2}$ est un nombre pair; et sera au contraire une racine de l'équivalence

$$(58) \qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1, (\text{mod. } \nu)$$

si, ν étant de la forme $4x+3$, le rapport $\frac{\nu-1}{2}$ est un nombre impair. Donc par suite, des deux quantités

$$h, -h,$$

l'une sera racine de l'équivalence (57), et l'autre racine de l'équivalence (58), si ν est de la forme $4x+1$; mais toutes deux seront racines d'une seule de ces équivalences, si ν est de la forme $4x+3$. Pareillement, les deux quantités $+h, -h$ seront racines, l'une de l'équivalence

$$(59) \qquad x^{\frac{\nu'-1}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } \nu'),$$

l'autre de l'équivalence

$$(60) \qquad x^{\frac{\nu'-1}{2}} \equiv -1, (\text{mod. } \nu'),$$

si ν' est de la forme $4x+1$; et toutes deux au contraire seront racines d'une seule de ces équivalences, si ν est de la forme $4x+3$. Enfin les deux quantités $+h$, $-h$ seront racines, l'une de l'équivalence

$$(61) \qquad x^{\frac{\nu''-1}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } \nu''),$$

l'autre de l'équivalence

$$(62) \qquad x^{\frac{\nu''-1}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } \nu'')$$

si ν'' est de la forme $4x+1$; et toutes deux au contraire seront racines d'une seule de ces équivalences, si ν'' est de la forme $4x+3$. Cela posé, il est clair que les deux monômes

$$\Theta_h, \ \Theta_{-h}$$

appartiendront, comme facteurs, à une seule des expressions (53), si les nombres

$$\nu, \nu', \nu''$$

sont tous trois de la forme $4x+1$; et, comme le nombre des facteurs compris dans chacune de ces expressions est égal au huitième du produit

$$N = (\nu-1)(\nu'-1)(\nu''-1),$$

qui représente le nombre des termes premiers à $n = \nu\nu'\nu''$

dans la suite

$$1, 2, 3 \ldots n - 1,$$

on aura évidemment, dans le cas dont il s'agit, eu égard à la formule (3),

$$(63)\begin{cases} [1,\ 1,\ 1] = p^{\frac{N}{16}}, & [1, -1, -1] = p^{\frac{N}{16}}, & [-1, 1, -1] = p^{\frac{N}{16}}, & [-1, -1, 1] = p^{\frac{N}{16}} \\ [-1, -1, -1] = p^{\frac{N}{16}}, & [-1,\ 1,\ 1] = p^{\frac{N}{16}}, & [1, -1,\ 1] = p^{\frac{N}{16}}, & [1,\ 1, -1] = p^{\frac{N}{16}}. \end{cases}$$

Si des nombres

$$\nu, \nu', \nu''$$

deux seulement, par exemple ν, ν', sont de la forme $4x + 1$, le troisième ν'' étant de la forme $4x + 3$, alors, les monômes

$$\Theta_h, \Theta_{-h}$$

appartiendront comme facteurs, non plus à une seule, mais à deux des expressions (53), qui ne différeront entre elles que par le signe de la troisième unité, et l'on trouvera par suite

$$(64)\begin{cases} [1,\ 1,\ 1][1,\ 1, -1] = p^{\frac{N}{8}}, & [-1, -1, -1][-1, -1, 1] = p^{\frac{N}{8}}, \\ [1, -1, 1][1, -1, -1] = p^{\frac{N}{8}}, & [-1,\ 1,\ 1][1, -1,\ 1] = p^{\frac{N}{8}}, \end{cases}$$

Pareillement, si des nombres

$$\nu, \nu', \nu''$$

un seul ν, par exemple, est de la forme $4x + 1$, les deux autres ν', ν'' étant de la forme $4x + 3$, les monômes

$$\Theta_h, \Theta_{-h}$$

appartiendront, comme facteurs, à deux des expressions (53), qui ne différeront entre elles que par les signes de la seconde et de la troisième unité. On aura donc par suite

$$(65)\begin{cases}[1,1,1][1,-1,-1]=p^{\frac{N}{8}}, & [-1,1,-1][-1,-1,1]=p^{\frac{N}{8}},\\ [1,-1,1][1,1,-1]=p^{\frac{N}{8}}, & [-1,1,1][-1,-1,-1]=p^{\frac{N}{8}}.\end{cases}$$

Enfin, si les trois nombres

$$\nu,\ \nu',\ \nu''$$

sont tous trois de la forme $4x+3$, les monômes

$$\Theta_h,\ \Theta_{-h}$$

appartiendront, comme facteurs, à deux des expressions (53), qui différeront entre elles par les signes des trois unités, et l'on aura par suite

$$(66)\begin{cases}[1,1,1][-1,-1,-1]=p^{\frac{N}{8}}, & [1,-1,-1][-1,1,1]=p^{\frac{N}{8}},\\ [-1,1,-1][1,-1,1]=p^{\frac{N}{8}}, & [-1,-1,1][1,1,-1]=p^{\frac{N}{8}}.\end{cases}$$

Il est d'ailleurs évident que, dans tous les cas, les formules (63), ou (64), ou (65), ou (66), entraînent la suivante

$$(67)\quad p^{\frac{N}{8}}=[1,1,1][1,-1,-1][-1,1,-1][-1,-1,1][-1,-1,-1][-1,1,1][1,-1,1][1,1,-$$

Comme, dans le premier et le troisième cas, on tire des formules (63) ou (64)

$$(68)\begin{cases}[1,1,1]\ [1,-1,-1]\ [-1,1,-1]\ [-1,-1,1]=p^{\frac{N}{4}},\\ [-1,-1,-1]\ [-1,1,1]\ [1,-1,1]\ [1,1,-1]=p^{\frac{N}{4}},\end{cases}$$

il est clair qu'alors on doit avoir, dans les formules (56),

$$A=2p^{\frac{N}{4}},\quad B=0.$$

Au contraire, dans le second et le quatrième cas, on tire de l'équation (67) jointe aux formules (56)

$$(69)\qquad 4p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2\Delta^2\Delta'^2\Delta''^2.$$

On trouve d'ailleurs, dans le second cas,

$$\Delta^2 = \nu,\quad \Delta'^2 = \nu',\quad \Delta''^2 = -\nu'',$$

et dans le quatrième

$$\Delta^2 = -\nu,\quad \Delta'^2 = -\nu',\quad \Delta''^2 = -\nu''.$$

On aura donc, dans l'un et l'autre cas,

$$\Delta^2\Delta'^2\Delta''^2 = -\nu\nu'\nu'' = -n;$$

et en conséquence, la formule (69) donnera

$$(70)\qquad 4p^{\frac{N}{2}} = A^2 + nB^2.$$

D'ailleurs, parmi les trois facteurs premiers de n, ceux qui sont de la forme $4x+3$ seront en nombre impair, dans le second et le quatrième cas, et en nombre pair dans le premier et le troisième cas. Donc le second et le quatrième cas, auxquels se rapporte l'équation (70), seront précisément ceux où le nombre n est de la forme $4x+3$.

Au reste, des raisonnements, semblables à ceux qui précèdent, s'appliqueraient au cas où le nombre entier n serait le produit de quatre, cinq,... facteurs premiers impairs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ \nu''',\ldots;$$

et alors, en désignant par N le nombre des termes premiers à n, qui seront compris dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots n-1,$$

c'est-à-dire, en posant

$$N=(\nu-1)(\nu'-1)(\nu''-1)(\nu'''-1)\ldots,$$

on se trouvera de nouveau conduit à la formule (70), A, B étant deux quantités entières, dont la seconde sera nulle, si n est de la forme $4x+1$, mais cessera de s'évanouir, si n est de la forme $4x+3$.

Si maintenant on désigne par p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément A et B, alors, en posant

$$A=p^\lambda x,\quad B=p^\lambda y,$$

$$\mu=\frac{N}{2}-2\lambda,$$

on tirera de la formule (70)

(71) $$4p^\mu=x^2+ny^2.$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé le nombre n composé de facteurs premiers impairs. Supposons maintenant le nombre n pair, et composé de facteurs dont l'un soit 2, ou une puissance de 2, les autres étant des facteurs premiers impairs. Si l'on suppose d'abord ceux-ci réduits à un seul facteur premier ν; n sera de l'une des formes

$$2\nu,\quad 4\nu,\quad 8\nu,\ldots$$

Or, en supposant n divisible une seule fois par 2, ou de la forme 2ν, on retrouvera dès formules analogues à celles que l'on obtient quand on pose simplement $n=\nu$. Mais, si l'on suppose

$$n=4\nu,$$

ν étant un nombre premier impair, on obtiendra des résultats dignes de remarque. Soient, dans cette hypothèse,

$$\alpha,\ \varsigma,\ \rho$$

des racines primitives des trois équations

$$x^4 = 1, \quad x^\nu = 1, \quad x^n = 1:$$

on pourra prendre

$$\rho = \alpha\varsigma.$$

Si d'ailleurs l'indice h de Θ_h est équivalent à i, suivant le module ν, et à j suivant le module 4, on aura

$$\rho^h = \alpha^j\varsigma^i,$$

ce qui suffira pour réduire l'équation (1) à l'équation (22); et, si l'on désigne par

$$\Theta_{i,j}$$

la valeur générale de Θ_h que fournit l'équation (22), les valeurs particulières de Θ_h, qui correspondront à des valeurs de h premières à n, seront celles que présente le tableau suivant

$$(72) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \Theta_{1,1}, & \Theta_{u,1}, & \Theta_{u^2,1}, \ldots & \Theta_{u^{\nu-2},1}, \\ \Theta_{1,3}, & \Theta_{u,3}, & \Theta_{u^2,3}, \ldots & \Theta_{u^{\nu-2},3}, \end{array} \right.$$

u étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{\nu-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu).$$

Concevons maintenant que, dans la formule (7), on fasse coïncider

$$\Theta_h,\ \Theta_k,\ \Theta_l, \ldots$$

avec celles des expressions de la forme $\Theta_{i,j}$ qui, dans le tableau (72), offrent pour premier indice une puissance paire de u, et pour second indice l'unité. Il est clair qu'alors la somme

$$h+k+l+\ldots$$

sera équivalente, suivant le module 4, à

$$\frac{\nu-1}{2},$$

et, suivant le module ν, au produit

$$1+u^2+\ldots+u^{\nu-3}=\frac{u^{\nu-1}-1}{u^2-1}\equiv 0.$$

Donc, cette somme sera divisible par

$$n=4\nu,$$

ou seulement par

$$\frac{1}{2}n=2\nu,$$

ou enfin par

$$\frac{1}{4}n=\nu,$$

suivant que $\nu-1$ sera divisible par 8 ou par 4, ou seulement par 2, c'est-à-dire, suivant que ν sera de la forme

$$8x+1, \quad \text{ou } 8x+5, \quad \text{ou } 4x+3.$$

On aura donc, dans le premier cas

$$(73)\qquad \begin{cases} \Theta_{h+k+l\ldots}=\Theta_0=-1, \\ \Theta_h\,\Theta_k\,\Theta_l\ldots=-\mathrm{R}_{h,k,l\ldots}, \end{cases}$$

dans le second cas

$$(74)\qquad \begin{cases} \Theta_{h+k+l\ldots}=\Theta_{\frac{1}{2}n}=\Theta_{2\nu}, \\ \Theta_h\,\Theta_k\,\Theta_l\ldots=\mathrm{R}_{h,k,l\ldots}\Theta_{2\nu}, \end{cases}$$

et dans le troisième cas

$$\Theta_{h+k+l\ldots} = \Theta_{\frac{1}{4}n} = \Theta_\nu,$$

$$(75)\qquad \Theta_h\,\Theta_k\,\Theta_l\ldots = R_{h,k,l\ldots}\Theta_\nu,$$

pourvu que

$$\Theta_h,\ \Theta_k,\ \Theta_l,\ldots$$

remplissent les conditions ci-dessus énoncées, c'est-à-dire, en d'autres termes, pourvu que l'on fasse coïncider les indices

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

avec ceux qui vérifient simultanément les deux équivalences

$$(76)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1,\ (\text{mod. } \nu),\quad x \equiv 1,\ (\text{mod. } 4).$$

On prouvera d'ailleurs facilement, 1°, que, si n est de la forme $8x+1$ ou $8x+5$, l'équation (73) ou (74) s'étendra au cas même où l'on ferait coïncider les indices

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

avec ceux qui vérifient simultanément les deux équivalences

$$(77)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv 1,\ (\text{mod. } \nu),\quad x \equiv 3 \equiv -1,\ (\text{mod. } 4),$$

ou les deux équivalences

$$(78)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1,\ (\text{mod. } \nu),\quad x \equiv 1,\ (\text{mod. } 4),$$

ou bien encore les deux équivalences

$$(79)\qquad x^{\frac{\nu-1}{2}} \equiv -1,\ (\text{mod. } \nu),\quad x \equiv -1,\ (\text{mod. } 4);$$

2° que, si ν est de la forme $4x+3$, l'équation (75) s'étendra au cas même où l'on ferait coïncider les indices

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

avec ceux qui vérifient simultanément les équivalences (76) ou (78), mais devra être remplacée par l'équation suivante

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots = \mathrm{R}_{h,h,l\ldots} \Theta_{-\nu}, \tag{80}$$

si l'on fait coïncider les indices

$$h, k, l, \ldots$$

avec ceux qui vérifient les équations (77) ou (79). Donc si l'on désigne respectivement par les quatre notations

$$[1,\ 1],\quad [1, -1],\quad [-1,\ 1],\quad [-1, -1]$$

les quatre produits formés par la multiplication des valeurs de

$$\Theta_h,\ \Theta_k,\ \Theta_l, \ldots$$

correspondantes aux valeurs de

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

qui vérifient les formules

(76), ou (77), ou (78), ou (79),

on pourra, dans l'équation (73), lorsque ν sera de la forme $8x+1$, et dans l'équation (74), lorsque ν sera de la forme $8x+5$, remplacer successivement le produit

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots$$

par chacune des quatre expressions

$$\tag{81} \left\{ \begin{aligned} [1,\ 1] &= \Theta_{1,1} \Theta_{u^2,1} \Theta_{u^4,1} \ldots \Theta_{u^{\nu-3},1}, \\ [1, -1] &= \Theta_{1,3} \Theta_{u^2,3} \Theta_{u^4,3} \ldots \Theta_{u^{\nu-3},3}, \\ [-1,\ 1] &= \Theta_{u,1} \Theta_{u^3,1} \Theta_{u^5,1} \ldots \Theta_{u^{\nu-2},1}, \\ [-1, -1] &= \Theta_{u,3} \Theta_{u^3,3} \Theta_{u^5,3} \ldots \Theta_{u^{\nu-2},3}. \end{aligned} \right.$$

Mais lorsque ν sera de la forme $4x+3$, alors on pourra remplacer le produit

$$\Theta_h \Theta_k \Theta_l \ldots$$

dans l'équation (75), par chacune des expressions

$$[1, 1], \quad [1, -1],$$

ou, dans l'équation (80), par chacune des expressions

$$[1, -1], \quad [-1, -1].$$

Observons à présent que -1 sera une des racines de l'équivalence (57), si ν est de la forme $4x+1$, et de l'équivalence (58), si ν est de la forme $4x+3$. Donc par suite les deux quantités

$$h, -h$$

satisferont, l'une aux formules (76), l'autre aux formules (77), ou l'une aux formules (78), l'autre aux formules (79), si ν est de la forme $4x+1$; et au contraire ces deux quantités satisferont, l'une aux formules (76), l'autre aux formules (79), ou l'une aux formules (77), et l'autre aux formules (78), si ν est de la forme $4x+3$. Donc, en vertu de la formule (3), on aura, 1°, si ν est de la forme $8x+1$ ou $8x+5$,

$$(82)\quad [1, 1][1, -1] = p^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad [-1, 1][-1, -1] = p^{\frac{\nu-1}{2}}$$

2°, si ν est de la forme $4x+3$,

$$(83)\quad [1, 1][-1, -1] = p^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad [1, -1][-1, 1] = p^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

Dans l'un et l'autre cas, les formules (82) ou (83) donneront

$$(84)\qquad p^{\nu-1} = [1, 1][1, -1][-1, 1][-1, -1].$$

D'ailleurs, comme, dans chacune des formules (73), (74), (75), (80), l'expression

$$R_{h,k,l}\ldots$$

représentera une fonction entière et symétrique de

$$\rho^h,\ \rho^k,\ \rho^l\ldots$$

par conséquent une fonction entière et symétrique non-seulement de

$$\varsigma^h,\ \varsigma^k,\ \varsigma^l,\ldots$$

mais encore de

$$\alpha^h,\ \alpha^k,\ \alpha^l,\ldots$$

les coefficients numériques étant des nombres entiers; il est clair que, si ν est de la forme $8x+1$, le produit

$$[1, 1]\,[1, -1]$$

sera, en vertu de la formule (73), une fonction entière et symétrique non-seulement de

$$\varsigma,\ \varsigma^{u^2},\ldots\varsigma^{u^{\nu-3}}$$

mais encore de

$$\alpha,\ \alpha^3,$$

par conséquent une fonction linéaire, non-seulement des deux sommes

$$\varsigma+\varsigma^{u^2}+\ldots+\varsigma^{u^{\nu-3}},\quad \varsigma^u+\varsigma^{u^3}+\ldots+\varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore de la somme

$$\alpha+\alpha^3.$$

Or, cette dernière somme étant nulle, en vertu de l'équation

$$\alpha^2=-1,$$

à laquelle doit satisfaire la racine primitive $\alpha = \sqrt{-1}$ ou $\alpha = -\sqrt{-1}$ de l'équation

$$x^4 = 1,$$

il en résulte qu'en supposant ν de la forme $8x + 1$, on aura

$$[1,1][1,-1] = c_0 + c_1(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) + c_2(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}),$$

c_0, c_1, c_2 désignant des quantités entières. Si, dans l'équation précédente, on remplace ς par ς^u, on trouvera

$$[-1,1][-1,-1] = c_0 + c_1(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}) + c_2(\varsigma + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}});$$

puis en posant, pour abréger,

$$\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} - \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{u^{\nu-2}} = \Delta,$$
$$A = 2c_0 - c_1 - c_2, \quad B = c_1 - c_2,$$

on réduira les deux équations que nous venons d'obtenir à la forme

$$(85) \qquad \begin{cases} 2[1,1][1,-1] = A + B\Delta, \\ 2[-1,1][-1,-1] = A - B\Delta. \end{cases}$$

Si le nombre ν était de la forme $8x + 5$, alors on devrait à l'équation (73) substituer l'équation (74), et par suite, en ayant égard à la formule

$$\Theta_{2\nu}^2 = \Theta_{2\nu}\Theta_{-2\nu} = p,$$

on obtiendrait, au lieu des équations (85), les deux suivantes

$$(86) \qquad \begin{cases} 2[1,1][1,-1] = (A + B\Delta)p, \\ 2[-1,1][-1,-1] = (A - B\Delta)p. \end{cases}$$

Enfin, si ν était de la forme $4x + 3$, on devrait à l'équation (73) substituer l'équation (75) ou (80), et par suite, en ayant égard à la formule

$$\Theta_\nu \Theta_{-\nu} = -p,$$

on se trouverait de nouveau conduit à deux équations de la même forme que les équations (86). Observons d'ailleurs que les équations (86) peuvent être censées comprises elles-mêmes dans les formules (85), desquelles on les déduit en remplaçant les deux quantités entières A, B par deux autres quantités entières pA, pB.

Les résultats que fournissent les équations (82), (84), (85), (86) sont analogues à ceux que nous avons obtenus en prenant $n=\nu$; et d'abord, si ν est de la forme $8x+1$, on tirera des formules (82) et (85)

$$A = 2p^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad B = 0.$$

Si au contraire ν est de la forme $8x+5$, on tirera des formules (82) et (86)

$$A = 2p^{\frac{\nu-3}{2}}, \quad B = 0.$$

Enfin, si ν est de la forme $4x+3$, alors des formules (84) et (86), jointes à l'équation

$$\Delta^2 = -\nu,$$

on tirera

$$(87) \qquad 4p^{\nu-3} = A^2 + \nu B^2;$$

puis, en nommant p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément A, B et, posant

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y$$
$$\mu = \nu - 3 - 2\lambda,$$

on trouvera

$$(88) \qquad 4p^{\mu} = x^2 + \nu y^2.$$

Considérons maintenant les deux produits

$$[1, 1][-1, -1], \quad [1, -1][-1, 1],$$

que l'on déduit l'un de l'autre, en remplaçant ς par ς^u, ou α par $\alpha^3 = \alpha^{-1}$. Chacun de ces produits sera une fonction entière de α, et, de plus, une fonction entière et symétrique non-seulement de

$$\varsigma, \ \varsigma^{u^2}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-3}},$$

mais encore de

$$\varsigma^u, \varsigma^{u^3}, \ldots \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

les coefficients étant des nombres entiers. Comme d'ailleurs chacun de ces produits ne sera point altéré, lorsqu'on y remplacera simultanément

$$\varsigma \text{ par } \varsigma^u \text{ et } \alpha \text{ par } \alpha^3,$$

il devra se réduire non-seulement à une fonction linéaire de

$$\alpha, \alpha^3,$$

et en même temps à une fonction linéaire des deux sommes

$$\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}, \quad \varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}},$$

mais encore évidemment à une fonction linéaire des sommes

$$\alpha(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) + \alpha^3(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}})$$
$$\alpha^3(\varsigma + \varsigma^{u^2} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}}) + \alpha(\varsigma^u + \varsigma^{u^3} + \ldots + \varsigma^{u^{\nu-2}}).$$

Or, en vertu de la formule

$$\alpha^2 = -1,$$

on a

$$\alpha^3 = -\alpha,$$

et par suite chacune des deux dernières sommes se réduit, au signe près, à

$$\alpha(\varsigma - \varsigma^u + \varsigma^{u^2} - \ldots + \varsigma^{u^{\nu-3}} - \varsigma^{u^{\nu-2}}) = \alpha\Delta.$$

Donc les deux produits

$$[1, 1][-1, -1], \quad [1, -1][-1, 1]$$

se réduiront à deux fonctions linéaires du monôme

$$\alpha\Delta,$$

que l'on déduira l'une de l'autre, en remplaçant α par $\alpha^3 = -\alpha$, ou, ce qui revient au même, en remplaçant

$$\alpha\Delta \text{ par } -\alpha\Delta.$$

D'ailleurs, chacun de ces produits aura pour facteur

$$\Theta_{2\nu}{}^2 = p,$$

si ν est de la forme $8x + 5$, et

$$\Theta_\nu \Theta_{-\nu} = -p,$$

si ν est de la forme $4x + 3$. On aura donc généralement

$$(89) \qquad \left\{ \begin{array}{l} [1, 1][-1, -1] = A + B\alpha\Delta, \\ [1, -1][-1, 1] = A - B\alpha\Delta, \end{array} \right.$$

A, B désignant deux quantités entières, qui seront divisibles par p, si ν est de l'une des formes $8x + 5$, $4x + 3$. Ces principes étant admis, si l'on suppose ν de l'une des formes

$$8x + 1, \quad 8x + 5,$$

alors des équations (84), (89), jointes aux deux formules

$$\alpha^2 = -1, \quad \Delta^2 = \nu,$$

on tirera

(90) $$p^{\nu-1} = A^2 + \nu B^2.$$

Si au contraire ν est de la forme $4x+3$, on tirera des équations (83) et (89)

$$A = p^{\frac{\nu-1}{2}}, \quad B = 0.$$

L'équation (90), dans laquelle A, B sont divisibles par p, lorsque ν est de la forme $8x+5$, mérite d'être remarquée. Si l'on désigne par p^λ la plus haute puissance de p, qui, dans cette équation, divise simultanément A et B, alors, en posant

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y$$
$$\mu = \nu - 1 - 2\lambda,$$

on trouvera

(91) $$p^\mu = x^2 + \nu y^2.$$

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose

$$n = 4\nu,$$

le nombre N des termes premiers à n, et compris dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots n-1,$$

est précisément

$$2(\nu - 1).$$

Donc, alors l'exposant de p se réduit à $\frac{N}{2}$ dans les formules (84) et (90), aussi bien que dans les formules (38) et (47), (67) et (70).

Dans le cas particulier où, ν se réduisant à l'unité, on a simplement

$$n = 4,$$

on a aussi

$$\rho = \alpha,$$

α désignant toujours une racine primitive $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$ de l'équation

$$x^4 = 1.$$

Alors on tire de l'équation (3)

$$\Theta_2^2 = p, \quad \Theta_1 \Theta_3 = (-1)^{\frac{p-1}{4}} p;$$

et de l'équation (4)

$$\Theta_1^2 = R_{1,1} \Theta_2, \quad \Theta_3^2 = R_{3,3} \Theta_2;$$

puis de ces dernières combinées avec les deux précédentes

(92) $$p = R_{1,1} R_{3,3}.$$

Dans cette même hypothèse, $R_{1,1}$, se réduisant à une fonction entière de α, sera de la forme

$$R_{1,1} = A + B\alpha,$$

A, B étant des quantités entières, et l'on aura encore

$$R_{3,3} = A + B\alpha^3,$$

ou, puisque $\alpha^2 = -1$,

$$R_{3,3} = A - B\alpha.$$

Par suite la formule (92) donnera

$$p = (A + B\alpha)(A - B\alpha)$$
$$= A^2 - B\alpha^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$p = A^2 + B^2. \tag{93}$$

Donc alors la multiplication de Θ_1^2 par Θ_3^2, ou plutôt de $R_{1,1}$ par $R_{3,3}$, fournira la décomposition du nombre p en deux carrés, c'est-à-dire, en d'autres termes, la résolution de l'équation indéterminée

$$p = x^2 + y^2, \tag{94}$$

dans laquelle p désigne un nombre premier de la forme $4x + 1$.

Si, au lieu de supposer $n = 4\nu$, on supposait

$$n = 4\nu\nu' \ldots$$

$\nu, \nu' \ldots$ étant des nombres premiers impairs, on se trouverait conduit, en raisonnant toujours de la même manière, à une formule analogue à l'équation (90). Supposons, pour fixer les idées, que, le nombre des facteurs premiers impairs étant réduit à 2, l'on ait

$$n = 4\nu\nu'.$$

Alors, en nommant toujours N le nombre des termes qui, dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots n - 1,$$

sont premiers à $n = 4\nu\nu'$, on trouvera

$$N = 2(\nu - 1)(\nu' - 1).$$

Cela posé, en étendant l'usage des notations (53) au cas où, dans le produit

$$n = \nu\nu'\nu'',$$

on remplace le facteur impair ν'' par le facteur 4, par conséquent au cas où l'on remplace les équivalences

$$x^{\frac{\nu''-1}{2}} \equiv 1, \text{(mod. } \nu''), \quad x^{\frac{\nu''-1}{2}} \equiv -1, \text{(mod. } \nu'')$$

par les équivalences

$$x \equiv 1, \text{(mod. } 4), \quad x \equiv -1, \text{(mod. } 4),$$

et les sommes

$$\varsigma'' + \varsigma''^{u''^2} + \ldots + \varsigma''^{u''^{\nu''-3}} = -\frac{1-\Delta''}{2}, \quad \varsigma''^{u''} + \varsigma''^{u''^3} + \ldots + \varsigma''^{u''^{\nu''-2}} = -\frac{1+\Delta}{2}$$

par

$$\alpha \quad \text{et} \quad \alpha^3 = -\alpha,$$

on obtiendra, pour représenter les produits (54), non plus des fonctions linéaires de

$$\frac{1-\Delta''}{2}, \quad \frac{1+\Delta''}{2},$$

mais des fonctions linéaires de

$$\alpha, \quad -\alpha,$$

lesquelles d'ailleurs ne cesseront pas d'être en même temps fonctions linéaires de

$$\frac{1-\Delta}{2}, \quad \frac{1+\Delta}{2},$$

et fonctions linéaires de

$$\frac{1-\Delta'}{2}, \quad \frac{1+\Delta'}{2}.$$

Donc alors, au lieu des équations (55), on en obtiendra d'autres de la forme

$$(95)\left\{\begin{array}{l} 4[1,1,1]\,[1,-1,-1]\,[-1,1,-1]\,[-1,-1,1] = a + b\alpha\Delta\Delta',\\ 4[-1,-1,-1]\,[-1,1,1]\,[1,-1,1]\,[1,1,-1] = a - b\alpha\Delta\Delta', \end{array}\right.$$

a, b, désignant des quantités entières qui, comme les produits (54), seront divisibles par p^2, c'est-à-dire par le carré de

$$\Theta^2_{\frac{1}{2}n} \quad \text{ou de} \quad \Theta_{\frac{1}{4}n}\,\Theta_{-\frac{1}{4}n},$$

si le nombre

$$\frac{N}{8} = \frac{\nu-1}{2}\,\frac{\nu'-1}{2},$$

est de la forme $8x+5$ ou $4x+3$. Comme d'ailleurs, dans chacune des équations (95), le premier membre, ou le quadruple de l'un des produits (54), devra se réduire au quadruple d'un nombre entier, si l'on remplace Δ, Δ' par des nombres impairs tels que l'unité, et α par un nombre pair ou par un nombre impair, par exemple par 0 ou par 1 ; il est clair que

$$a \quad \text{et} \quad a+b$$

devront être des multiples de 4. Donc a, b seront divisibles par 4, ou de la forme

$$a = 4A, \quad b = 4B,$$

et les formules (95) donneront

$$(96)\left\{\begin{array}{l} [1,1,1]\,[1,-1,-1]\,[-1,1,-1]\,[-1,-1,1] = A + B\alpha\Delta\Delta',\\ [-1,-1,-1]\,[-1,1,1]\,[1,-1,-1]\,[1,1,-1] = A - B\alpha\Delta\Delta', \end{array}\right.$$

les valeurs numériques de A, B étant des nombres entiers qui seront certainement divisibles par p^2, si le nombre

$$\frac{N}{2} = \frac{\nu-1}{2}\,\frac{\nu'-1}{2}$$

n'est pas divisible par 4. D'autre part, on reconnaîtra sans peine que les formules (64) sont applicables au cas où, dans le produit

$$n = 4\nu\nu',$$

les facteurs impairs ν, ν' sont tous deux de la forme $4x + 1$; les formules (65), au cas où un seul de ces facteurs impairs, ν par exemple, est de la forme $4x + 1$; enfin les formules (66), au cas où les facteurs ν, ν' sont de la forme $4x + 3$. Dans les trois cas, les formules (64), (65) ou (66) entraîneront la formule (67), et dans le second cas en particulier, les formules (65) ou (68), jointes aux équations (96), donneront

$$A = p^{\frac{N}{4}}, \quad B = 0.$$

Mais, dans le premier et le troisième cas, on tirera de l'équation (67), jointe aux formules (96),

(97) $$p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2\alpha^2\Delta^2\Delta'^2 = A^2 + B^2\Delta^2\Delta'^2;$$

et, comme on aura dans le premier cas,

$$\Delta^2 = \nu, \quad \Delta'^2 = \nu',$$

dans le troisième cas

$$\Delta^2 = -\nu, \quad \Delta'^2 = -\nu',$$

il en résulte que, dans le premier et le troisième cas, on trouvera

$$\Delta^2\Delta'^2 = \nu\nu',$$

par conséquent

(98) $$p^{\frac{N}{2}} = A^2 + \nu\nu' B^2.$$

On peut remarquer, d'ailleurs, que les deux cas dont il s'agit sont précisément ceux où le produit

$$\nu\nu' = \frac{n}{4}$$

est de la forme $4x+1$. Ajoutons que les quantités entières A, B seront divisibles par p^2, si les deux nombres ν, ν' sont de la forme $4x+3$.

Généralement, si n est de la forme

$$n = 4\nu\nu'\nu''\ldots$$

ν, ν', $\nu''\ldots$ désignant des facteurs premiers impairs, alors, en nommant toujours N le nombre des termes premiers à n, et compris dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots n-1,$$

c'est-dire, en posant

$$N = 2(\nu-1)(\nu'-1)(\nu''-1)\ldots$$

on trouvera

$$p^{\frac{N}{2}} = A^2 + \nu\nu'\nu''\ldots B^2,$$

ou, ce qui revient au même

$$p^{\frac{N}{2}} = A^2 + \frac{n}{4}B^2, \tag{99}$$

A, B désignant des quantités entières, dont la seconde sera nulle, lorsque le produit

$$\nu\nu'\nu''\ldots = \frac{n}{4}$$

sera de la forme $4x+3$, et cessera de s'évanouir, lorsque le même produit sera de la forme $4x+1$. Ajoutons que les quantités A, B seront divisibles par la puissance de p, dont le degré est le nombre des facteurs impairs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

si le produit

$$\frac{\nu-1}{2}\ \frac{\nu'-1}{2}\ \frac{\nu''-1}{2}\cdots$$

n'est pas divisible par 4.

Si maintenant on désigne par p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément A et B, alors, en posant

$$A=p^\lambda x,\quad B=p^\lambda y,$$

$$\mu=\frac{N}{2}-2\lambda,$$

on tirera de la formule (99)

$$(100)\qquad p^\mu=x^2+\frac{n}{4}y^2.$$

Supposons encore $n=8$. Alors, si l'on nomme α une racine primitive de l'équation

$$x^8=1,$$

les quatre racines primitives de cette même équation seront

$$\alpha,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7,$$

et l'on aura

$$\alpha^4=-1.$$

Alors aussi la formule (3) donnera

$$\Theta_4^2=p,\quad \Theta_1\Theta_7=\Theta_3\Theta_5=(-1)^{\frac{p-1}{8}}p,$$

et l'on tirera de la formule (4)

$$\Theta_1\Theta_3=R_{1,3}\Theta_4,\quad \Theta_5\Theta_7=R_{5,7}\Theta_4,$$

puis de ces dernières équations combinées avec les deux précédentes

(101) $$p = R_{1,3} R_{5,7}.$$

D'ailleurs

$$R_{1,3}$$

sera une fonction entière et symétrique de

$$\alpha, \quad \alpha^3,$$

par conséquent une fonction linéaire des sommes de la forme

$$\alpha^m + \alpha^{3m},$$

le coefficient numérique de chaque somme étant un nombre entier; et d'autre part la somme

$$\alpha^m + \alpha^{3m}$$

se réduit, pour $m = 1$, ou 3, à

$$\alpha + \alpha^3 = \alpha^3 + \alpha^9,$$

pour $m = 2$, ou 6, à

$$\alpha^2 + \alpha^6 = \alpha^6 + \alpha^{18} = 0,$$

pour $m = 4$, à

$$\alpha^4 + \alpha^{12} = -2,$$

enfin pour $m = 5$, ou 7, à

$$\alpha^5 + \alpha^{15} = \alpha^7 + \alpha^{21} = \alpha^5 + \alpha^7 = -(\alpha + \alpha^3).$$

Donc $R_{1,3}$ se réduira simplement à une fonction linéaire de la somme

$$\alpha + \alpha^3;$$

et comme on déduira $R_{5,7}$ de $R_{1,3}$ en remplaçant

$$\alpha \text{ et } \alpha^3$$

par

$$\alpha^5 = -\alpha, \quad \text{et} \quad \alpha^7 = -\alpha^3,$$

on aura nécessairement

$$(102) \qquad \begin{cases} R_{1,3} = A + B(\alpha + \alpha^3), \\ R_{5,7} = A - B(\alpha + \alpha^3), \end{cases}$$

A, B désignant des quantités entières.

Si maintenant on combine les formules (101) avec les équations (102) on en conclura

$$p = A^2 - B^2(\alpha + \alpha^3)^2;$$

et comme on aura

$$(\alpha + \alpha^3)^2 = \alpha^2 + \alpha^6 + 2\alpha^4 = 2\alpha^4 = -2,$$

on trouvera définitivement

$$(103) \qquad p = A^2 + 2B^2.$$

Donc, p étant un nombre premier de la forme $8x+1$, on pourra toujours satisfaire par des valeurs entières de x, y à l'équation indéterminée

$$(104) \qquad p = x^2 + 2y^2.$$

On pourrait encore facilement étendre les principes que nous venons d'exposer, au cas où le nombre n serait de la forme

$$n = 8\nu,$$

ou même de la forme

$$n = 8\nu\nu'\nu''\ldots$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs premiers impairs. Alors les résultats seraient analogues à ceux que nous avons obtenus en supposant

$$n = 4\nu\nu'\nu''\ldots$$

Seulement, en passant d'une hypothèse à l'autre, il faudrait substituer aux racines primitives

$$\alpha \quad \text{et} \quad \alpha^3 = -\alpha$$

de l'équation

$$x^4 = 1,$$

les sommes

$$\alpha + \alpha^3 \quad \text{et} \quad \alpha^5 + \alpha^7 = -(\alpha + \alpha^3),$$

ou

$$\alpha + \alpha^7 \quad \text{et} \quad \alpha^3 + \alpha^5 = -(\alpha + \alpha^7),$$

formées par l'addition de deux des racines primitives

$$\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$$

de l'équation

$$x^8 = 1.$$

Cela posé, en nommant N le nombre de ceux des termes de la suite

$$1, 2, 3, \ldots n - 1$$

qui sont premiers à

$$n = 8\nu\nu'\nu''\ldots,$$

c'est-à-dire, en posant

$$N = 4(\nu - 1)(\nu' - 1)(\nu'' - 1)\ldots$$

et désignant par A, B deux quantités entières, on trouverait, 1°, dans le cas où le quotient

$$\frac{n}{8} = \nu\nu'\nu'' \ldots$$

serait de la forme $4x + 1$,

$$p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2 (\alpha + \alpha^3)^2 \Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 \ldots;$$

2°, dans le cas où le même quotient serait de la forme $4x + 3$

$$p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2 (\alpha + \alpha^7)^2 \Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 \ldots$$

les valeurs de $\Delta^2, \Delta'^2, \Delta''^2, \ldots$ étant dans l'un et l'autre cas

$$\Delta^2 = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \nu, \quad \Delta'^2 = (-1)^{\frac{\nu'-1}{2}} \nu', \quad \Delta''^2 = (-1)^{\frac{\nu''-1}{2}} \nu'', \text{ etc.} \ldots;$$

et, comme on aurait évidemment dans le premier cas

$$(\alpha + \alpha^3)^2 = \alpha^2 + \alpha^6 - 2 = -2$$

$$\frac{\nu - 1}{2} + \frac{\nu' - 1}{2} + \frac{\nu'' - 1}{2} + \ldots \equiv 0, \pmod{2}$$

$$\Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 \ldots = \nu\nu'\nu'' \ldots,$$

puis, dans le second cas,

$$(\alpha + \alpha^7)^2 = \alpha^2 + \alpha^6 + 2 = 2,$$

$$\frac{\nu - 1}{2} + \frac{\nu' - 1}{2} + \frac{\nu'' - 1}{2} + \ldots \equiv 1, \pmod{2}$$

$$\Delta^2 \Delta'^2 \Delta''^2 \ldots = -\nu\nu'\nu'',$$

il est clair que, dans l'une et l'autre hypothèse, on se trouvera conduit à la formule

$$p^{\frac{N}{2}} = A^2 + 2\nu\nu'\nu'' \ldots B^2,$$

qu'on peut encore écrire comme il suit

(105) $$p^{\frac{N}{2}} = A^2 + 2\left(\frac{n}{8}\right)B^2.$$

Ajoutons que, dans le premier cas, les quantités A, B seront divisibles par la puissance de p qui a pour degré le nombre des facteurs impairs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

si tous ces facteurs sont de la forme $4x+3$, attendu qu'alors le produit

$$(1+3)\frac{\nu-1}{2}\,\frac{\nu'-1}{2}\,\frac{\nu''-1}{2}\cdots$$

sera divisible, non par 8, mais seulement par 4, et que l'on aura d'ailleurs

$$\Theta^2_{4\nu\nu'\nu''} = \Theta^2_{\frac{1}{2}n} = p.$$

Dans tous les cas, si l'on désigne par p^λ la plus haute puissance de p, qui divise simultanément A et B, alors, en posant

$$A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y,$$

$$\mu = \frac{N}{2} - 2\lambda,$$

on tirera de la formule (105)

(106) $$p^\mu = x^2 + 2\left(\frac{n}{8}\right)y^2.$$

Nous remarquerons en finissant, que, si le nombre premier p étant de la forme $4x+3$, se réduit précisément au nombre 3, les formules (16) deviendront inexactes. Mais alors, pour retrouver l'équation (20), il suffira d'observer que l'on tire de la formule (3)

$$\Theta_1 \Theta_2 = p,$$

et de la formule (4)

$$\Theta_1^2 = \mathrm{R}_{1,1}\Theta_2, \quad \Theta_2^2 = \mathrm{R}_{2,2}\Theta_1,$$

puis de ces dernières, combinées avec la précédente,

$$(107) \qquad p = \mathrm{R}\ ,\ \mathrm{R}_{2,2}.$$

Dans cette même hypothèse, si, en nommant ρ une des deux racines primitives de l'équation

$$x^3 = 1,$$

l'on pose

$$\rho - \rho^2 = \Delta,$$

on aura, non-seulement

$$(108) \qquad \Delta^2 = -3,$$

mais encore, eu égard à la formule $\rho + \rho^2 = -1$,

$$\rho = -\frac{1-\Delta}{2}, \quad \rho^2 = -\frac{1+\Delta}{2}.$$

Comme on aura d'autre part

$$\mathrm{R}_{1,1} = c_0 + c_1\rho + c_2\rho^2, \quad \mathrm{R}_{2,2} = c_0 + c_1\rho^2 + c_2\rho,$$

c_0, c_1 désignant des quantités entières, on en conclura

$$(109) \qquad 2\mathrm{R}_{1,1} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\Delta, \quad 2\mathrm{R}_{2,2} = \mathrm{A} - \mathrm{B}\Delta,$$

les valeurs de A, B étant

$$\mathrm{A} = 2c_0 - c_1 - c_2, \quad \mathrm{B} = c_1 - c_2,$$

puis on conclura des formules (107) et (109)

$$4p = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2\Delta^2,$$

ou, ce qui revient au même, eu égard à la formule (108),

$$(110) \qquad 4p = A^2 + 3B^2.$$

L'équation (110) est évidemment de la forme de celle qu'on obtiendrait en posant $n = 3$ dans la formule (20).

NOTE IV.

SUR LES RÉSIDUS QUADRATIQUES.

p étant un nombre entier quelconque, on a, comme l'on sait

$$(1) \quad (x+y+z+\ldots)^p = \mathrm{S}\,\frac{1.2.3\ldots p}{(1.2\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots}\,x^f y^g z^h \ldots$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières, nulles ou positives de

$$f,\, g,\, h, \ldots$$

qui vérifient la condition

$$f + g + h + \ldots . = p.$$

Si p est un nombre premier, le coefficient numérique

$$\frac{1.2.3\ldots p}{(1.2\ldots f)(1.2\ldots g)(1.2\ldots h)\ldots}$$

se réduira toujours évidemment à un multiple de p, à moins que l'on ne suppose un seul des exposants $f, g, h, \ldots$ égal à p, tous les autres étant nuls. Donc alors la formule (1) donnera

$$(2)\qquad (x+y+z+\ldots)^p = x^p + y^p + z^p + \ldots + p\mathrm{P},$$

P désignant une fonction entière de $x, y, z, \ldots$ dans laquelle les coefficients numériques seront des nombres entiers. Donc, si l'on attribue à $x, y, z, \ldots$ des valeurs entières, on aura

$$(3)\qquad (x+y+z+\ldots)^p \equiv x^p + y^p + z^p + \ldots (\mathrm{mod.}\, p).$$

Si maintenant on pose

$$x = y = z = \ldots = 1,$$

alors, en nommant k le nombre des quantités $x, y, z, \ldots$ on verra la formule (3) se réduire à

$$(4)\qquad k^p \equiv k, (\mathrm{mod.}\, p).$$

L'équivalence (4) comprend le théorème énoncé par Fermat, et suivant lequel la différence

$$x^p - x$$

est, pour des valeurs entières de x, toujours divisible par p, lorsque p est un nombre premier. Comme d'autre part l'équivalence

$$x^p - x \equiv 0, (\mathrm{mod.}\, p)$$

ou

$$x(x^{p-1} - 1) \equiv 0, (\mathrm{mod.}\, p)$$

entraîne la suivante

$$(5)\qquad x^{p-1} - 1 \equiv 0, (\mathrm{mod.}\, p)$$

lorsque x n'est pas divisible par p; il en résulte que tout nombre premier à p est racine de l'équivalence (5), qu'on peut encore écrire comme il suit

$$(6)\qquad x^{p-1} \equiv 1, \pmod{p}.$$

Si d'ailleurs on nomme t une racine primitive de l'équivalence (6), les diverses racines de cette équivalence pourront être représentées également ou par les divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots p-1,$$

ou par les divers termes de la progression géométrique

$$1, t, t^2, \ldots t^{p-2};$$

et par suite tout nombre entier, premier à p, sera équivalent suivant le module p, à une puissance entière de t. Ajoutons qu'en vertu de la formule

$$t^{p-1} \equiv 1, \pmod{p}$$

on aura généralement

$$t^h \equiv t^k$$

si l'on suppose

$$h \equiv k, \pmod{p-1}.$$

Donc une racine

$$t^h$$

de l'équivalence (6) ne devra point être censée altérée, lorsqu'on y fera croître ou diminuer l'exposant h d'un multiple de $p-1$. Enfin, comme, en supposant p impair, on aura

$$x^{p-1} - 1 = \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{p-1}{2}} + 1\right),$$

l'équivalence (5) ou (6) se décomposera, dans cette hypothèse, en deux autres, dont la première

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0,$$

ou

(7) $$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, \text{ (mod. } p)$$

aura évidemment pour racines les puissances paires de t, savoir

$$1, t^2, t^4, \ldots t^{p-3},$$

tandis que la seconde, savoir

$$x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0,$$

ou

(8) $$x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } p)$$

aura nécessairement pour racines les puissances impaires de t, savoir

$$t, t^3, t^5, \ldots t^{p-2}.$$

Ainsi, parmi les termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

représentant les restes ou résidus qui peuvent provenir de la division d'un entier par p, les uns, en nombre égal à $\frac{p-1}{2}$, seront équivalents, suivant le module p, à des puissances paires de t, par conséquent à des carrés parfaits. Ces termes, dont chacun est le reste ou résidu de la division d'un carré par p, se nomment, pour cette raison, *résidus quadratiques*, aussi bien que les nombres équivalents aux mêmes termes, suivant le module p; et comme, dans le cas où l'on prend p pour module, tout nombre premier à p équivaut à une puissance entière de t, le carré d'un tel nombre équivaudra nécessairement à une puissance paire de t, c'est-à-dire, à une racine de la formule (7); d'où il résulte que tout résidu quadratique, différent de zéro, sera une de ces racines. Donc, les racines de l'équivalence (8), qui sont distinctes des racines de l'équivalence (7), mais, comme elles, en nombre égal à $\frac{p-1}{2}$, ne pourront être des résidus quadratiques, suivant le module p. C'est ce que l'on exprime en disant que chacune des racines de l'équivalence (8) est *non-résidu* quadratique suivant le même module.

Pour abréger, nous désignerons, avec M. Legendre, par la notation

$$\left[\frac{k}{p}\right]$$

le reste de la division de $k^{\frac{p-1}{2}}$ par le nombre premier p. Cela posé, on aura généralement

$$\left[\frac{k}{p}\right]=0,$$

si k est divisible par p; et, dans le cas contraire,

$$\left[\frac{k}{p}\right]=1 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{k}{p}\right]=-1$$

suivant que k sera *résidu* ou *non-résidu quadratique*. Comme d'ailleurs t, étant une racine primitive de l'équation (6), ne pourra vérifier la formule (7), on aura nécessairement

$$(9) \qquad t^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \ (\text{mod. } p);$$

et comme $t^{\frac{p-1}{2}}$ sera évidemment une puissance paire ou impaire de t, suivant que p sera de la forme $4x+1$ ou $4x+3$, on peut affirmer que -1 sera résidu quadratique, dans le premier cas, et non-résidu quadratique dans le second. Enfin, comme, d'après ce qui a été dit plus haut, la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots p-1$$

renferme autant de résidus que de non-résidus, on aura nécessairement

$$(10) \qquad \left[\frac{1}{p}\right] + \left[\frac{2}{p}\right] + \left[\frac{3}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{p-1}{p}\right] = 0.$$

Généralement, si, une suite de nombres entiers

$$a, b, c, \ldots l,$$

étant composée de n termes différents, premiers à p, l'on suppose que, dans cette suite, les résidus quadratiques sont en nombre égal à n', et les non-résidus en nombre égal à n'', on aura, non-seulement

$$(11) \qquad n' + n'' = n,$$

mais encore

$$(12) \qquad n' - n'' = \left[\frac{a}{p}\right] + \left[\frac{b}{p}\right] + \left[\frac{c}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{l}{p}\right],$$

et par conséquent

$$(13) \quad n' - n'' \equiv a^{\frac{p-1}{2}} + b^{\frac{p-1}{2}} + c^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + l^{\frac{p-1}{2}}, \text{ (mod. } p).$$

On peut d'ailleurs écrire l'équivalence (13) comme il suit

$$(13) \qquad n' - n'' \equiv \frac{d^{\frac{p-1}{2}}(e^{az} + e^{bz} + e^{cz} + \ldots + e^{lz})}{dz^{\frac{p-1}{2}}}, \text{ (mod.} p),$$

la variable z devant être réduite à zéro, après les différenciations effectuées.

La formule (14) offre un moyen facile de déterminer la différence $n'-n''$, et par suite, eu égard à la formule (11), chacun des nombres n', n'', lorsque, le nombre n étant inférieur à p, la suite

$$a,\ b,\ c,\dots\ l$$

se réduit à une progression arithmétique

$$h,\ h+k,\ h+2k,\dots\ h+(n-1)k.$$

Alors, en effet, la somme

$$e^{az}+e^{bz}+e^{cz}+\dots+e^{lz}$$

devient

$$e^{hz}\left(1+e^{kz}+e^{2kz}+\dots+e^{(n-1)kz}\right)=e^{hz}\frac{e^{nkz}-1}{e^{kz}-1},$$

et par suite la formule (14) se réduit à

$$(15)\qquad n'-n''=\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left[e^{hz}\frac{e^{nkz}-1}{e^{kz}-1}\right].$$

Concevons, pour fixer les idées, que l'on demande le nombre n' des résidus quadratiques, et le nombre n'' des non-résidus inférieurs à $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire, compris dans la progression arithmétique

$$1,\ 2,\ 3,\dots\ \frac{p-1}{2}.$$

Alors on aura

$$n=\frac{p-1}{2},\quad h=1,\quad k=1,$$

et par suite

$$(16)\qquad n' - n'' = \frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{z}}{e^{z} - 1}\right).$$

D'autre part, la différence entre le rapport

$$\frac{e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{z}}{e^{z} - 1}$$

et celui dans lequel il se transforme, quand on y remplace p par zéro, est

$$(17)\qquad \frac{e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{z}}{e^{z} - 1} - \frac{e^{\frac{1}{2}z} - e^{z}}{e^{z} - 1} = \frac{e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{\frac{1}{2}z}}{e^{z} - 1}.$$

Elle est donc égale au produit

$$\left(e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{\frac{1}{2}z}\right)\left(e^{z} - 1\right)^{-1};$$

et sa dérivée de l'ordre $\frac{p-1}{2}$, relative à z, se composera d'une suite de termes, dont chacun sera proportionnel au facteur

$$e^{\frac{p+1}{2}z} - e^{\frac{1}{2}z},$$

ou à l'une des dérivées de ce facteur. Or, comme ces dérivées s'évanouissent avec le facteur lui-même, quand on y remplace z et p par zéro; comme d'ailleurs on trouvera

$$\frac{e^{\frac{1}{2}z} - e^{z}}{e^{z} - 1} = -\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{1 + e^{\frac{1}{2}z}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{\frac{1}{4}z} - e^{-\frac{1}{4}z}}{e^{\frac{1}{4}z} + e^{-\frac{1}{4}z}}\right);$$

il suit de la formule (17) que l'on aura, pour une valeur nulle de z,

$$\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{p+1}{2}z}-e^{z}}{e^{z}-1}-\frac{e^{\frac{1}{2}z}-e^{z}}{e^{z}-1}\right)\equiv 0,\ (\text{mod. } p),$$

par conséquent

$$\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{p+1}{2}z}-e^{z}}{e^{z}-1}\right)\equiv\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{1}{2}z}-e^{z}}{e^{z}-1}\right)$$

$$\equiv-\frac{1}{2}\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{1}{4}z}-e^{-\frac{1}{4}z}}{e^{\frac{1}{4}z}-e^{-\frac{1}{4}z}}\right).\ (\text{mod.} p).$$

Donc la formule (16) donnera, dans l'hypothèse admise,

$$(18)\qquad n'-n''\equiv-\frac{1}{2}\frac{d^{\frac{p-1}{2}}}{dz^{\frac{p-1}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{1}{4}z}-e^{-\frac{1}{4}z}}{e^{\frac{1}{4}z}+e^{-\frac{1}{4}z}}\right),\ (\text{mod. } p).$$

Enfin, z devant être réduit à zéro après les différenciations, on pourra sans inconvénient remplacer z par $z\sqrt{-1}$, dans la formule (18), qui se trouvera ainsi réduite à

$$(19)\qquad n'-n''\equiv(-1)^{1-\frac{p-1}{4}}\frac{1}{2}\frac{d^{\frac{p-1}{2}}\tang\frac{z}{4}}{dz^{\frac{p-1}{2}}},\ (\text{mod. } p).$$

Ajoutons qu'en vertu de formules connues, la valeur de $\tang\frac{z}{4}$ sera généralement fournie par l'équation

$$(20)\ \tang\frac{z}{4}=2\left(\frac{1}{6}\frac{2^2-1}{2}\frac{z}{1.2}+\frac{1}{30}\frac{2^4-1}{2^3}\frac{z^3}{1.2.3.4}+\frac{1}{42}\frac{2^6-1}{2^5}\frac{z^5}{1.2.3.4.5.6}+..\right),$$

dans laquelle les coefficients numériques

$$\frac{1}{6},\ \frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ldots$$

que nous désignerons généralement par

$$\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2, \quad \mathcal{A}_3, \ldots$$

sont ce qu'on appelle les nombres de Bernoulli.

Pour appliquer la formule (19), il convient de distinguer deux cas, suivant que $\frac{p-1}{2}$ est pair ou impair, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que p est de la forme $4x+1$ ou $4x+3$. Dans le premier cas on a, pour une valeur nulle de z,

$$\frac{d^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{tang} \frac{z}{4}}{dz^{\frac{p-1}{2}}} = 0,$$

et par suite, la formule (19) étant réduite à

$$n' - n'' \equiv 0, \ (\text{mod. } p),$$

on tire de cette formule, jointe à l'équation

$$n' + n'' = n = \frac{p-1}{2},$$

$$n' \equiv n'' \equiv \frac{p-1}{4}, \ (\text{mod. } p),$$

par conséquent

(21) $$n' = n'' = \frac{p-1}{4}.$$

Au contraire, lorsque $\frac{p-1}{2}$ est impair, et p de la forme $4x+3$, alors, en ayant égard à l'équivalence

$$2^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p),$$

on tire de la formule (20), pour une valeur nulle de z

$$\frac{d^{\frac{p-1}{2}} \operatorname{tang} \frac{z}{4}}{dz^{\frac{p-1}{2}}} = 4\, \frac{2^{\frac{p+1}{2}} - 1}{2^{\frac{p-1}{2}}}\, \frac{1}{p+1}\, \mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}} \equiv 4\left(2 - 2^{\frac{p-1}{2}}\right) \mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \text{ (mod. } p),$$

et par suite la formule (19) donne

$$(22) \qquad n' - n'' \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}}\, 2\left(2 - 2^{\frac{p-1}{2}}\right) \mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \text{ (mod. } p).$$

D'ailleurs, lorsque p est de la forme $4x+3$, il est nécessairement de l'une des formes $8x+3$, $8x+7$; et, comme on le verra tout à l'heure, on a, 1°, en supposant p de la forme $8x+3$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \text{ (mod. } p);$$

2°, en supposant p de la forme $8x+7$

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1.$$

Donc, la formule (22) donnera, lorsque p sera de la forme $8x+3$,

$$(23) \qquad n' - n'' \equiv -6\mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \quad \frac{n' - n''}{2} \equiv -3\mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}},$$

et lorsque p sera de la forme $8x+7$,

$$(24) \qquad n' - n'' \equiv 2\mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \quad \frac{n' - n''}{2} \equiv \mathcal{A}_{\frac{n+1}{4}}.$$

Ainsi, lorsque p est premier et de la forme $4x+3$, la demi-différence entre le nombre des résidus et le nombre des non-résidus inférieurs à $\frac{1}{2}p$, est équivalente, suivant le module p, à un nombre de Bernoulli, ou au triple de ce nombre, pris en signe contraire. Cette proposition remarquable a été pour la première fois énoncée et démontrée en 1830, dans le précédent mémoire, dont un extrait a été publié dans le Bulletin de M. de Férussac, sous la date de mars 1831.

En joignant aux équivalences (23) ou (24) la formule (11), ou

$$n' + n'' = \frac{p-1}{2},$$

on en tire, 1°, lorsque p est de la forme $8x+3$,

$$(25)\quad n' = \frac{p-1}{4} - 3\mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \quad n'' \equiv \frac{p-1}{4} + 3\mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \pmod{p};$$

2°, lorsque p est de la forme $8x+7$

$$(26)\quad n' \equiv \frac{p-1}{4} + \mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \quad n'' \equiv \frac{p-1}{4} - \mathcal{A}_{\frac{p+1}{4}}, \pmod{p}.$$

Au reste, les formules (11) et (15) fourniraient, avec la même facilité, le nombre des résidus et le nombre des non-résidus quadratiques, compris dans une progression arithmétique dont les termes seraient positifs et inférieurs à

$$\frac{p}{3}, \quad \text{ou à } \frac{p}{4}, \quad \text{ou à } \frac{p}{5}, \quad \text{etc.}$$

Concevons maintenant que, p étant un nombre premier impair, on demande la valeur de

$$\left[\frac{2}{p}\right],$$

ou, ce qui revient au même, le reste de la division de $2^{\frac{p-1}{2}}$ par p. Pour y parvenir, il suffira, comme l'on sait, d'élever à la puissance du degré p l'un quelconque des facteurs imaginaires, dans lesquels peut se décomposer le nombre 2. Or, on a évidemment

$$2=(1+\sqrt{-1})(1-\sqrt{-1}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$2=(1+\alpha)(1-\alpha),$$

α désignant une des deux racines primitives $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ de l'équation

$$x^4=1.$$

D'ailleurs, on tirera de la formule (2)

$$(27)\qquad (1+\alpha)^p=1+\alpha^p+p\mathrm{P},$$

P désignant une fonction entière de α, dans laquelle les coefficients numériques seront des nombres entiers, et, comme on aura d'autre part

$$\alpha^2=-1,\quad (1+\alpha)^2=2\alpha,$$

par conséquent

$$(1+\alpha)^{p-1}=2^{\frac{p-1}{2}}\alpha^{\frac{p-1}{2}},$$

et

$$(1+\alpha)^p=2^{\frac{p-1}{2}}\alpha^{\frac{p-1}{2}}(1+\alpha),$$

la formule (27) donnera

$$2^{\frac{p-1}{2}}\alpha^{\frac{p-1}{2}}(1+\alpha)=1+\alpha^p+p\mathrm{P},$$

ou, ce qui revient au même

$$(28)\qquad 2^{\frac{p-1}{2}}=\frac{1+\alpha^p}{\alpha^{\frac{p-1}{2}}(1+\alpha)}+p\frac{\mathrm{P}}{\alpha^{\frac{p-1}{2}}(1+\alpha)}.$$

Enfin, comme on aura, 1°, en supposant p de la forme $4x+1$,

$$1+\alpha^p = 1+\alpha,$$

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{p-1}{2}}} = \alpha^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{4}} = (-1)^{\frac{p+1}{2}\,\frac{p-1}{4}};$$

2°, en supposant p de la forme $4x+3$

$$1+\alpha = \alpha(1+\alpha^3) = \alpha(1+\alpha^p),$$

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{p+1}{2}}} = \alpha^{\frac{p+1}{2}} = (-1)^{\frac{p+1}{4}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{4}};$$

on en conclura, dans tous les cas,

$$\frac{1+\alpha^p}{\alpha^{\frac{p-1}{2}}(1+\alpha)} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+1)}{8}},$$

ce qui permettra de réduire l'équation (28) à la suivante

$$(29)\qquad 2^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}\,\frac{p-1}{2}\,\frac{p+1}{2}}\left[1+p\,\frac{\mathrm{P}}{1+\alpha^p}\right].$$

En vertu de cette dernière équation, le produit

$$p\,\frac{\mathrm{P}}{1+\alpha^p} = p\,\frac{\mathrm{P}(1-\alpha^p)}{2}$$

sera égal, au signe près, à l'un des nombres entiers

$$2^{\frac{p-1}{2}}-1,\quad 2^{\frac{p-1}{2}}+1;$$

et, comme l'expression

$$\mathrm{P}(1-\alpha^p)$$

sera nécessairement une fonction entière de α, dans laquelle les coefficients seront entiers, cette expression, en devenant indépendante de α, ne pourra se réduire qu'à une quantité entière. Donc le produit

$$p\mathrm{P}(1-\alpha^p)$$

et sa moitié

$$p\frac{\mathrm{P}(1-\alpha^p)}{2}$$

seront deux multiples du nombre premier p; et la formule (29) donnera

$$(30) \qquad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}, \text{ (mod. } p)$$

ou, ce qui revient au même,

$$(31) \qquad \left[\frac{2}{p}\right] = (-1)^{\frac{1}{2}\frac{p-1}{2}\frac{p+1}{2}}.$$

On tirera en particulier de la formule (31), 1°, en supposant p de la forme $8x \pm 1$, c'est-à-dire, de l'une des formes $8x+1$, $8x+7$,

$$\left[\frac{2}{p}\right] = (-1)^0 = 1,$$

2°, en supposant p de la forme $8x \pm 3$, c'est-à-dire, de l'une des formes $8x+3$, $8x+5$,

$$\left[\frac{2}{p}\right] = (-1)^1 = -1.$$

Ainsi le nombre 2 sera résidu quadratique pour les modules premiers de la forme $8x+1$, $8x+7$, et non-résidu pour les modules de la forme $8x+3$, $8x+5$.

Observons encore que l'on tirera de la formule (31), 1°, en supposant p de la forme $4x+1$,

$$\left[\frac{2}{p}\right]=(-1)^{\frac{p-1}{4}};$$

2° en supposant p de la forme $4x+3$,

$$\left[\frac{2}{p}\right]=(-1)^{\frac{p+1}{4}}.$$

Ces deux dernières formules sont précisément celles que, dans les deux cas dont il s'agit, on déduirait immédiatement de la formule (28). Il résulte de la seconde que, le nombre premier p étant de la forme $4x+3$, $2^{\frac{p-1}{2}}$, sera équivalent, suivant le module p, à $+1$, si ce module est en outre de la forme $8x+7$, et à -1, si le même module est de la forme $8x+3$.

Comme la démonstration de la formule (30) ou (31) repose entièrement sur le développement de la puissance p du binôme

$$1+\alpha$$

α étant une racine de l'équation $x^2=-1$, on arriverait encore à la même formule en développant immédiatement, à l'aide du théorème de Newton, l'expression

$$(1+\sqrt{-1})^p \quad \text{ou} \quad (1-\sqrt{-1})^p,$$

et ayant égard à la formule

$$(1+\sqrt{-1})^2=2\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad (1-\sqrt{-1})^2=-2\sqrt{-1}.$$

Effectivement l'on trouverait alors, 1° en supposant p de la forme $4x+1$,

$$(2)\quad 2^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left[1 + p - \frac{p(p-1)}{1.2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right)}\right],$$

2°, en supposant p de la forme $4x+3$

$$(3)\quad 2^{\frac{p-1}{2}} - (-1)^{\frac{p+1}{2}}\left[1 - p - \frac{p(p-1)}{2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+1}{2}\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{p-1}{2}\right)}\right].$$

Ainsi, en particulier, en prenant

$$p=3,\ p=5,\ p=7,\ p=11,\ \text{etc.},$$

on trouvera successivement

$$\begin{aligned} 2 &= -(1-3), \\ 2^2 &= -(1+5-10), \\ 2^3 &= 1-7-21+35, \\ 2^5 &= -(1-11-55+165+330-462) \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Une méthode semblable à celle que nous venons de rappeler et par laquelle on obtient la valeur de

$$\left[\frac{2}{p}\right]$$

peut servir à trouver généralement la relation qui existe entre les deux expressions

$$\left[\frac{q}{p}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{p}{q}\right]$$

ou, ce qui revient au même, entre les restes de la division de 2^{q-1} par p, et de 2^{p-1} par q, p et q désignant deux nombres premiers impairs. Effectivement, pour obtenir une transformation de l'expression

$$\left[\frac{q}{p}\right] \equiv p^{q-1},$$

il suffit d'élever à la puissance p l'une des racines carrées imaginaires de $\pm p$. Or, d'après ce qui a été dit dans la note Ire, si l'on désigne par θ une racine primitive de l'équation

$$(34) \qquad x^p = 1,$$

alors, en posant

$$(35) \qquad \theta - \theta^t + \theta^{t^2} - \ldots + \theta^{t^{p-3}} - \theta^{t^{p-2}} = \Delta,$$

on aura

$$(36) \qquad \Delta^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

D'autre part, q étant un nombre premier impair, il résulte de la formule (2) que l'équation (35) entraînera la suivante

$$(37) \quad \Delta^q = \theta^q - \theta^{qt} + \theta^{qt^2} - \ldots + \theta^{qt^{p-3}} - \theta^{qt^{p-2}} + qQ,$$

qQ étant une fonction entière de θ, dans laquelle les coefficients numériques seront non-seulement des entiers, mais encore des multiples de q; et comme, t étant une racine primitive de l'équation (6), on aura évidemment

$$\theta^q - \theta^{qt} + \theta^{qt^2} - \ldots + \theta^{qt^{p-3}} - \theta^{qt^{p-2}} = \pm(\theta - \theta^t + \theta^{t^2} - \ldots + \theta^{t^{p-3}} - \theta^{t^{p-2}}) =$$

le double signe devant être réduit au signe $+$, ou au signe $-$, selon que le nombre q sera équivalent, suivant le module p, à une puissance paire ou impaire de t, c'est-à-dire, suivant que l'on aura

$$\left[\frac{q}{p}\right] = 1 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{q}{p}\right] = -1,$$

il est clair que l'équation (37) pourra être réduite à

$$\Delta^q = \left[\frac{q}{p}\right]\Delta + qQ. \tag{38}$$

Enfin, comme

$$\Delta^q = (\theta - \theta^t + \theta^{t^2} - \ldots + \theta^{t^{p-3}} - \theta^{t^{p-2}})^q$$

sera évidemment une fonction entière et symétrique, non-seulement de

$$\theta,\ \theta^{t^2},\ \theta^{t^4}, \ldots \theta^{t^{p-3}},$$

mais encore de

$$\theta^t,\ \theta^{t^3},\ \theta^{t^5}, \ldots \theta^{t^{p-2}};$$

par conséquent une fonction entière et linéaire des deux sommes

$$\theta + \theta^{t^2} + \theta^{t^4} + \ldots + \theta^{t^{p-3}}$$
$$\theta^t + \theta^{t^3} + \theta^{t^5} + \ldots + \theta^{t^{p-2}},$$

et même une fonction qui changera de signe lorsqu'on remplacera θ par θ^t, par conséquent lorsqu'on remplacera la première somme par la seconde; on peut affirmer que Δ^q sera proportionnel à la différence de ces deux sommes, c'est-à-dire à Δ, le coefficient numérique de Δ étant un nombre entier. Donc, puisque, dans le second membre de l'équation (38), le premier terme se réduit à $\pm\Delta$, le second terme

$$qQ$$

sera encore proportionnel à Δ, le coefficient numérique de Δ étant un nombre entier multiple de q. Cela posé, l'équation (38) divisée par Δ donnera

$$(39)\qquad \Delta^{q-1} \equiv \left[\frac{q}{p}\right],\ (\text{mod. } q).$$

De cette dernière équation combinée avec la formule (36) on tire

$$\left[\frac{q}{p}\right] \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}}\, p^{\frac{q-1}{2}},\ (\text{mod. } q),$$

par conséquent

$$(40)\qquad \left[\frac{q}{p}\right] = (-1)^{\frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}} \left[\frac{p}{q}\right].$$

Telle est la loi de réciprocité qu'a trouvée M. Legendre et qui sert de base à la théorie des résidus quadratiques. La démonstration (*) que je viens d'en donner et que j'avais déjà exposée dans le Bulletin de M. de Férussac, de septembre 1829, est plus rigoureuse que celle qu'avait obtenue M. Legendre, et plus courte que celles auxquelles M. Gauss était d'abord parvenu.

Si le nombre k est le produit de plusieurs facteurs $a, b, c, \ldots$ l'équation

$$k = abc\ldots$$

entraînera évidemment la suivante

$$\left[\frac{k}{p}\right] = \left[\frac{a}{p}\right] \left[\frac{b}{p}\right] \left[\frac{c}{p}\right] \cdots$$

(*) Dans la troisième édition de la *Théorie des nombres*, qui a paru en 1830, M. Legendre présente cette démonstration, comme étant la plus simple de toutes, et l'attribue à M. Jacobi, sans indiquer aucun ouvrage où ce géomètre l'ait publiée, et dont la date soit antérieure au mois de septembre 1829.

En d'autres termes, on aura généralement

$$\left[\frac{abc\ldots}{p}\right]=\left[\frac{a}{p}\right]\left[\frac{b}{p}\right]\left[\frac{c}{p}\right]\ldots$$

On trouvera de même

$$\left[\frac{a^n}{p}\right]=\left[\frac{a}{p}\right]^n.$$

On peut voir dans le Bulletin de M. Férussac, déjà cité, comment les mêmes principes peuvent être appliqués à la théorie des résidus cubiques, biquadratiques, etc...

NOTE V.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS $R_{h,k},\ldots$ ET DES COEFFICIENTS QU'ELLES RENFERMENT.

Si, en désignant par p un nombre premier impair, par

$$\theta,\quad \tau$$

des racines primitives des équations

$$x^p=1,\quad x^{p-1}=1,$$

par t une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1}\equiv 1,\ (\text{mod. } p),$$

enfin par h, k des quantités entières, on pose

$$(1)\qquad \Theta_h=\theta+\tau^h\theta^t+\tau^{2h}\theta^{t^2}+\ldots+\tau^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}},$$

il est clair que la condition

$$k \equiv h, \ (\text{mod.}\, p-1)$$

entraînera les formules

$$\tau^k = \tau^h, \quad \Theta_k = \Theta_h,$$

en vertu desquelles on pourra toujours, si l'on veut, réduire l'exposant h d'une puissance entière, soit positive, soit négative de τ, ou l'indice h d'une expression de la forme Θ_h, à l'un des nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2.$$

D'ailleurs, ainsi qu'on l'a prouvé, l'on trouvera, 1°, en supposant h divisible par $p-1$,

$$(2) \qquad \Theta_h = \Theta_0 = -1,$$

2°, en supposant h non divisible par $p-1$,

$$(3) \qquad \Theta_h \Theta_{-h} = (-1)^h p.$$

Donc, si l'on pose généralement

$$\Theta_h \Theta_k = R_{h+k}\, \Theta_{h+k},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \qquad R_{h,k} = \frac{\Theta_h \Theta_k}{\Theta_{h+k}},$$

on aura, 1°, en supposant h ou k divisible par $p-1$

$$R_{h,k} = -1,$$

2°, en supposant h non divisible par $p-1$

$$(6) \qquad R_{h,-h} = -(-1)^h p;$$

et, comme on trouvera encore

$$R_{h,k} R_{-h,-k} = \frac{\Theta_h \Theta_k}{\Theta_{h+k}} \frac{\Theta_{-h} \Theta_{-k}}{\Theta_{-h,-k}},$$

on en conclura, eu égard à la formule (3), et en supposant h, k ainsi que $h+k$ non divisibles par $p-1$,

(7) $$R_{h,k} R_{-h,-k} = p.$$

Ajoutons que si $h+k$ n'est pas divisible par $p-1$, l'on aura [voir la formule (3) de la page 348],

(8) $$R_{h,k} = S(\tau^{ih+jk}),$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i comprises dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots p-2,$$

et les valeurs correspondantes de i, j étant choisies de manière à vérifier la condition

(9) $$t^i + t^j \equiv 1, \text{ (mod. } p).$$

Concevons maintenant que, dans le second membre de la formule (8), on réduise l'exposant de chaque puissance de τ à l'un des nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2.$$

Ce second membre deviendra une fonction entière de τ du degré $p-2$, et l'on aura identiquement

(10) $$S(\tau^{ih+jk}) = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_{p-2}\tau^{p-2},$$

a_0, a_1, a_2, ... a_{p-2} désignant des nombres entiers dont plusieurs pourront s'évanouir, et dont la somme, égale au nombre des valeurs de i, vérifiera la formule

(11) $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-2} = p - 2.$$

Cela posé, l'équation (10) donnera

(12) $$R_{h,k} = a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \ldots + a_{p-2}\tau^{p-2}.$$

D'ailleurs, si, dans l'équation (10), on remplace τ par τ^m, on trouvera

(13) $$S(\tau^{imh+jmk}) = a_0 + a_1\tau^m + a_2\tau^{2m} + \ldots + a_{p-2}\tau^{(p-2)m}.$$

Donc, si le produit

$$m(h+k) = mh + mk$$

n'est pas divisible par $p-1$, l'équation (12) entraînera la suivante

(14) $$R_{mh,mk} = a_0 + a_1\tau^m + a_2\tau^{2m} + \ldots + a_{p-2}\tau^{(p-2)m}.$$

Si $p-1$ divisait le produit

$$m(h+k),$$

alors on trouverait, 1° en supposant mh, mk non divisibles par $p-1$,

(15) $$S(\tau^{imh+jmk}) = -1,$$

par conséquent

(16) $$a_0 + a_1\tau^m + a_2\tau^{2m} + \ldots + a_{p-2}\tau^{(p-2)m} = -1;$$

2° en supposant mh et mk séparément divisibles par $p-1$,

(17) $$S(\tau^{imh+jmk}) = p-2,$$

par conséquent

$$(18) \qquad a_0 + a_1\tau^m + a_2\tau^{2m} + \ldots + a_{p-2}\tau^{(p-2)m} = p - 2.$$

Il est bon d'observer que, dans le premier membre de l'équation (18), les seules puissances de τ, qui se trouveront multipliées par des coefficients positifs et distincts de zéro, seront les puissances qui offriront des exposants divisibles par $p-1$, ou, ce qui revient au même, celles qui se réduiront à l'unité. Donc le premier membre de la formule (18) se réduira identiquement au premier membre de la formule (11).

Un moyen fort simple d'obtenir, pour des valeurs données de t, h et k, les coefficients

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \ldots a_{p-2}$$

est de résoudre l'équation (9) par rapport à j, et d'en tirer, pour chaque valeur de i, la valeur correspondante de j. Concevons, par exemple, que l'on prenne $p=5$. Alors τ sera une racine primitive

$$\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1}$$

de l'équation

$$x^4 = 1,$$

tandis que t désignera une racine primitive de l'équivalence

$$x^4 \equiv 1, \; (\text{mod. } 5).$$

On pourra donc prendre

$$t = 2;$$

et, en effet, aux valeurs

$$0, \; 1, \; 2, \; 3$$

de l'exposant i, correspondront des valeurs essentiellement distinctes et non équivalentes

$$1, 2, 4, 8 \equiv 3, \text{(mod. 5)}$$

de la puissance 2^i. D'ailleurs, si l'on attribue successivement à i les valeurs

$$1, 2, 3$$

les valeurs correspondantes de

$$1 - 2^i \equiv 2^j, \text{(mod. 4)}$$

seront

$$1 - 2 \equiv 4, \quad 1 - 4 \equiv 2, \quad 1 - 8 \equiv 1 - 3 \equiv 3, \text{(mod. 5)},$$

et par suite, on trouvera pour valeurs correspondantes de j,

$$2, 1, 3.$$

Cela posé, l'on aura

$$S(\tau^{ih+jk}) = \tau^{h+2k} + \tau^{2h+h} + \tau^{3(h+k)};$$

et de cette dernière formule, jointe aux équations (8) et (10), on tirera

pour $h = 1, \quad k = 1, \quad h + k = 2,$

$R_{1,1} = 2\tau^3 + \tau^6 = \tau^2 + 2\tau^3, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2;$

pour $h = 1, \quad k = 2, \quad h + k = 3,$

$R_{1,2} = \tau^5 + \tau^4 + \tau^9 = 1 + 2\tau, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,$

pour $h = 3, \quad k = 3, \quad h + k = 6 \equiv 2$, (mod. 4)

$R_{3,3} = 2\tau^9 + \tau^{18} = \tau^2 + 2\tau, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0,$
etc...

Il serait facile d'exprimer les valeurs des constantes positives

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots a_{p-2},$$

comprises dans les formules (10) et (13), en fonction des sommes de la forme

$$S(\tau^{ih+jk})\quad \text{ou}\quad S(\tau^{imh+jmk}).$$

En effet, si, dans la formule (13), on prend successivement pour m chacun des termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots p-2,$$

on en tirera

$$(19)\left\{\begin{array}{l} a_0+a_1\quad +a_2\quad +\ldots+a_{p-2}\quad =p-2,\\ a_0+a_1\tau\quad +a_2\tau^2\quad +\ldots+a_{p-2}\tau^{p-2} =S(\tau^{ih+jk}),\\ a_0+a_1\tau^2\quad +a_2\tau^4\quad +\ldots+a_{p-2}\tau^{2(p-2)}=S(\tau^{2(ih+jk)}),\\ \text{etc.}\ldots\\ a_0+a_1\tau^{p-2}+a_2\tau^{2(p-2)}+\ldots+a_{p-2}\tau^{(p-2)^2}=S(\tau^{(p-2)(ih+jk)}). \end{array}\right.$$

Or, comme, en désignant par h une quantité entière positive ou négative, on aura généralement, si h est non divisible par $p-1$,

$$(20)\qquad 1+\tau^h+\tau^{2h}+\ldots+\tau^{(p-2)h}=0,$$

et, si h est divisible par $p-1$,

$$(21)\qquad 1+\tau^h+\tau^{2h}+\ldots+\tau^{(p-2)h}=p-1,$$

on conclura des formules (19), respectivement multipliées par les facteurs

$$1,\quad \tau^{-m},\quad \tau^{-2m},\ldots \tau^{-(p-2)m},$$

puis, combinées entre elles par voie d'addition,

$$(22)\qquad (p-1)a_m=$$
$$p-2+\tau^{-m}S(\tau^{ih+jk})+\tau^{-2m}S(\tau^{2(ih+jk)})+\ldots+\tau^{-(p-2)m}S(\tau^{(p-2)(ih+jk)}),$$

ou, ce qui revient au même

$$(23)\qquad (p-1)a_m =$$
$$p-2+\tau^{(p-2)m}\,S(\tau^{ih+jk})+\tau^{(p-3)m}\,S(\tau^{2(ih+jk)})+\ldots+\tau^m\,S(\tau^{(p-2)(ih+jk)}).$$

Ce n'est pas tout. Si, en attribuant à i et j deux valeurs correspondantes, propres à vérifier la formule (9), on a

$$ih+jk\equiv l,\ (\text{mod.}\,p-1),$$

l désignant l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots p-2,$$

on en conclura, non-seulement

$$\tau^{ih+jk}=\tau^l,$$

mais aussi

$$t^{ih+jk}\equiv t^l,\ (\text{mod.}\,p).$$

Donc la formule (10) entraînera la suivante

$$(24)\quad S(t^{ih+jk})\equiv a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_{p-2}t^{p-2},\ (\text{mod.}\,p),$$

et la formule (13) donnera pareillement

$$(25)\ S(t^{imh+jmk})\equiv a_0+a_1t^m+a_2t^{2m}+\ldots+a_{p-2}t^{(p-2)m},\ (\text{mod.}\,p).$$

Si, dans cette dernière, on prend successivement pour m chacun des termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots p-2,$$

on en tirera

$$(26)\left\{\begin{array}{l}
a_0+a_1\quad+a_2\quad+\ldots+a_{p-2}\quad\equiv p-2,\ (\text{mod.}\,p)\\
a_0+a_1t\quad+a_2t^2\quad+\ldots+a_{p-2}t^{p-2}\equiv S(t^{ih+jk}),\\
a_0+a_1t^2\quad+a_2t^4\quad+\ldots+a_{p-2}t^{2(p-2)}\equiv S(t^{2(ih+jk)}),\\
\text{etc.}\ldots\\
a_0+a_1t^{p-2}+a_2t^{2(p-2)}+\ldots+a_{p-2}t^{(p-2)^2}\equiv S(t^{(p-2)(ih+jk)}).
\end{array}\right.$$

Or, comme, en désignant par h une quantité entière positive ou négative, on aura généralement, si h est non divisible par $p-1$,

(27) $$1+t^h+t^{2h}+\ldots+t^{(p-2)h}\equiv 0,\ (\text{mod}.\,p),$$

et, si h est divisible par $p-1$,

(28) $$1+t^h+t^{2h}+\ldots+t^{(p-2)h}\equiv p-1,\ (\text{mod}.\,p),$$

on conclura des formules (26), respectivement multipliées par les facteurs

$$1,\quad t^{-m},\quad t^{-2m},\ldots\ t^{-(p-2)m},$$

puis, combinées entre elles par voie d'addition,

(29) $$(p-1)\mathrm{a}_m\equiv$$
$$p-2+t^{-m}\mathrm{S}(t^{ih+jk})+t^{-2m}\mathrm{S}(t^{2(ih+jk)})+\ldots+t^{-(p-2)m}\mathrm{S}(t^{(p-2)(ih+jk)}),$$
$$(\text{mod}.\,p),$$

ou, ce qui revient au même,

(30) $$\mathrm{a}_m\equiv 2-t^{(p-2)m}\,\mathrm{S}(t^{ih+jk})-t^{(p-3)m}\,\mathrm{S}(t^{2(ih+jk)})-\ldots-t^m\,\mathrm{S}(t^{(p-2)(ih+jk)}),$$
$$(\text{mod}.\,p).$$

La quantité positive a_m, devant être, en vertu de la formule (11), inférieure à $p-2$, pourra être aisément déterminée à l'aide de la formule (30), si l'on parvient à trouver des quantités équivalentes, suivant le module p, à des sommes de la forme

$$\mathrm{S}(t^{ih+jk})\quad \text{ou}\quad \mathrm{S}(t^{imh+jmk}).$$

Or, concevons que, dans la somme

$$\mathrm{S}(t^{ih+jk}),$$

h et k se réduisent, comme on peut toujours le supposer, à deux termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots p-2.$$

Alors, si l'on a

$$(31) \qquad h+k=0,$$

ce qui suppose $h=0$, $k=0$, on trouvera évidemment

$$(32) \qquad S(\tau^{ih+jk}) = p-2,$$

par conséquent

$$(33) \qquad S(t^{ih+jk}) \equiv -2, \ (\text{mod. } p);$$

et, si l'on suppose

$$(34) \qquad h+k=p-1,$$

on trouvera

$$S(\tau^{ih+jk}) = S(\tau^{(j-i)k}) = \tau + \tau^2 + \ldots + \tau^{p-2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(35) \qquad S(\tau^{ih+jk}) = -1,$$

par conséquent

$$S(t^{ih+jk}) \equiv S(t^{(j-i)k}) \equiv t + t^2 + \ldots + t^{p-2}, \ (\text{mod. } p),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(36) \qquad S(t^{ih+jk}) \equiv -1, \ (\text{mod. } p).$$

Si $h+k$ est renfermé entre les limites 0, $p-1$, en sorte qu'on ait

$$(37) \qquad h+k>0 \quad \text{et} \quad <p-1,$$

on trouvera, en vertu de la formule (9),

$$(38) \qquad S(t^{ih+jk}) \equiv S(t^{ih}(1-t^{i})^{k}), \ (\text{mod. } p);$$

et puisque, pour $i=0$, l'on aura

$$1-t^i=0,$$

il est clair que, dans le second membre de la formule (38), on pourra étendre la sommation, indiquée par le signe S, ou, comme dans le premier membre, aux seules valeurs de i comprises dans la suite

$$1, 2, 3, \ldots p-2,$$

ou bien encore à toutes les valeurs de i comprises dans la suite

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2.$$

D'ailleurs, dans cette dernière hypothèse, on aura, en vertu des formules (27) et (37),

$$\mathrm{S}(t^{ih})=0, \quad \mathrm{S}(t^{i(h+1)})=0, \quad \ldots \mathrm{S}(t^{i(h+k)})\equiv 0, \text{ (mod. } p);$$

et par suite, après le développement de

$$(1-t^i)^k$$

suivant la puissance ascendante de t^i, le second membre de la formule (38) se composera d'une suite de termes dont chacun sera équivalent à zéro, suivant le module p. Donc la condition (37) entraînera l'équivalence

(39) $$\mathrm{S}(t^{ih+jk})\equiv 0, \text{ (mod. } p).$$

Supposons enfin

(40) $$h+k>p-1.$$

Alors, $h+k$ étant renfermé entre les limites $p-1$,

$2(p-1)$, si l'on pose

$$(41)\qquad \mathrm{h}=(p-1)-h,\quad \mathrm{k}=(p-1)-k,$$

la somme

$$\mathrm{h}+\mathrm{k}=2(p-1)-(h+k)$$

sera renfermée entre les limites $0, p-1$, de manière à vérifier la condition

$$(42)\qquad \mathrm{h}+\mathrm{k}>0 \quad \text{et} \quad <p-1.$$

Alors aussi l'on aura

$$\mathrm{S}(t^{ih+jk})\equiv \mathrm{S}(t^{-i\mathrm{h}-j\mathrm{k}}),\ (\text{mod. } p);$$

puis, en posant

$$(43)\qquad j-i\equiv \iota,\ (\text{mod. } p),$$

ou, ce qui revient au même, $j\equiv i+\iota$, on trouvera

$$\mathrm{S}(t^{ih+jk})\equiv \mathrm{S}(t^{-\iota\mathrm{k}}\,t^{-i(\mathrm{h}+\mathrm{k})}),\ (\text{mod. } p).$$

D'ailleurs, comme, en vertu de l'équivalence (43), la formule (9) se réduit à

$$(44)\qquad t^{-i}\equiv 1+t^{\iota},\ (\text{mod. } p),$$

on trouvera encore

$$(45)\qquad \mathrm{S}(t^{ih+jk})\equiv \mathrm{S}(t^{-\iota\mathrm{k}}(1+t^{\iota})^{\mathrm{h}+\mathrm{k}}),\ (\text{mod. } p).$$

Dans le second membre de la formule (45), la sommation indiquée par le signe S doit s'étendre aux diverses valeurs de t^{ι} qui permettent de vérifier la condition (44), par conséquent aux diverses valeurs de ι comprises dans la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ p-2,$$

mais distinctes de la valeur

$$\iota = \frac{p-1}{2},$$

pour laquelle il ne serait plus possible de vérifier la condition (44), réduite à la forme inadmissible

$$t^{-1} \equiv 0;$$

et, comme pour $\iota = \frac{p-1}{2}$, on aura $t^{\iota} \equiv -1$, par conséquent

$$1 + t^{\iota} \equiv 0, \text{ (mod. } p),$$

il en résulte que, dans le second membre de la formule (45), la sommation indiquée par le signe S pourra être étendue sans inconvénient à toutes les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots p-2$$

de l'exposant ι. Or, dans cette dernière hypothèse, en développant

$$(1 + t^{\iota})^{h+k}$$

suivant les puissances ascendantes de t^{ι}, puis, ayant égard aux formules (27), (28) et (42), on tirera de l'équation (45)

$$S(t^{ih+jk}) \equiv (p-1)\frac{1.2.3\ldots(h+k)}{(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)}, \text{ (mod. } p),$$

ou, ce qui revient au même,

(46) $$S(t^{ih+jk}) \equiv -\Pi_{h,k}, \text{ (mod. } p),$$

la valeur de $\Pi_{h,k}$ étant

(47) $$\Pi_{h,k} \equiv \frac{1.2.3\ldots(h+k)}{(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)}.$$

Il est bon d'observer que la formule (46), dans laquelle h, k, et h, k sont liés entre eux par les équations (41), s'étend au cas même où la somme

$$h + k,$$

redeviendrait inférieure à $p - 1$, et se trouverait comprise entre les limites

$$0, p - 1.$$

Alors, en effet, comme on aurait

$$\mathrm{h} + \mathrm{k} > p - 1, \tag{48}$$

et par suite

$$1.2.3\ldots(\mathrm{h} + \mathrm{k}) \equiv 0, \ (\mathrm{mod.}\ p),$$

l'équivalence (47) donnerait évidemment

$$\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}} \equiv 0, \tag{49}$$

et en conséquence la formule (46) se trouverait réduite à la formule (39).

Observons encore que de la formule (46), jointe aux équations (41), l'on tire immédiatement

$$S(t^{ih+jk}) \equiv -\Pi_{p-1-h,\, p-1-k}, \ (\mathrm{mod.}\ p). \tag{50}$$

Dans les formules qui précèdent, chacune des lettres h, k représente l'un des nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots p - 2.$$

et par suite chacune des lettres h, k représente l'un des nombres

$$1, 2, 3, 4, \ldots p - 1.$$

Pour rendre les notations facilement applicables au cas où

$$h,\ k,\quad \mathrm{h},\ \mathrm{k},$$

représenteraient des quantités entières quelconques, soit positives, soit négatives, nous désignerons généralement par

$$\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}}$$

ce que devient le rapport

$$\frac{1.2.3\ldots(\mathrm{h}+\mathrm{k})}{(1.2\ldots\mathrm{h})(1.2\ldots\mathrm{k})}$$

quand on y remplace les quantités entières

$$\mathrm{h}\quad \text{et}\quad \mathrm{k}$$

par les deux termes qui, dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots p-1$$

sont équivalentes à ces quantités, suivant le module $p-1$. Cela posé, la formule (50), étendue à des valeurs entières quelconques de h et de k, donnera généralement, si $h+k$ n'est pas divisible par $p-1$,

$$(51)\qquad \mathrm{S}(t^{ih+jk}) \equiv -\Pi_{-h,-k},\ (\text{mod. } p).$$

Ajoutons que, si $h+k$ devient divisible par $p-1$, la formule (51) devra être remplacée, ou par la formule (33), ou par la formule (36); savoir : par la formule (33), lorsque $p-1$ divisera séparément h et k, et par la formule (36), dans le cas contraire.

Concevons maintenant que, dans les formules (33), (36) et (51), l'on remplace

$$h \text{ par } mh,\quad \text{et}\quad k \text{ par } mk,$$

m étant un terme de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots p-2.$$

Alors on trouvera, 1° en supposant mh et mk séparément divisibles par $p-1$,

(52) $$S(t^{m(ih+jk)}) \equiv -2, \pmod{p};$$

2°, en supposant que $p-1$ divise la somme

$$m(h+k) = mh + mk$$

sans diviser ses deux parties mh, mk,

(53) $$S(t^{m(ih+jk)}) \equiv -1, \pmod{p};$$

3°, en supposant le produit $m(h+k)$ non divisible par $p-1$,

(54) $$S(t^{m(ih+jk)}) \equiv -\Pi_{-mh,-mk}, \pmod{p}.$$

En vertu de ces dernières équivalences, la formule (30) donnera

(55) $$a_m \equiv 2 + \Pi_{-h,-k}t^{(p-2)m} + \Pi_{-2h,-2k}t^{(p-3)m} + \ldots + \Pi_{-(p-2)h,-(p-2)k}t^m, \pmod{p},$$

ou, ce qui revient au même,

(56) $$a_m \equiv 2 + \Pi_{h,k}t^m + \Pi_{2h,2k}t^{2m} + \ldots + \Pi_{(p-2)h,(p-2)k}t^{(p-2)m}, \pmod{p},$$

pourvu que, ι désignant l'un quelconque des nombres entiers

$$1,\ 2,\ 3,\ldots p-2,$$

l'on ait soin de remplacer généralement le coefficient de $t^{\iota m}$, savoir :

$$\Pi_{\iota h,\iota k}$$

1° par l'unité, quand $p-1$ divisera la somme des produits

ιh, ιk sans diviser chacun d'eux; 2° par le nombre 2, quand $p-1$ divisera séparément chacun de ces produits.

Lorsque, à l'aide de la formule (56), on aura calculé les valeurs de

$$a_0, a_1, a, \ldots a_{p-1},$$

correspondantes à une valeur donnée de t, et à des valeurs de h, k pour lesquelles la somme $h+k$ n'est pas divisible par $p-1$, alors, pour obtenir la valeur de

$$R_{h,k}$$

il suffira de recourir à l'équation (12).

Pour montrer une application de la formule (56), considérons en particulier le cas où l'on aurait

$$p=5.$$

Alors, si l'on suppose, comme on peut le faire, $t=2$, la formule (56) donnera

$$a_m \equiv 2 + \Pi_{h,k} 2^m + \Pi_{2h,2k} 2^{2m} + \Pi_{3h,3k} 2^{3m}, \text{ (mod. 5)}.$$

Si d'ailleurs on prend

$$h=1, \quad k=1,$$

on trouvera

$$a_m \equiv 2 + \Pi_{1,1} 2^m + \Pi_{2,2} 2^{2m} + \Pi_{3,3} 2^{3m}, \text{ (mod. 5)};$$

ou plutôt

$$a_m \equiv 2 + \Pi_{1,1} 2^m + 2^{2m} + \Pi_{3,3} 2^{3m}, \text{ (mod. 5)}$$

en remplaçant, comme on doit le faire,

$$\Pi_{2,2}$$

par l'unité, attendu que $p-1=4$ divise la somme

$$2+2$$

des indices placés ici au bas de la lettre Π, sans diviser séparément chacun d'eux. Comme on aura d'ailleurs, en vertu de la formule (47),

$$\Pi_{1,1} = \frac{1.2}{1.1} = 2,$$

et, en vertu de la formule (49),

$$\Pi_{3,3} = 0,$$

on trouvera définitivement, dans l'hypothèse admise,

$$a_m \equiv 2 + 2^{m+1} + 2^{2m}, \text{ (mod. 5)},$$

ou, ce qui revient au même

$$a_m \equiv 2 + (-1)^m + 2^{m+1}, \text{ (mod. 5)},$$

puis on en conclura, 1° pour des valeurs paires de m,

$$a_m \equiv -2 + 2^{m+1},$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$a_m \equiv 1 + 2^{m+1},$$

et par suite

$$a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 5 \equiv 0, \quad a_2 \equiv 6 \equiv 1, \quad a_3 \equiv 17 \equiv 2, \text{ (mod. 5)}.$$

Donc, puisque chacun des coefficients

$$a_0, \; a_1, \; a_2, \; a_3$$

doit être nul ou positif, et ne peut surpasser $p - 2 = 3$, on aura nécessairement

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2.$$

Cela posé, la formule (12) donnera

$$R_{1,1} = \tau^2 + 2\tau^3.$$

On se trouve donc ainsi ramené à l'une des formules que nous avions déduites directement de la formule (8).

On pourrait remarquer que l'unité, par laquelle nous avons remplacé le coefficient

$$\Pi_{2,2} = \frac{1.2.3.4}{(1.2)(1.2)} = 6,$$

est équivalente à ce coefficient suivant le module 5. Mais on se tromperait si l'on supposait que, dans le cas où $p-1$ divise $h+k$ sans diviser h et k, l'on a toujours

$$\Pi_{h,k} \equiv 1, \ (\text{mod. } p).$$

Effectivement, en prenant comme ci-dessus $p=5$, on trouvera

$$\Pi_{1,3} = \frac{1.2.3.4}{1.(1.2.3)} = 4 \equiv -1, \ (\text{mod. } 5).$$

En général, si $p-1$ divise $h+k$, sans diviser h et k, alors h et k, étant réduits chacun à l'un des nombres

$$1, 2, 3, \ldots p-2,$$

fourniront une somme précisément égale à $p-1$; en sorte qu'on aura

$$h+k = p-1 \equiv -1, \ (\text{mod. } p)$$
$$k \equiv -h-1, \ (\text{mod. } p),$$

et par suite

$$(k+1)(k+2)\ldots(k+h) \equiv (-1)^h \, 1.2.3\ldots h.$$

Or, on tire de cette dernière formule

$$(-1)^h \equiv \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+h)}{1.2\ldots h} \equiv \frac{1.2.3\ldots(k+h)}{(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)},$$

par conséquent

$$(57) \qquad \Pi_{h,k} \equiv (-1)^h, \ (\text{mod. } p);$$

et il résulte évidemment de l'équivalence (57) que, dans la formule (56), on peut laisser à $t^{\iota m}$ pour coefficient l'expression

$$\Pi_{\iota h,\, \iota k},$$

lors même que $p-1$ divise la somme $\iota h + \iota k$, sans diviser ιh et ιk, pourvu que ιh et ιk offrent des valeurs paires.

Une conséquence importante à laquelle on se trouve immédiatement conduit par la seule inspection des formules (8) et (51), c'est que, dans le cas où la somme $h + k$ n'est pas divisible par $p-1$, l'expression

$$\Pi_{-h,-k}$$

équivaut, au signe près, à ce que devient la fonction entière de τ représentée par

$$R_{h,k},$$

quand on y remplace une racine primitive τ de l'équation

$$x^{p-1} = 1,$$

par une racine primitive t de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p).$$

Cette dernière racine t doit d'ailleurs coïncider avec celle que renferme la formule (9).

Lorsqu'on veut appliquer à des cas particuliers les formules ci-dessus établies, toute la difficulté se réduit à trouver, pour des valeurs de h et de k positives, mais inférieures au module p, des quantités équivalentes aux expressions de la forme

$$\Pi_{h,k} = \frac{1.2.3\ldots(h+k)}{(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)},$$

c'est-à-dire aux coefficients numériques que renferme le développement de la puissance

$$(1+t)^{h+k}$$

du binôme $1+t$. Le calcul direct de ces coefficients devient assez pénible, lorsque le nombre t acquiert une valeur considérable. Mais alors même des quantités équivalentes à ces coefficients, suivant le module p, peuvent être assez facilement obtenues par l'une des méthodes que nous allons indiquer.

D'abord, si, en désignant par t une racine primitive de l'équivalence

$$t^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod}.\, p),$$

on nomme *indices* des nombres entiers

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ldots$$

les diverses valeurs de l'exposant i, pour lesquelles la puissance t^i deviendra successivement équivalente à ces nombres entiers suivant le module p, il est clair, d'une part, que deux nombres seront équivalents, suivant le module p, quand leurs indices seront ou égaux, ou équivalents suivant le module $p-1$, d'autre part que l'indice d'un produit sera équivalent à la somme des indiees de ses facteurs, et l'indice d'un rapport à la différence des indices de ses deux termes. Cela posé, si, en se bornant à considérer des nombres entiers et des indices plus petits que la limite p, on construit deux tables, qui offrent le nombre correspondant à chaque indice, et l'indice correspondant à chaque nombre, l'addition successive des indices placés à la suite les uns des autres dans la seconde table, fournira les indices des produits

$$1.2, \quad 1.2.3, \quad 1.2.3.4, \quad \text{etc...}$$

et dès lors il deviendra facile de calculer l'indice du rapport

$$\Pi_{h,k} = \frac{1.2.3\ldots(h+k)}{(1.2\ldots h)(1.2\ldots k)},$$

par conséquent une quantité qui soit équivalente à ce rapport, suivant le module p. M. Jacobi ayant effectivement construit les tables dont nous venons de parler, pour toute valeur de p inférieure à 1000, il en résulte que, pour une semblable valeur, on obtiendra sans peine un nombre équivalent à $\Pi_{h,k}$ suivant le module p.

Il est bon d'observer qu'au lieu de réduire chaque indice à l'un des nombres

$$0, 1, 2, 3, \ldots p-2,$$

on pourrait le réduire à l'une des quantités

$$-\frac{p-1}{2}, \quad -\frac{p-3}{2}, \ldots -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \ldots \frac{p-3}{2}, \quad \frac{p-1}{2}.$$

Supposons, pour fixer les idées,

$$p = 17.$$

Alors en prenant, comme on peut le faire, $t = 10$, on reconnaîtra qu'aux nombres

$$1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7, \ 8, \ 9, \ 10, \ 11, \ 12, \ 13, \ 14, \ 15, \ 16,$$

correspondent les indices

$$0, \ 10, \ 11, \ 4, \ 7, \ 5, \ 9, \ 14, \ 6, \ 1, \ 13, \ 15, \ 12, \ 3, \ 2, \ 8,$$

ou

$$0,\ -6,\ -5,\ 4,\ 7,\ 5,\ -7,\ -2,\ 6,\ 1,\ -3,\ -1,\ -4,\ 3,\ 2,\ 8.$$

Or, les sommes formées par l'addition successive de ces indices seront équivalentes, suivant le module 16, aux quantités

$$0,\ -6,\ 5,\ -7,\ 0,\ 5,\ -2,\ -4,\ 2,\ 3,\ 0,\ -1,\ -5,\ -2,\ 0,\ 8.$$

Donc ces dernières quantités représenteront les indices des produits de la forme

$$1.2.3\ldots h,$$

pour les valeurs de h représentées par les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16.$$

Ainsi, en particulier, quatre de ces produits correspondront à l'indice 0, et seront en conséquence équivalents à l'unité, suivant le module 17; tandis qu'un seul produit, ayant 8 pour indice, sera équivalent à 16, ou à -1, suivant ce même module. Les quatre produits équivalents à $+1$ seront ceux qu'on obtiendra en prenant pour h un des nombres

$$1,\quad 5,\quad 11,\quad 15,$$

et se réduiront à

$$1,\quad 1.2.3.4.5,$$
$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11,\quad 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15,$$

tandis que le seul produit équivalent à -1, sera, conformément à un théorème connu, le produit de tous les nombres entiers positifs, inférieurs au module 17, savoir :

$$1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.$$

Il sera maintenant facile de calculer les valeurs de

$$\Pi_{h,k},$$

correspondantes à la valeur 17 du module p, et à des valeurs données de h,k. Ainsi, par exemple, en posant

$$h=4,\quad k=4,\quad h+k=8,$$

on trouvera pour indices des produits

$$1.2.3.4,\quad 1.2.3.4.5.6.7.8$$

les quantités

$$-7,\quad -4.$$

Donc l'indice du rapport

$$\Pi_{h,k}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{(1.2.3.4)(1.2.3.4)}$$

sera

$$-4+7+7=10\equiv-6, (\mathrm{mod.}\ 16),$$

et, en conséquence, ce rapport sera équivalent, suivant le module 17, au nombre 2. Pareillement, si l'on prend

$$h=2,\quad k=6.\quad h+k=8,$$

on trouvera, pour indices des produits

$$1.2,\quad 1.2.3.4.5.6,\quad 1.2.3.4.5.6.7.8,$$

les quantités

$$-6,\quad 5,\quad -4.$$

Donc l'indice du rapport

$$\Pi_{2,6}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{(1.2)(1.2.3.4.5.6)},$$

sera

$$-4+6-5=-3,$$

et en conséquence sera équivalent, suivant le module 17, au nombre 11, ou, ce qui revient au même, à la quantité négative -6.

Au reste, sans recourir aux tables qui fournissent, pour chaque module, l'indice correspondant à un nombre, ou le nombre correspondant à un indice donné, on pourrait, à l'aide de simples additions et soustractions, obtenir facilement des quantités équivalentes aux diverses valeurs de $\Pi_{h,k}$, c'est-à-dire, aux nombres figurés des divers ordres. En effet, d'après les propriétés bien connues de ces nombres, on peut les déduire par addition les uns des autres, en formant ce qu'on appelle le *triangle arithmétique* de Pascal. Il suffira donc, pour arriver au but que l'on se propose, de calculer quelques-uns des termes que doit renfermer le triangle arithmétique, en réduisant chacun d'eux à un nombre inférieur au module donné, ou à une quantité dont la valeur numérique ne surpasse pas la moitié de ce module. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Supposons les deux nombres h, k inférieurs au module p ou même à $p-1$. Il suit évidemment de la formule (47), que les valeurs de

$$\Pi_{h,k}, \quad \Pi_{h-1,k}, \quad \Pi_{h,k-1},$$

seront respectivement égales aux produits du rapport

$$\frac{1.2.3\ldots(h+k-1)}{[(1.2\ldots(h-1)]\,[(1.2\ldots(k-1)]},$$

par les trois nombres

$$\frac{h+k}{hk}, \quad \frac{1}{k}, \quad \frac{1}{h}.$$

Or, comme le premier de ces trois nombres est précisément la somme des deux autres, nous devons en conclure que l'on aura

$$(58) \qquad \Pi_{h,k} = \Pi_{h-1,k} + \Pi_{h,k-1}.$$

De plus, il est clair qu'on aura, en vertu de la formule (47), non-seulement

(59) $$\Pi_{h,k} = \Pi_{k,h},$$

mais encore

(60) $$\Pi_{h,1} = h + 1, \quad \Pi_{1,k} = k + 1.$$

Cela posé, imaginons une table, analogue à la table de Pythagore, dans laquelle la première ligne verticale et la première ligne horizontale renfermeront les valeurs de h, k positives et inférieures à p ou même à $p - 1$, c'est-à-dire les nombres

$$1, 2, 3, \ldots p - 2;$$

et concevons que, dans la case correspondante à des valeurs données de h, k l'on place une quantité, non-seulement équivalente à $\Pi_{h,k}$, suivant le module p, mais de plus renfermée entre les limites $-\frac{p}{2}$, $+\frac{p}{2}$. Il résulte des formules (60) que, dans la table dont il s'agit, chaque terme de la seconde ligne horizontale ou verticale sera équivalent au terme correspondant de la première ligne augmenté de l'unité, et de la formule (58) que, dans chacune des autres lignes horizontales et verticales, un terme quelconque sera équivalent à la somme des deux termes antérieur et supérieur, c'est-à-dire, des deux termes qui le précèdent immédiatement, l'un dans la même ligne horizontale, l'autre dans la même ligne verticale. Or, ces remarques fournissent un moyen très-simple de construire la table que nous venons d'imaginer, et qui, dans le cas où l'on suppose $p = 17$, se réduit à la suivante.

Quantités équivalentes aux nombres figurés suivant le module $p = 17$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
2	3	6	−7	−2	4	−6	2	−6	4	−2	−7	6	3	1	0	
3	4	−7	3	1	5	−1	1	−5	−1	−3	7	−4	−1	0		
4	5	−2	1	2	7	6	7	2	1	−2	5	1	0			
5	6	4	5	7	−3	3	−7	−5	−4	−6	−1	0				
6	7	−6	−1	6	3	6	−1	−6	7	1	0					
7	8	2	1	7	−7	−1	−2	−8	−1	0						
8	−8	−6	−5	2	−5	−6	−8	1	0							
9	−7	4	−1	1	−4	7	−1	0								
10	−6	−2	−3	−2	−6	1	0									
11	−5	−7	7	5	−1	0										
12	−4	6	−4	1	0											
13	−3	3	−1	0												
14	−2	1	0													
15	−1	0														
16	0															

Dans la table précédente, on s'est dispensé d'écrire les quantités auxquelles $\Pi_{h,k}$ devient équivalent, lorsque la somme $h + k$ est renfermée entre les limites p, $2(p-1)$; attendu que ces quantités, en vertu de la formule (49), se réduisent toutes à zéro, comme celles qui correspondent au cas où l'on a

$$h + k = p.$$

Quant à celles qui répondent au cas où l'on a

$$h + k = p - 1,$$

elles se réduisent alternativement, en vertu de la formule (57), à $+1$ ou à -1, selon que h est pair ou impair, et occupent les cases situées sur l'une des diagonales de la table. Les cases situées sur l'autre diagonale renferment les quantités

$$2, 6, 3, 2, -3, 6, -2, 1$$

qui représentent les valeurs de

$$\Pi_{h,h}$$

correspondantes aux valeurs

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

du nombre h; et, dans les cases symétriquement placées à l'égard de cette autre diagonale, on trouve des quantités deux à deux égales entre elles, conformément à l'équation (59). Ajoutons que les quantités écrites dans la partie du tableau comprise entre la première ligne horizontale, la première ligne verticale et la première diagonale, sont encore, dans chaque ligne horizontale ou verticale, égales deux à deux, au signe près, à distances égales des extrémités de chaque ligne. Or, c'est ce qu'il était facile de prévoir. Car si l'on nomme

$$h, k, l$$

trois quantités entières, non divisibles par $p-1$, et choisies de manière à vérifier la formule

$$(61)\qquad \mathrm{h}+\mathrm{k}+\mathrm{l}=p-1$$

ou même plus généralement, de manière à vérifier l'équivalence

$$(62)\qquad \mathrm{h}+\mathrm{k}+\mathrm{l}\equiv 0,\ (\mathrm{mod.}\ p-1),$$

on aura, en vertu de l'équation (3),

$$\Theta_{\mathrm{h}+\mathrm{k}}=\Theta_{-\mathrm{l}}=(-1)^{\mathrm{l}}\frac{p}{\Theta_{\mathrm{l}}},$$

et par suite

$$\mathrm{R}_{\mathrm{h},\mathrm{k}}=\frac{\Theta_{\mathrm{h}}\Theta_{\mathrm{k}}}{\Theta_{\mathrm{h}+\mathrm{k}}}=(-1)^{\mathrm{l}}\frac{\Theta_{\mathrm{h}}\Theta_{\mathrm{k}}\Theta_{\mathrm{l}}}{p}.$$

Or, cette dernière équation devant subsister, ainsi que la formule (61) ou (62), lorsqu'on échange entre eux les nombres

$$\mathrm{h},\ \mathrm{k},\ \mathrm{l},$$

on en conclura

$$(63)\qquad \frac{\Theta_{\mathrm{h}}\Theta_{\mathrm{k}}\Theta_{\mathrm{l}}}{p}=(-1)^{\mathrm{h}}\mathrm{R}_{\mathrm{k},\mathrm{l}}=(-1)^{\mathrm{k}}\mathrm{R}_{\mathrm{l},\mathrm{h}}=(-1)^{\mathrm{l}}\mathrm{R}_{\mathrm{h},\mathrm{k}}.$$

On aura donc, dans l'hypothèse admise,

$$(64)\qquad (-1)^{\mathrm{h}}\mathrm{R}_{\mathrm{k},\mathrm{l}}=(-1)^{\mathrm{k}}\mathrm{R}_{\mathrm{l},\mathrm{h}}=(-1)^{\mathrm{l}}\mathrm{R}_{\mathrm{h},\mathrm{k}};$$

et, en remplaçant τ par t, on trouvera

$$(65)\qquad (-1)^{\mathrm{h}}\Pi_{\mathrm{k},\mathrm{l}}\equiv(-1)^{\mathrm{k}}\Pi_{\mathrm{l},\mathrm{h}}\equiv(-1)^{\mathrm{l}}\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}},\ (\mathrm{mod.}\ p).$$

On tirera d'ailleurs de la formule (65)

$$\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{l}}\equiv(-1)^{\mathrm{l}-\mathrm{k}}\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}}\equiv(-1)^{\mathrm{h}}\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}},\ (\mathrm{mod.}\ p),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(66)\qquad \Pi_{\mathrm{h},p-1-\mathrm{h}-\mathrm{k}}\equiv(-1)^{\mathrm{h}}\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}},\ (\mathrm{mod.}\ p).$$

Il serait au reste facile de déduire directement la formule (66) de l'équation (47), par un calcul semblable à celui qui nous a conduits à la formule (57).

Les formules (49), (57), (58), (59), (60), (66), offrent le moyen de simplifier la recherche des quantités équivalentes à $\Pi_{h,k}$, et la construction de la table qui les renferme; et d'abord, il résulte des formules (49), (57) qu'on pourra se borner à calculer, dans cette table, les termes correspondants à des valeurs de h, k, pour lesquelles on aura

$$(67) \qquad h + k < p - 1.$$

De plus, eu égard à la formule (59), on pourra supposer que h est le plus petit des deux nombres h, k, lorsque ces deux nombres deviennent inégaux; et, en admettant cette supposition, l'on tirera de la formule (67)

$$(68) \qquad h < \frac{p-1}{2}.$$

Ce n'est pas tout : en vertu de la formule (66), on pourra se borner à calculer celles des quantités équivalentes à $\Pi_{h,k}$ pour lesquelles on a

$$k = \text{ou} < p - 1 - h - k,$$

par conséquent

$$(69) \qquad k = \text{ou} < \frac{p-1-h}{2};$$

et de la condition

$$h = \text{ou} < k,$$

combinée avec la formule (69), on tirera

$$(70) \qquad h = \text{ou} < \frac{p-1}{3}.$$

On pourra donc, dans la table ci-dessus mentionnée, conserver seulement la première ligne horizontale et la première ligne verticale, avec les cases correspondantes aux valeurs de h, comprises entre les limites

$$\mathrm{h} = 1,\quad \mathrm{h} = \frac{p-1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{p-2}{3},$$

et aux valeurs de k, renfermées entre les limites

$$\mathrm{k} = \mathrm{h},\quad \mathrm{k} = \frac{p-1-\mathrm{h}}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{p-2-\mathrm{k}}{2}.$$

Ainsi, en particulier, si l'on suppose $p = 17$, la table dont il s'agit pourra être réduite à la suivante.

Quantités équivalentes aux nombres figurés suivant le module 17.

	1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7	8
2		6	−7	−2	4	−6	2
3			3	1	5	−1	
4				2	7	6	
5					−3		

Pour construire cette dernière table, il suffit de placer dans la première ligne verticale les valeurs de h inférieures à

$$\frac{p-1}{3} = 5\tfrac{1}{3}.$$

savoir

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

et dans la première ligne horizontale, les valeurs de k inférieures à

$$\frac{p-1}{2}=8,$$

savoir

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7;$$

puis de remplir, pour chaque valeur de h, les cases correspondantes aux valeurs de k comprises entre les limites

$$h,\ \frac{p-1-h}{2},$$

en opérant comme il suit.

Pour obtenir les termes

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

qui devront composer la seconde ligne horizontale, on ajoutera l'unité aux termes correspondants de la première ligne. De plus, comme des formules (58) et (59) on tire

$$\Pi_{h,h} = 2\Pi_{h-1,h}, \tag{71}$$

il est clair que, dans chacune des lignes horizontales qui suivront la seconde, le premier terme conservé devra être équivalent, suivant le module 17, au double du terme immédiatement supérieur, et chacun des autres termes conservés à la somme faite des deux termes placés en avant et au-dessus de celui que l'on considère.

En opérant de cette manière, on trouvera pour termes de la troisième ligne horizontale, les quantités

$$6 \equiv 2.3, \quad -7 \equiv 6+4, \quad -2 \equiv -7+5, \quad 4 \equiv -2+6,$$
$$-6 \equiv 4+7, \quad 2 \equiv -6+8;$$

pour termes de la quatrième ligne, les quantités

$$3 \equiv 2(-7), \quad 1 \equiv 3-2, \quad 5 \equiv 1+4, \quad -1 \equiv 5-6;$$

pour termes de la cinquième ligne, les quantités

$$2 \equiv 2.1, \quad 7 \equiv 2+5, \quad 6 \equiv 7-1;$$

enfin, pour terme unique de la sixième ligne horizontale, la quantité

$$-3 \equiv 2.7, \ (\text{mod. } 17).$$

A la seule inspection de la table construite comme on vient de le dire, on obtiendra immédiatement les quantités équivalentes à $\Pi_{h,k}$, pour des valeurs de h et de k non situées hors des limites

$$(72) \quad h=1, \quad h=\frac{p-1}{3}; \quad k=h, \quad k=\frac{p-1-h}{2};$$

et l'on trouvera, par exemple, en supposant toujours $p=17$,

$$\Pi_{4,4} \equiv 2, \quad \Pi_{2,6} \equiv -6, \ (\text{mod. } 17).$$

Si les valeurs de h, k, n'étant plus situées entre les limites (72), étaient néanmoins des valeurs positives propres à vérifier encore la condition (67), on devrait joindre à la table construite les formules (59) et (66). On trouverait ainsi, par exemple

$$\Pi_{6,8} \equiv \Pi_{6,2} \equiv \Pi_{2,6} \equiv 6,$$
$$\Pi_{7,7} \equiv -\Pi_{7,2} \equiv -\Pi_{2,7} \equiv -2, \ (\text{mod. } 17)$$

Enfin, si les quantités h, k acquéraient des valeurs quelconques positives ou négatives, mais non divisibles par $p-1$, on devrait d'abord les réduire, par l'addition ou la soustraction de $p-1$ ou de ses multiples, à des quantités positives, mais inférieures à $p-1$, puis, après cette réduction, l'on aurait recours, soit à la formule (49), soit à la formule (57), soit à la table construite, et aux formules (59), (66), suivant que la somme $\mathrm{h}+\mathrm{k}$ serait supérieure, égale ou inférieure au nombre $p-1$.

Il est inutile de s'occuper du cas où l'une des quantités h, k, et par suite l'une des quantités h, k deviendrait divisible par p, attendu que, dans cette hypothèse, on n'a plus besoin de recourir à la formule (56) pour déterminer la valeur de $\mathrm{R}_{h,k}$ qui, en vertu de l'équation (5), se réduit à -1.

Un moyen fort simple de prévenir et de reconnaître les erreurs qui pourraient se glisser dans la construction de la table ci-dessus mentionnée, consiste à introduire dans chaque ligne horizontale un terme de plus. Effectivement, en vertu de la formule (66), si l'on fait entrer un nouveau terme dans une ligne horizontale correspondante à une valeur donnée de h, ce nouveau terme devra être égal au terme précédent, pris en signe contraire, ou à l'avant-dernier terme de la même ligne, suivant que la valeur de h sera un nombre impair ou un nombre pair. Donc, si au moment où l'on parvient à l'extrémité d'une ligne horizontale, il arrivait que la condition dont nous venons de parler ne fût pas remplie, on devrait recommencer le calcul des termes compris dans cette ligne. En opérant comme on vient de le dire, et supposant, par exemple, $n=17$, on obtiendra, au lieu de la table trouvée plus haut, celle que nous allons transcrire.

Quantités équivalentes aux nombres figurés suivant le module 17.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	—8
2		6	—7	—2	4	—6	2	—6
3			3	1	5	—1	1	
4				2	7	6	7	
5					—3	3		

Si l'on supposait au contraire $p = 19$, ou $p = 29$, on obtiendrait les tableaux suivants.

Quantités équivalentes aux nombres figurés suivant le module 19.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	—9
2		6	—9	—4	2	9	—2	7	—2
3			1	—3	—1	8	6	—6	
4				—6	—7	1	7	1	
5					5	6	—6		
6						—7			

Quantités équivalentes aux nombres figurés suivant le module 29.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	−14
2		6	10	−14	−8	−1	7	−13	−3	8	−9	4	−11	4
3			−9	6	−2	−3	4	−9	−12	−4	−13	−9	9	
4				12	10	7	11	2	−10	−14	2	−7	2	
5					−9	−2	9	11	1	−13	−11	11		
6						−4	5	−13	−12	4	−7	4		
7							10	−3	14	−11	11			
8								−6	8	−3	8			
9									−13	13				

Lorsque, dans la formule (56), on substitue les quantités équivalentes à

$$\Pi_{h,k},\quad \Pi_{2h,2k},\ldots\Pi_{(p-2)h,(p-2)k},$$

déterminées par l'une des méthodes que nous venons d'exposer, on obtient une valeur de a_m qui dépend évidemment de la valeur attribuée à t. Or, t désignant une des racines primitives de l'équation

$$x^{p-1}\equiv 1,\ (\text{mod.}\, p),$$

si l'on pose

$$t^{\iota}=t',$$

ι étant un nombre premier à $p-1$, t' sera une autre racine primitive de la même équivalence ; et comme, dans Θ_h, le coefficient de

$$\theta^{t^{\iota m}} = \theta^{t'^m}$$

sera

$$\tau^{m\iota h},$$

il est clair que, remplacer dans Θ_k, t par t', revient à y remplacer τ^h par $\tau^{\iota h}$. Donc, substituer à la racine primitive t la racine primitive $t' \equiv t^\iota$, c'est, en d'autres termes, transformer Θ_h en $\Theta_{\iota h}$, par conséquent Θ_k en $\Theta_{\iota k}$, et

$$R_{h,k} = \frac{\Theta_h \Theta_k}{\Theta_{h+k}}$$

en

$$R_{\iota h, \iota k} = \frac{\Theta_{\iota h} \Theta_{\iota k}}{\Theta_{\iota(h+k)}}.$$

Ainsi, par exemple, comme, en prenant $p = 5$ et

$$t = 2,$$

on trouve

$$R_{1,1} = \tau^2 + 2\tau^3, \quad R_{3,3} = \tau^2 + 2\tau,$$

si l'on prend au contraire

$$t = 3 \equiv 2^3, \text{ (mod. 5)},$$

on trouvera

$$R_{1,1} = \tau^6 + 2\tau^9 = \tau^2 + 2\tau, \quad R_{3,3} = \tau^6 + 2\tau^3 = \tau^2 + 2\tau^3.$$

Donc, substituer à la racine primitive 2 la racine primitive $3 \equiv 2^3$, (mod. 5), ce sera transformer

$$R_{1,1} \text{ en } R_{3,3}$$

et réciproquement

$$R_{3,3} \text{ en } R_{9,9} = R_{1,1}.$$

62.

Les diverses formules obtenues dans cette note se rapportent au cas où la valeur de Θ_h est donnée par l'équation (1). Si, en désignant par n un diviseur de $p-1$, et posant

$$(73) \qquad p-1=n\varpi,$$

on nommait

$$\rho, \quad r$$

des racines primitives des formules

$$x^n=1, \quad \text{et} \quad x^n\equiv 1, \ (\text{mod. } p),$$

on pourrait prendre

$$\rho=\tau^{\varpi}, \quad r\equiv t^{\varpi}, \ (\text{mod. } p).$$

Alors, en remplaçant

$$h \text{ par } \varpi h, \quad k \text{ par } \varpi k,$$

puis écrivant, pour abréger,

$$\begin{aligned} &\Theta_h \ \text{au lieu de } \Theta_{\varpi h},\\ &\mathrm{R}_{h,k} \ \text{au lieu de } \mathrm{R}_{\varpi h,\varpi k},\\ &\Pi_{h,k} \ \text{au lieu de } \Pi_{\varpi h,\varpi k},\end{aligned}$$

on obtiendrait, à la place des formules trouvées dans cette note, des formules analogues obtenues dans le Mémoire. Ainsi, en particulier, la valeur de Θ_h serait généralement fournie, non plus par l'équation (1), mais par la suivante

$$(74) \qquad \Theta_h=\theta+\rho^h\theta^t+\rho^{2h}\theta^{t^2}+\ldots+\rho^{(p-2)h}\theta^{t^{p-2}},$$

et l'on aurait, 1°, en supposant h divisible par n,

$$(75) \qquad \Theta_h=\Theta_0=-1;$$

2°, en supposant h non divisible par n

(76) $$\Theta_h\Theta_{-h}=(-1)^{\varpi h}p.$$

De plus, en posant toujours

$$\Theta_h\Theta_k=\mathrm{R}_{h,k}\Theta_{h+k},$$

ou, ce qui revient au même,

(77) $$\mathrm{R}_{h,k}=\frac{\Theta_h\Theta_k}{\Theta_{h+k}},$$

on trouverait, 1° pour des valeurs de h ou de k divisibles par n,

(78) $$\mathrm{R}_{h,k}=-1;$$

2° pour des valeurs de h non divisibles par n,

(79) $$\mathrm{R}_{h,-h}=-(-1)^{\varpi h}p;$$

3° pour des valeurs de h, de k et de $h+k$, non divisibles par n,

(80) $$\mathrm{R}_{h,k}\mathrm{R}_{-h,-k}=p.$$

Ajoutons que, si $h+k$ n'est pas divisible par n, l'on aura

(81) $$\mathrm{R}_{h,k}=\mathrm{S}(\rho^{ih+jk}),$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de i comprises dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ldots p-2,$$

et les valeurs correspondantes de i, j étant choisies de manière à vérifier la condition (9), c'est-à-dire la formule

$$t^i+t^j\equiv 1,\ (\text{mod. } p).$$

Concevons maintenant que, dans le second membre de la formule (81), on réduise l'exposant de chaque puissance de ρ à l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ n-1.$$

Ce second membre deviendra une fonction entière de ρ, du degré $n-1$; et l'on aura identiquement

$$(82)\qquad S(\rho^{ih+jk}) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a^{n-1}\rho_{n-1},$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ désignant des nombres entiers, dont plusieurs pourront s'évanouir, et dont la somme, égale au nombre des valeurs de i, vérifiera la formule

$$(83)\qquad a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = p-2.$$

Cela posé, l'équation (81) donnera

$$(84)\qquad R_{h,k} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1}.$$

Concevons d'ailleurs que, pour se conformer aux conventions ci-dessus adoptées, l'on remplace

$$\mathrm{h} \text{ par } \varpi\mathrm{h} \text{ et } \mathrm{k} \text{ par } \varpi\mathrm{k},$$

dans le second membre de la formule (47). Cette formule, réduite à

$$(85)\qquad \Pi_{\mathrm{h,k}} = \frac{1.2.3\ldots[\varpi(\mathrm{h}+\mathrm{k})]}{(1.2\ldots\varpi\mathrm{h})(1.2\ldots\varpi\mathrm{k})},$$

fournira la valeur de $\Pi_{\mathrm{h,k}}$, dans le cas où les quantités h, k se réduiront à deux termes de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ n;$$

et, dans le cas contraire, $\Pi_{\mathrm{h,k}}$ représentera ce que devient le rapport

$$\frac{1.2.3\ldots[\varpi(\mathrm{h}+\mathrm{k})]}{(1.2\ldots\varpi\mathrm{h})(1.2\ldots\varpi\mathrm{k})}$$

quand on y remplace les quantités entières h, k par les deux termes de la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ldots n,$$

qui sont équivalents à ces mêmes quantités, suivant le module n. D'autre part, à l'aide de raisonnements semblables à ceux par lesquels nous avons établi les formules (19) et (26), on prouvera que les valeurs de

$$\mathrm{a}_0,\ \mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ldots \mathrm{a}_{n-1},$$

renfermées dans les équations (82) et (84), vérifient non-seulement les formules

$$(86)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}=p-2,\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\rho+\mathrm{a}_2\rho^2+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}\rho^{n-1}=\mathrm{S}(\rho^{ih+jk}),\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1\rho^2+\mathrm{a}_2\rho^4+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}\rho^{2(n-1)}=\mathrm{S}(\rho^{2(ih+jk)}),\\
\text{etc.}\ldots\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_2\rho^{n-2}+\mathrm{a}_2\rho^{2(n-2)}+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}\rho^{(n-1)^2}=\mathrm{S}(\rho^{(n-1)(ih+jk)}),
\end{array}\right.$$

mais encore les suivantes

$$(87)\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}\equiv p-2,\ (\text{mod.}\,p),\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1 r+\mathrm{a}_2 r^2+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}r^{n-1}\equiv\mathrm{S}(r^{ih+jk}),\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1 r^2+\mathrm{a}_2 r^4+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}r^{2(n-1)}\equiv\mathrm{S}(r^{2(ih+jk)}),\\
\text{etc.}\ldots\\
\mathrm{a}_0+\mathrm{a}_1 r^{n-1}+\mathrm{a}_2 r^{2(n-1)}+\ldots+\mathrm{a}_{n-1}r^{(n-1)^2}\equiv\mathrm{S}(r^{(n-1)(ih+jk)}),
\end{array}\right.$$

et de ces dernières, respectivement multipliées par les facteurs

$$1,\ r^{-m},\ r^{-2m},\ldots r^{-(n-1)m},$$

puis, combinées entre elles par voie d'addition, l'on conclura

$$(88)\qquad na_m \equiv$$
$$p-2+r^{-m}S(r^{ih+jk})+r^{-2m}S(r^{2(ih+jk)})+\ldots+r^{-(n-1)m}S(r^{(n-1)(ih+jk)}), \quad (\text{mod. } p).$$

De plus, si l'on remplace h par ϖh et k et ϖk dans les premiers membres des formules (52), (53), (54), on tirera de ces formules 1°, en supposant mh et nk séparément divisibles par n,

$$(89)\qquad S(r^{m(ih+jk)}) \equiv -2, \ (\text{mod. } p);$$

2° en supposant que n divise la somme

$$m(h+k) = mh + mk,$$

sans diviser ses deux parties mh, mk,

$$(90)\qquad S(r^{m(ih+jk)}) \equiv -1, \ (\text{mod. } p);$$

3° en supposent le produit $m(h+k)$ non divisible par n

$$(91)\qquad S(r^{m(ih+jk)}) \equiv -\Pi_{-mh,-mk}, \ (\text{mod. } p),$$

attendu que l'on devra, en vertu des conventions admises, écrire simplement $\Pi_{mh,mk}$ au lieu de $\Pi_{m\varpi h, m\varpi k}$. Donc la formule (88) donnera

$$(92)\qquad -na_m \equiv 2+\Pi_{-h,-k}r^{-m}+\Pi_{-2h,-2k}r^{-2m}+\ldots+\Pi_{-(n-1)h,-(n-1)k}r^{-(n-1)m}, \quad (\text{mod. } p),$$

ou, ce qui revient au même

$$(93)\qquad -na_m = 2+\Pi_{h,k}r^{m}+\Pi_{2h,2k}r^{2m}+\ldots+\Pi_{(n-1)h,(n-1)k}r^{(n-1)m}, \quad (\text{mod. } p),$$

pourvu que, ι désignant l'un quelconque des nombres entiers

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n-1,$$

l'on ait soin de remplacer généralement le coefficient de $t^{\iota m}$, savoir :

$$\Pi_{\iota h, \iota k},$$

1° par l'unité, quand n divisera la somme des produits ιh, ιk sans diviser chacun d'eux ; 2° par le nombre 2 quand n divisera séparément chacun de ces produits. Enfin, comme on tire de l'équation (73)

$$n\varpi \equiv -1, \text{ (mod. } p),$$

il est clair qu'en multipliant par ϖ les deux membres de la formule (93), on la réduira immédiatement à celle-ci

(94) $\mathrm{a}_m \equiv (2 + \Pi_{h,k} r^m + \Pi_{2h,2k} r^{2m} + \ldots + \Pi_{(n-1)h,(n-1)k} r^{(n-1)m})\varpi, (\text{mod.} p)$.

Pour appliquer à des cas particuliers la formule (94), on devra d'abord rechercher des quantités équivalentes, suivant le module p, aux nombres figurés qui représenteront les diverses valeurs de $\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}}$. On y parviendra sans peine à l'aide des méthodes précédemment exposées, en commençant par réduire chacune des quantités h, k à un terme de la suite

$$1, 2, 3, \ldots\ n-1.$$

Après cette réduction, si l'on a

$$\mathrm{h} + \mathrm{k} > n,$$

ou

$$\mathrm{h} + \mathrm{k} = n,$$

on en conclura, dans le premier cas,

(95) $$\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}} \equiv 0, \text{ (mod. } p),$$

et, dans le second cas,

(96) $$\Pi_{\mathrm{h},\mathrm{k}} \equiv (-1)^{\varpi \mathrm{h}}, \text{ (mod. } p).$$

Si l'on a, au contraire,

$$h + k < n,$$

on pourra, eu égard aux deux formules,

(97) $$\Pi_{k,h} = \Pi_{h,k}$$

et

(98) $$\Pi_{h,\,n-k-h} \equiv (-1)^{\varpi h}\,\Pi_{h,k},\ (\text{mod. } p),$$

ramener la recherche d'une quantité qui soit équivalente à $\Pi_{h,k}$ suivant le module p, au cas particulier dans lequel h,k représenteraient deux nombres non situés hors des limites

(99) $$h = 1,\quad h = \frac{n}{3};\qquad k = h,\quad k = \frac{n-h}{2}.$$

D'ailleurs, h, k étant deux nombres de cette espèce, le terme équivalent à $\Pi_{h,k}$, dans la table que nous avons appris à construire, sera celui que renfermeront la ligne horizontale, dont le premier terme est ϖh, et la ligne verticale, dont le premier terme est ϖk.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on prenne

$$p = 17,\quad n = 4.$$

On aura

$$\varpi = \frac{p-1}{n} = \frac{16}{4} = 4,$$

et par suite le terme équivalent à $\Pi_{1,1}$, dans la première table de la page 489, sera celui que renferment les lignes horizontale et verticale, dont les premiers termes se réduisent au nombre $\varpi = 4$. On aura donc

$$\Pi_{1,1} \equiv 2,\ (\text{mod. } 17).$$

Si, en supposant toujours $p = 17$, on prenait

$$n = 8,$$

on trouverait

$$\varpi = \frac{16}{8} = 2;$$

et, par suite, le terme équivalent à $\Pi_{1,3}$ dans la table dont il s'agit, serait celui que renferment les lignes horizontale et verticale dont les premiers termes se réduisent aux nombres

$$\varpi = 2, \quad 3\varpi = 6.$$

On aurait donc alors

$$\Pi_{1,3} \equiv -6, \text{ (mod. } 17).$$

Soit encore

$$p = 29, \quad n = 7.$$

On trouvera

$$\varpi = \frac{28}{7} = 4;$$

et le tableau de la page 490, joint à la formule (98), donnera

$$\Pi_{1,1} \equiv 12, \quad \Pi_{2,2} \equiv -6, \quad \Pi_{3,3} \equiv \Pi_{1,3} \equiv -7, \text{ (mod. } 29).$$

On aura d'ailleurs

$$\Pi_{4,4} \equiv 0, \quad \Pi_{5,5} \equiv 0, \quad \Pi_{6,6} \equiv 0.$$

Enfin, si, en nommant ρ une racine primitive de l'équation

$$x^7 = 1,$$

l'on pose

$$R_{1,1} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + a_5\rho^5 + a_6\rho^6,$$

la formule (94), jointe à celles que nous venons d'obtenir, donnera

$$a_m \equiv 4\,(2 + 12r^m - 6r^{2m} - 7r^{3m}),\ (\text{mod. } p),$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^7 \equiv 1,\ (\text{mod. } 29),$$

D'autre part,

$$t = 10$$

étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{28} \equiv 1,\ (\text{mod. } 29)$$

on pourra prendre

$$r = t^{\varpi} = t^4 \equiv -5,\ (\text{mod. } 29),$$

ce qui réduira la valeur trouvée de a_m à

$$a_m \equiv 4(2 + 12(-5)^m - 6.5^{2m} - 7(-5)^{3m}),\ (\text{mod. } p).$$

Si, dans cette dernière formule, on attribue successivement à m les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$

on trouvera

$$a_0 \equiv a_4 \equiv a_5 \equiv 4,\quad a_1 \equiv 0,\quad a_2 \equiv a_3 \equiv 6,\quad a_6 \equiv 3,\ (\text{mod. } 29);$$

et par suite, puisque chacun des coefficients

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6$$

doit être nul ou positif, mais inférieur au module 29, on aura

$$a_0 = a_4 = a_5 = 4,\quad a_1 = 0,\quad a_2 = a_3 = 6,\quad a_6 = 3$$
$$R_{1,1} = 3\rho^6 + 4(1 + \rho^4 + \rho^5) + 6\,(\rho^2 + \rho^3).$$

Si maintenant on substitue à ρ l'une des puissances

$$\rho^2,\ \rho^3,\ \rho^4,\ \rho^5,\ \rho^6,$$

on trouvera immédiatement

$$\begin{aligned}
R_{2,2} &= 3\rho^5 + 4(1 + \rho + \rho^3) + 6(\rho^4 + \rho^6),\\
R_{3,3} &= 3\rho^4 + 4(1 + \rho^5 + \rho) + 6(\rho^6 + \rho^2),\\
R_{4,4} &= 3\rho^3 + 4(1 + \rho^2 + \rho^6) + 6(\rho + \rho^5),\\
R_{5,5} &= 3\rho^2 + 4(1 + \rho^6 + \rho^4) + 6(\rho^3 + \rho),\\
R_{6,6} &= 3\rho + 4(1 + \rho^3 + \rho^2) + 6(\rho^5 + \rho^4).
\end{aligned}$$

Si, en prenant toujours

$$p = 29, \quad n = 7,$$

on supposait

$$R_{1,2} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3 + a_4\rho^4 + a_5\rho^5 + a_6\rho^6,$$

alors de la formule (94), combinée avec les suivantes,

$$\begin{aligned}
&\Pi_{1,2} \equiv 2, \quad \Pi_{2,4} \equiv \Pi_{2,1} \equiv 2, \quad \Pi_{4,8} \equiv \Pi_{4,1} \equiv \Pi_{2,1} \equiv 2,\\
&\Pi_{3,6} \equiv 0, \quad \Pi_{5,10} \equiv \Pi_{5,3} \equiv 0, \quad \Pi_{6,12} \equiv \Pi_{6,5} \equiv 0,
\end{aligned}$$

on tirerait

$$\begin{aligned}
&a_m \equiv 8(1 + r^m + r^{2m} + r^{4m}), \ (\text{mod. } 29),\\
&a_0 \equiv 8.4 \equiv 32 \equiv 3, \ (\text{mod. } 29)\\
&a_0 = 3;
\end{aligned}$$

puis, en prenant $r = -5$, on trouverait

$$a_1 = a_2 = a_4 = 6, \quad a_3 = a_5 = a_6 = 2,$$

et l'on aurait par suite

$$R_{1,2} = 3 + 6(\rho + \rho^2 + \rho^4) + 2(\rho^3 + \rho^5 + \rho^6).$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5 + \rho^6 = -1,$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 = \Delta,$$

on trouvera encore

$$\rho + \rho^2 + \rho^4 = -\frac{1-\Delta}{2}, \quad \rho^3 + \rho^5 + \rho^6 = -\frac{1+\Delta}{2},$$

et par suite la valeur de $R_{1,2}$ deviendra

$$R_{1,2} = -1 + 2\Delta.$$

En remplaçant successivement dans cette dernière formule ρ par chacune des puissances

$$\rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6,$$

on en tirera

$$R_{1,2} = R_{2,4} = R_{4,8} = -1 + 2\Delta, \quad R_{3,6} = R_{5,10} = R_{6,12} = -1 - 2\Delta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$R_{1,2} = R_{2,4} = R_{4,1} = -1 + 2\Delta, \quad R_{3,6} = R_{5,3} = R_{6,5} = -1 - 2\Delta.$$

Nous remarquerons, en terminant cette note, que, dans le cas où l'on suppose la valeur de Θ_h déterminée, non par l'équation (1), mais par l'équation (74), la formule (63) doit être, eu égard aux notations adoptées dans la seconde hypothèse, remplacée par cette autre formule

$$\frac{\Theta_h \Theta_k \Theta_l}{p} = (-1)^{\varpi h} R_{k,l} = (-1)^{\varpi k} R_{l,h} = (-1)^{\varpi l} R_{h,k},$$

qui, pour des valeurs paires du nombre ϖ, se réduit simplement à

$$\frac{\Theta_h \Theta_k \Theta_l}{p} = R_{k,l} = R_{l,h} = R_{h,k}.$$

On doit d'ailleurs, dans ces deux dernières formules, prendre pour

$$h, k, l$$

trois quantités entières, non divisibles par n, et choisies de manière à vérifier non plus la condition (62), mais la suivante

$$\mathrm{h}+\mathrm{k}+\mathrm{l}\equiv 0, \ (\mathrm{mod.}\ n).$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $n=7$, on pourra prendre

$$\mathrm{h}=1, \quad \mathrm{k}=2, \quad \mathrm{l}=4,$$

ou bien

$$\mathrm{h}=3, \quad \mathrm{k}=5, \quad \mathrm{l}=6,$$

attendu qu'on aura, dans le premier cas

$$\mathrm{h}+\mathrm{k}+\mathrm{l}=7$$

et dans le second

$$\mathrm{h}+\mathrm{k}+\mathrm{l}=14=2\cdot 7.$$

D'ailleurs, le nombre $n=7$ étant impair, le nombre

$$\varpi=\frac{p-1}{n}=\frac{p-1}{7}$$

devra être pair ainsi que $p-1$. Donc, en supposant $n=7$, on trouvera

$$\frac{\Theta_1\Theta_2\Theta_4}{p}=\mathrm{R}_{1,2}=\mathrm{R}_{2,4}=\mathrm{R}_{4,1}, \quad \frac{\Theta_3\Theta_5\Theta_6}{p}=\mathrm{R}_{3,6}=\mathrm{R}_{5,3}=\mathrm{R}_{6,5};$$

ce qui s'accorde avec les formules déjà obtenues. Comme on aura d'ailleurs, dans la même supposition, non-seulement

$$\mathrm{R}_{1,1}=\frac{\Theta_1^2}{\Theta_2}, \quad \mathrm{R}_{2,2}=\frac{\Theta_2^2}{\Theta_4}$$

mais encore

$$\mathrm{R}_{4,4}=\frac{\Theta_4^2}{\Theta_8}=\frac{\Theta_4^2}{\Theta_1},$$

on en conclura

$$R_{1,1}\,R_{2,2}\,R_{4,4}=\Theta_1\Theta_2\Theta_4=pR_{1,2}.$$

Or, il sera facile de vérifier cette dernière formule, en prenant $p=29$. Alors en effet, en vertu de la formule

$$\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\rho^5+\rho^6=-1,$$

on pourra réduire les valeurs précédemment calculées de $R_{1,1}$, $R_{2,2}$, $R_{4,4}$ à celles qui suivent

$$R_{1,1}=2(\rho^2+\rho^3)-(\rho^6+4\rho),\quad R_{2,2}=2(\rho^4+\rho^6)-(\rho^5+4\rho^2),$$
$$R_{4,4}=2(\rho+\rho^5)-(\rho^3+4\rho^4);$$

et l'on aura par suite

$$\begin{aligned}R_{1,1}\,R_{2,2}\,R_{4,4}&=-25+62(\rho+\rho^2+\rho^4)-54(\rho^3+\rho^5+\rho^6)\\&=-29+58\Delta\\&=29R_{1,2}.\end{aligned}$$

NOTE VI.

SUR LA SOMME DES RACINES PRIMITIVES D'UNE ÉQUATION BINÔME, ET SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES DE CES RACINES.

m et n désignant deux quantités entières, et ω leur plus grand commun diviseur numérique, on peut toujours, comme l'on sait, trouver deux autres quantités entières u, v, propres à vérifier la formule

$$mu - nv = \omega.$$

Donc toute racine commune des deux équations binômes

$$x^m = 1, \quad x^n = 1,$$

et par conséquent des suivantes

$$x^{mu} = 1, \quad x^{nv} = 1$$

vérifiera encore l'équation binôme

$$x^\omega = 1,$$

puisqu'en supposant

$$mu - nv = \omega$$

on en conclura

$$\frac{x^{mu}}{x^{nv}} = x^{mu-nv} = x^\omega.$$

Si d'ailleurs, n étant positif, on a pris pour x une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1,$$

ou, en d'autres termes, si x^n est la plus petite puissance positive de x qui se réduise à l'unité, ω ne pourra différer de n; et par conséquent m sera divisible par n, en sorte qu'on aura

$$m \equiv 0, \ (\text{mod. } n).$$

Cela posé, n étant un nombre entier quelconque, nommons ρ une racine primitive de l'équation binôme

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

et

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

les entiers inférieurs à n, mais premiers à n. D'après ce qu'on vient de dire, ρ ne pourra représenter une valeur de x, propre à vérifier une équation de la forme

$$x^{mh} = 1,$$

que dans le cas où mh, et par conséquent m sera divisible par n. Or, la plus petite valeur positive de m qui remplisse cette condition est $m = n$. Donc

$$\rho^{nh}$$

sera la plus petite puissance de ρ^h qui se réduise à l'unité. Donc

$$\rho^h,\ \rho^k,\ \rho^l,\ldots$$

seront autant de racines primitives de l'équation (1). Ces racines seront d'ailleurs distinctes les unes des autres. Car si l'on avait

$$\rho^h = \rho^k$$

on en conclurait

$$\rho^{k-h} = 1, \quad \text{et} \quad k - h \equiv 0, \ (\text{mod. } n),$$

ou, ce qui revient au même

$$k \equiv h, \ (\text{mod. } n),$$

et par conséquent

$$k = h,$$

h, k devant être tous deux positifs et inférieurs à n. Ajoutons que les seules racines primitives de l'équation (1) seront les puissances entières de ρ, dont les exposants, premiers à n, pourront être réduits, par l'addition ou la soustraction de n ou d'un multiple de n, à l'un des nombres

$$h, k, l, \ldots$$

En effet, si m représente, au signe près, un entier qui ne soit pas premier à n, alors, ω étant le plus commun diviseur de m et de n, le produit

$$\frac{mn}{\omega}$$

sera le plus petit multiple de m, qui devienne divisible par n; et par suite

$$\rho^{\frac{mn}{\omega}}$$

sera la plus petite puissance positive de ρ^m qui se réduise à l'unité. Donc alors ρ^m représentera une racine primitive, non plus de l'équation (1), mais de la suivante

$$(2) \qquad x^{\frac{n}{\omega}} = 1.$$

Si m devient premier à n, on pourra en dire autant des produits

$$mh, mk, ml, \ldots$$

Donc alors

$$\rho^{mh}, \rho^{mk}, \rho^{ml}, \ldots$$

seront encore des racines primitives de l'équation (1). D'ailleurs ces racines seront encore distinctes les unes des autres. Car on ne pourrait supposer

$$\rho^{mh} = \rho^{mk},$$

sans en conclure

$$\rho^{m(k-h)} = 1, \; m(k-h) \equiv 0, \; (\text{mod. } n),$$

par conséquent

$$k - h \equiv 0, \quad k \equiv h, (\text{mod. } n),$$

et

$$k = h,$$

h, k devant être tous deux inférieurs à n. Donc, si m devient premier à n, les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées, soit par les termes de la suite

$$\rho^h, \rho^k, \rho^l, \ldots$$

soit par les termes de la suite

$$\rho^{mh}, \rho^{mk}, \rho^{ml}, \ldots$$

qui coïncideront avec les termes de la première, rangés dans un ordre différent.

Si, au contraire, m et n n'étant pas premiers entre eux, ω désigne leur plus grand commun diviseur, alors ceux des termes de la suite

$$\rho^{mh}, \rho^{mk}, \rho^{ml}, \ldots$$

qui resteront distincts les uns des autres, représenteront les diverses racines primitives de l'équation (2).

Supposons à présent que le nombre n soit décomposé en deux facteurs

$$\varphi, \chi$$

premiers entre eux, et nommons

$$\xi, \eta$$

des racines primitives des deux équations

(3) $\quad x^{\varphi} = 1, \qquad$ (4) $\quad x^{\chi} = 1.$

Les puissances

$$\xi^m,\ \eta^m,$$

et par suite leur produit

$$\xi^m\eta^m = (\xi\eta)^m,$$

se réduiront évidemment à l'unité, si m est divisible simultanément par φ et par χ, ou, ce qui revient au même, par le produit

$$\varphi\chi = n.$$

Donc on vérifiera l'équation (1) en posant

$$x = \xi\eta.$$

Il y a plus : si m est choisi de manière à vérifier la condition

$$(\xi\eta)^m = 1,$$

on en conclura

$$(\xi\eta)^{m\varphi} = 1,\quad \eta^{m\varphi} = 1,$$

par conséquent

$$m\varphi \equiv 0,\ (\text{mod. } \chi),\quad m \equiv 0,\ (\text{mod. } \chi);$$

et

$$(\xi\eta)^{m\chi} = 1,\quad \xi^{m\chi} = 1,$$

par conséquent

$$m\chi \equiv 0,\ (\text{mod.} \varphi),\quad m \equiv 0,\ (\text{mod. } \varphi).$$

Donc, pour que la puissance m^e du produit $\xi\eta$ se réduise à l'unité, il sera nécessaire que m soit divisible à la fois par χ et par φ, ou, en d'autres termes, que m soit un multiple de n; et, comme $m = n$ sera la plus petite valeur positive de m pour laquelle cette condition soit remplie, nous devons conclure que le produit $\xi\eta$ de deux racines primitives, propres à vérifier les équations (3) et (4), sera une racine primitive de l'équation (1).

Enfin chaque racine primitive ρ de l'équation (1) ne pourra être formée que d'une seule manière par la multiplication de deux racines primitives propres à vérifier les équations (3) et (4). En effet, concevons que

$$\xi_{\prime}, \quad \eta_{\prime},$$

désignent encore deux racines primitives de ces équations. Si l'on a

$$\xi\eta = \xi_{\prime}\eta_{\prime},$$

on en conclura

$$(\xi\eta)^{\varphi} = (\xi_{\prime}\eta_{\prime})^{\varphi}, \quad \eta^{\varphi} = \eta_{\prime}^{\varphi},$$

par conséquent

$$\left(\frac{\eta_{\prime}}{\eta}\right)^{\varphi} = 1;$$

et, comme on aura d'autre part

$$\eta^{\chi} = \eta_{\prime}^{\chi} = 1,$$

par conséquent

$$\left(\frac{\eta_{\prime}}{\eta}\right)^{\chi} = 1,$$

il est clair que le rapport $\frac{\eta_{\prime}}{\eta}$ devra être une racine commune des équations (2) et (3). Or, φ, χ étant par hypothèse premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur ω sera l'unité. Donc la racine commune dont il s'agit sera la racine unique de l'équation

$$x = 1,$$

et l'on aura

$$\frac{\eta_{\prime}}{\eta} = 1, \quad \eta_{\prime} = \eta.$$

On trouvera de même $\xi_{,}=\xi$. Donc les produits

$$\xi\eta, \quad \xi_{,}\eta_{,},$$

ne pourront être égaux entre eux que dans le cas où l'on aura

$$\xi_{,}=\xi, \quad \eta_{,}=\eta.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante.

Premier théorème. Si le nombre entier n est le produit de deux facteurs φ, χ premiers entre eux, on obtiendra les diverses racines primitives de l'équation

$$x^n=1,$$

et on les obtiendra chacune d'une seule manière, en multipliant successivement les diverses racines primitives de l'équation

$$x^\varphi=1$$

par chacune des racines primitives de l'équation

$$x^\chi=1.$$

Le théorème que nous venons d'énoncer, entraîne évidemment ceux qui suivent.

Deuxième théorème. Le nombre entier n étant le produit des deux facteurs φ, χ, premiers entre eux, désignons par

$$\rho, \ \rho_{,}, \ \rho_{,,}, \text{ etc.},$$

les diverses racines primitives de l'équation

$$x^n=1;$$

puis nommons

$$\xi, \ \xi_{,}, \ \xi_{,,}, \ldots \quad \text{et} \quad \eta, \ \eta_{,}, \ \eta_{,,}, \ldots$$

les diverses racines primitives des équations

$$x^{\varphi} = 1, \quad \text{et} \quad x^{\chi} = 1;$$

on aura

$$(5) \quad \rho + \rho_{,} + \rho_{,,} + \ldots = (\xi + \xi_{,} + \xi_{,,} + \ldots)(\eta + \eta_{,} + \eta_{,,} + \ldots).$$

Troisième théorème. Le nombre entier n étant le produit de deux facteurs φ, χ premiers entre eux, si l'on désigne par

$$\text{N}, \quad \Phi, \quad \text{X},$$

le nombre des racines primitives successivement calculé par chacune des trois équations

$$x^n = 1, \quad x^{\varphi} = 1, \quad x^{\chi} = 1,$$

on aura

$$(6) \qquad \text{N} = \Phi \text{X}.$$

Comme ces trois théorèmes sont évidemment applicables, non-seulement au nombre n, mais encore aux nombres φ, χ, facteurs de n, ou même aux facteurs de φ, lorsqu'il en existe,... et ainsi de suite; il est clair qu'on pourra énoncer encore les théorèmes suivants.

Quatrième théorème. Si le nombre entier n est le produit de plusieurs facteurs

$$\varphi, \chi, \psi, \ldots$$

premiers entre eux, on obtiendra les diverses racines primitives de l'équation

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

et on les obtiendra chacune d'une seule manière, en cherchant d'abord les diverses racines primitives des équations auxiliaires

(7) $$x^{\varphi} = 1, \quad x^{\chi} = 1, \quad x^{\psi} = 1, \quad \text{etc}\ldots$$

et formant tous les produits, qui ont chacun pour facteurs, 1° l'une des racines primitives de l'équation $x^{\varphi} = 1$, 2° l'une des racines primitives de l'équation $x^{\chi} = 1$, 3° l'une des racines primitives de l'équation $x^{\psi} = 1$, etc...

Cinquième théorème. Le nombre entier n étant le produit de plusieurs facteurs

$$\varphi, \chi, \psi, \ldots$$

premiers entre eux, désignons par

$$\rho, \rho_{\prime}, \rho_{\prime\prime}, \ldots$$

les diverses racines primitives de l'équation binôme

$$x^n = 1,$$

et soient respectivement

$$\xi, \xi_{\prime}, \xi_{\prime\prime}, \ldots; \quad \eta, \eta_{\prime}, \eta_{\prime\prime}, \ldots; \quad \zeta, \zeta_{\prime}, \zeta_{\prime\prime}, \ldots$$

les diverses racines primitives des équations binômes

$$x^{\varphi} = 1, \quad x^{\chi} = 1, \quad x^{\psi} = 1, \ldots$$

La somme des racines primitives de la première équation sera le produit des sommes séparément formées avec les racines primitives de chacune des autres; en sorte qu'on aura

(8) $$\rho + \rho_{\prime} + \rho_{\prime\prime} + \ldots = (\xi + \xi_{\prime} + \xi_{\prime\prime} + \ldots)(\eta + \eta_{\prime} + \eta_{\prime\prime} + \ldots)(\zeta + \zeta_{\prime} + \zeta_{\prime\prime} + \ldots)\ldots;$$

et par suite, si l'on nomme s la somme des racines primitives de l'équation (1), l'on aura

(9) $$s = (\xi + \xi_{\prime} + \xi_{\prime\prime} + \ldots)(\eta + \eta_{\prime} + \eta_{\prime\prime} + \ldots)(\zeta + \zeta_{\prime} + \zeta_{\prime\prime} + \ldots)\ldots$$

Sixième théorème. Le nombre entier n étant le produit de plusieurs facteurs

$$\varphi, \chi, \psi, \ldots$$

premiers entre eux, désignons par

$$N, \quad \Phi, \quad X, \quad \Psi, \ldots$$

le nombre des racines primitives successivement calculé pour chacune des équations

$$x^n = 1, \quad x^\varphi = 1, \quad x^\chi = 1, \quad x^\psi = 1, \ldots$$

On aura

$$(10) \qquad N = \Phi X \Psi \ldots$$

Soient maintenant

$$\nu, \nu', \nu'', \ldots$$

les facteurs premiers de n, dont l'un pourra se réduire à 2. Le nombre n sera de la forme

$$(11) \qquad n = \nu^a \nu'^b \nu''^c \ldots$$

a, b, c,... désignant des exposants entiers ; et, si l'on veut décomposer n en facteurs premiers entre eux, on pourra prendre pour ces facteurs les quantités

$$\nu^a, \quad \nu'^b, \quad \nu''^c, \ldots$$

dont chacune est une puissance entière d'un membre premier. Cela posé, les théorèmes que nous venons d'établir, fourniront le moyen d'obtenir facilement, dans tous les cas, la somme des racines primitives de l'équation (1) et le nombre

$$N$$

de ces racines primitives. C'est ce que nous allons faire voir.

Si d'abord on suppose le nombre n égal à 2, l'équation (1), réduite à la forme

$$x^2 = 1,$$

offrira une seule racine primitive

$$\rho = -1;$$

et par suite on aura

$$s = -1, \quad N = 1.$$

Si n est un nombre premier impair, les racines primitives de l'équation

$$x^n = 1$$

seront les puissances entières de ρ correspondantes à des exposants positifs, mais inférieurs à n, savoir

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1}.$$

On aura donc

$$s = \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1} = \frac{\rho^n - \rho}{\rho - 1} = \frac{1 - \rho}{\rho - 1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = -1,$$

et de plus

$$N = n - 1.$$

Si n est une puissance de 2, les racines primitives de l'équation

$$x^n = 1$$

seront les puissances entières de ρ correspondantes à des exposants impairs et inférieurs à n, savoir

$$\rho,\ \rho^3,\ \rho^5, \ldots \rho^{n-1}.$$

On aura donc

$$s = \rho + \rho^3 + \ldots + \rho^{n-1} = \frac{\rho^{n+1} - \rho}{\rho^2 - 1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$s = 0,$$

et de plus

$$N = \frac{n}{2}.$$

On peut encore observer que dans ce cas on a

$$\rho^{\frac{n}{2}} = -1, \quad \rho^{\frac{n}{2}+h} = -\rho^h;$$

d'où il résulte que les diverses racines primitives seront, deux à deux, égales au signe près, mais affectées de signes contraires. Leur somme sera donc nulle, comme on l'a trouvé.

Supposons à présent que n soit une puissance d'un nombre premier impair ν; en sorte qu'on ait

$$n = \nu^a.$$

Alors, pour obtenir les racines primitives de l'équation

$$x^n = 1,$$

il faudra, entre toutes les racines représentées par les termes de la suite

$$1,\ \rho,\ \rho^2,\ \ldots \rho^{n-1},$$

choisir celles dans lesquelles l'exposant de ρ est premier à n, et non divisible par ν, en laissant de côté celles où l'exposant est multiple de ν, savoir

$$\rho^0,\ \rho^\nu,\ \rho^{2\nu}, \ldots \rho^{n-\nu},$$

ou, ce qui revient au même, en laissant de côté les racines non primitives

$$1,\ \rho^\nu,\ \rho^{2\nu}, \ldots \rho^{\left(\frac{n}{\nu}-1\right)\nu}.$$

Or, ces dernières, dont le nombre est $\frac{n}{\nu}$, n'étant autre chose que les diverses racines de l'équation

$$x^{\frac{n}{\nu}} = 1,$$

leur somme totale sera nulle, aussi bien que la somme des racines de l'équation (1). Donc la différence de ces deux sommes, ou la somme s des racines primitives, s'évanouira elle-même; et l'on aura d'une part

$$s = 0,$$

d'autre part

$$N = n - \frac{n}{\nu},$$

ou, ce qui revient au même,

$$N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \nu^{a-1}\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

En résumé, si n est, ou un nombre premier ν, pair ou impair, ou une puissance ν^a d'un tel nombre, on trouvera toujours

(12) $$N = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right),$$

et l'on aura de plus

(13) $$s = -1,$$

ou

$$s = 0, \tag{14}$$

suivant qu'il s'agira de la première puissance ou d'une puissance supérieure à la première; ce que l'on pourra démontrer dans tous les cas à l'aide des raisonnements dont nous avons fait usage, lorsque n était une puissance d'un nombre premier impair.

Passons maintenant au cas où, n étant un nombre quelconque, sa valeur est donnée par la formule (11). Alors le nombre N des racines primitives de l'équation (1), et la somme s de ces racines se déduiront immédiatement des formules (10) et (12), ou des formules (9), (13) et (14). En effet, pour décomposer n, dans ce cas, en facteurs

$$\varphi, \chi, \psi, \ldots$$

premiers entre eux, il suffira de prendre

$$\varphi = \nu^a, \quad \chi = \nu'^b, \quad \psi = \nu''^c, \ldots$$

Cela posé, on aura, dans la formule (10),

$$\Phi = \nu^a\left(1 - \frac{1}{\nu}\right), \quad \mathrm{X} = \nu'^b\left(1 - \frac{1}{\nu'}\right), \quad \Psi = \nu''^c\left(1 - \frac{1}{\nu''}\right), \cdots$$

et par suite cette formule donnera

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= \nu^a\nu'^b\nu''^c\ldots\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu'}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu''}\right)\cdots \\ &= \nu^{a-1}\nu'^{b-1}\nu''^{c-1}\ldots(\nu - 1)(\nu' - 1)(\nu'' - 1)\ldots, \end{aligned} \tag{15}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{N} = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu'}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu''}\right)\cdots \tag{16}$$

De plus, en vertu de la formule (9), la valeur de s, correspondante à l'équation (1), sera le produit des valeurs de s correspondantes aux équations

$$x^{\nu^a} = 1, \quad x^{\nu'^b} = 1, \quad x^{\nu''^c} = 1, \quad \text{etc.}\ldots,$$

et dont chacune se réduira simplement à -1 ou à zéro, suivant que le nombre a ou b ou $c\ldots$ sera égal ou supérieur à l'unité. Par suite, si n est un nombre composé, pair ou impair, qui renferme deux ou plusieurs facteurs égaux entre eux, on aura toujours

$$s = 0. \tag{17}$$

Mais, si n est un nombre premier, ou un nombre composé dont les facteurs premiers $\nu, \nu', \nu''\ldots$ soient inégaux, en sorte qu'on ait

$$n = \nu\nu'\nu''\ldots, \tag{18}$$

alors on trouvera

$$s = \pm 1, \tag{19}$$

savoir

$$s = -1, \tag{20}$$

quand les facteurs premiers $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ seront en nombre impair, et

$$s = 1, \tag{21}$$

quand ces facteurs premiers seront en nombre pair.

Ainsi, en particulier, la somme des racines primitives sera -1 pour chacune des équations

$$x^2 = 1, \quad x^3 = 1, \quad x^5 = 1, \quad x^7 = 1, \quad x^{11} = 1, \quad x^{13} = 1, \quad \text{etc.}\ldots,$$

zéro pour chacune des équations

$$x^4=1,\quad x^8=1,\quad x^9=1,\quad x^{12}=1,\quad x^{16}=1,\quad x^{18}=1,\ \text{etc...}$$

et $+1$ pour chacune des équations

$$x^6=1,\quad x^{10}=1,\quad x^{14}=1,\quad x^{15}=1,\quad x^{21}=1,\quad x^{22}=1,\ \text{etc...}$$

Soit maintenant

$$f(\rho)$$

une fonction entière d'une racine primitive ρ de l'équation (1). On pourra toujours, dans cette fonction, réduire l'exposant de chaque puissance de ρ, à un nombre entier plus petit que n, et poser en conséquence

$$(22)\qquad f(\rho)=a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+\ldots+a_{n-1}\rho^{n-1},$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, désignant des coefficients indépendants de ρ. Supposons d'ailleurs que, dans la fonction $f(\rho)$, les différents termes se transforment les uns dans les autres, quand on y remplace la racine primitive ρ par une autre racine primitive ρ^m. Alors $f(\rho)$ sera ce qu'on peut nommer une *fonction symétrique* des racines primitives de l'équation (1), ou, ce qui revient au même, une fonction symétrique des puissances

$$\rho^h,\quad \rho^k,\quad \rho^l,\ldots$$

$h, k, l, \ldots$ étant les entiers inférieurs à n et premiers à n. Or, en écrivant successivement à la place de ρ chacune des racines primitives

$$\rho^h,\quad \rho^k,\quad \rho^l,\ldots$$

on reconnaîtra que, dans $f(\rho)$, ceux des termes de chacune des suites

$$\begin{array}{lll} \rho^{h}, & \rho^{k}, & \rho^{l}, \ldots \\ \rho^{2h}, & \rho^{2k}, & \rho^{2l}, \ldots \\ \rho^{3h}, & \rho^{3k}, & \rho^{3l}, \ldots \end{array}$$

qui sont distincts les uns des autres, doivent avoir les mêmes coefficients. Mais ces mêmes termes se réduisent toujours, ou aux diverses racines primitives de l'équation (1), ou du moins aux diverses racines primitives d'une équation de la forme

$$x^{\omega} = 1, \tag{23}$$

ω étant un diviseur du nombre n, qui peut devenir égal à ce même nombre. Par conséquent, *dans une fonction symétrique des racines primitives de l'équation* (1), *les racines primitives de l'équation* (23) *devront toujours offrir les mêmes coefficients ;* et une telle fonction se réduira toujours à une fonction linéaire des diverses valeurs que peut acquérir la somme des racines primitives de l'équation (23), quand on prend successivement pour ω chacun des diviseurs du nombre n, y compris ce nombre lui-même. Si, par exemple, n est un nombre premier, alors, les entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, et premiers à n, se réduisant aux divers termes de la progression arithmétique

$$1, 2, 3, \ldots n - 1,$$

et les racines primitives

$$\rho^{h}, \rho^{k}, \rho^{l}, \ldots$$

de l'équation (1) aux divers termes de la progression géométrique

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1}$$

on aura

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1},$$

et

$$(24) \qquad f(\rho) = a_0 + a_1(\rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{n-1}).$$

Donc alors *une fonction symétrique des racines primitives de l'équation* (1) *sera en même temps une fonction linéaire de la somme de ces racines.*

Comme nous l'avons déjà remarqué, si l'on désigne par ρ une racine primitive de l'équation (1), et par

$$h, k, l, \ldots$$

les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, les diverses racines primitives de la même équation pourront être représentées, non-seulement par les termes de la suite

$$\rho^h, \rho^k, \rho^l, \ldots,$$

mais encore par les termes de la suite

$$\rho^{mh}, \rho^{mk}, \rho^{ml}, \ldots$$

pourvu que m soit lui-même premier à n. Il est essentiel d'observer que, pour passer de la première suite à la seconde, il suffit de multiplier par m les divers exposants

$$h, k, l, \ldots$$

qui se transforment alors en ceux-ci

$$mh, mk, ml, \ldots$$

Si l'on multiplie de nouveau ces derniers par m, une ou plusieurs fois, on obtiendra encore d'autres suites qui seront propres elles-mêmes à représenter les diverses racines primitives, savoir

$$\rho^{m^2h}, \rho^{m^2k}, \rho^{m^2l}, \ldots$$
$$\rho^{m^3h}, \rho^{m^3k}, \rho^{m^3l}, \ldots$$
etc...

Concevons maintenant qu'avec les termes correspondants, par exemple, avec les premiers termes de ces différentes suites on forme une suite nouvelle

$$\rho^{h}, \rho^{mh}, \rho^{m^2h}, \rho^{m^3h}, \ldots$$

Cette nouvelle suite, dans laquelle les exposants de ρ forment une progression géométrique

$$h, mh, m^2h, m^3h, \ldots$$

offrira autant de racines primitives distinctes qu'il y aura d'unités dans l'exposant ι de la plus petite puissance de m propre à vérifier l'équivalence

$$m^{\iota} \equiv 1, \text{ (mod. } n). \tag{25}$$

En effet, la valeur de ι étant choisie comme on vient de le dire, et la progression géométrique étant réduite aux seuls termes

$$h, mh, m^2h, \ldots m^{\iota-1}h,$$

la différence entre deux termes de cette progression ne sera jamais divisible par n; et en conséquence les deux puissances de ρ, qui auront ces deux termes pour exposants, ne seront jamais égales entre elles. Donc alors les divers termes de la suite

$$\rho^{h}, \rho^{mh}, \rho^{m^2h}, \ldots \rho^{m^{\iota-1}h} \tag{26}$$

seront tous distincts les uns des autres.

Si n est un nombre premier impair ν, ou une puissance d'un tel nombre, tous les entiers premiers à n vérifieront l'équivalence

$$x^{\mathrm{N}} = 1 \tag{27}$$

la valeur de N étant donnée par la formule (12), ou

$$\mathrm{N} = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

Alors, si l'on prend pour m une racine primitive s de la formule (27), on trouvera

$$\iota = \mathrm{N},$$

et la suite (26) deviendra

$$\rho^{h},\ \rho^{sh},\ \rho^{s^2 h},\ \rho^{s^{\mathrm{N}-1}h}. \tag{28}$$

Cette suite se réduira même à

$$\rho,\ \rho^{s},\ \rho^{s^2},\ldots \rho^{s^{\mathrm{N}-1}}, \tag{29}$$

si l'on pose, comme on peut le faire, $h = 1$. D'ailleurs, N étant précisément le nombre des entiers

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

inférieurs à n et premiers à n, il en résulte que chacune des suites (28), (29) comprendra toutes les racines primitives de l'équation (1).

Si n se réduit à un nombre premier, alors, la valeur de N étant

$$\mathrm{N} = n - 1,$$

les suites (28), (29) deviendront

$$\rho^{h},\ \rho^{sh},\ \rho^{s^2 h},\ldots\ \rho^{s^{n-2}h}, \tag{30}$$

$$\rho,\ \ \rho^{s},\ \ \rho^{s^2},\ldots\ \ \rho^{s^{n-2}}, \tag{31}$$

et ces deux suites, dans lesquelles les exposants de ρ croissent en progression géométrique, offriront chacune, à l'ordre près, les mêmes termes que la suite

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1}$$

dans laquelle les exposants de ρ croissent en progression arithmétique.

NOTE VII.

SUR LES SOMMES ALTERNÉES DES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINÔMES, ET SUR LES FONCTIONS ALTERNÉES DE CES RACINES.

Soit toujours ρ une racine primitive de l'équation binôme

$$x^n = 1, \tag{1}$$

et

$$h, k, l, \ldots$$

les entiers inférieurs à n mais premiers à n, dont l'un se réduira simplement à l'unité. Les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées, soit par les termes de la suite

$$\rho^h, \rho^k, \rho^l, \ldots$$

soit par les termes de la suite

$$\rho^{mh},\ \rho^{mk},\ \rho^{ml}, \ldots$$

m étant un nombre quelconque premier à n. Or, on pourra généralement, comme on le verra ci-après, partager les entiers

$$h, k, l, \ldots$$

en deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots,$$

et par suite les racines primitives

$$\rho^h,\ \rho^k,\ \rho^l, \ldots$$

en deux groupes correspondants

$$\rho^h,\ \rho^{h'},\ \rho^{h''}, \ldots \quad \text{et} \quad \rho^k,\ \rho^{k'},\ \rho^{k''}, \ldots;$$

de telle sorte qu'après la substitution de ρ^m à ρ, les deux derniers groupes se trouvent encore composés chacun des mêmes racines, ou transformés l'un dans l'autre. Ainsi, par exemple, si l'on suppose $n = 5$, les quatre racines primitives de l'équation (1), ou

$$x^5 = 1,$$

formeront les deux groupes

$$\rho,\ \rho^4 \quad \text{et} \quad \rho^2,\ \rho^3,$$

qui deviendront respectivement, après la substitution de ρ^2 à ρ,

$$\rho^2,\ \rho^3 \quad \text{et} \quad \rho^4,\ \rho$$

après la substitution de ρ^3 à ρ,

$$\rho^3,\ \rho^2 \quad \text{et} \quad \rho,\ \rho^4,$$

enfin, après la substitution de ρ^4 à ρ,

$$\rho^4, \rho \quad \text{et} \quad \rho^3, \rho^2.$$

Or, il est clair que, dans le premier et dans le dernier cas, les deux groupes resteront composés chacun des mêmes racines, tandis que dans les deux cas précédents les racines du premier groupe se transformeront en celles qui composaient le second, et réciproquement.

Les racines primitives de l'équation (1) étant partagées en deux groupes, comme on vient de le dire, de telle sorte, qu'après la substitution de ρ^m à ρ, les deux groupes restent, pour certaines valeurs de m, composés chacun des mêmes racines, et se trouvent, pour d'autres valeurs de m, échangés entre eux; il est clair que le nombre des racines

$$\rho^h, \rho^{h'}, \rho^{h''}, \ldots$$

du premier groupe devra être égal au nombre des racines

$$\rho^k, \rho^{k'}, \rho^{k''}, \ldots$$

du second groupe. Donc, si l'on représente par N, comme nous l'avons fait dans la note précédente, le nombre total des racines primitives ou des entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n, on verra le nombre des entiers

$$h, h', h'', \ldots$$

ou de racines comprises dans le premier groupe, et le nombre des entiers

$$k, k', k'', \ldots$$

ou des racines comprises dans le second groupe, se réduire séparément à $\frac{N}{2}$; ce qui suppose N pair.

Cela posé, concevons que l'on ajoute les unes aux autres les diverses racines primitives de l'équation (1), prises avec le signe + ou avec le signe —, suivant qu'elles font partie de l'un ou de l'autre groupe. On obtiendra ainsi une somme algébrique dans laquelle on pourra faire succéder à chaque terme précédé du signe + un terme correspondant précédé du signe —. Cette somme algébrique pouvant être considérée en conséquence comme composée de termes alternativement positifs et négatifs, nous la désignerons sous le nom de *somme alternée*. Donc, si l'on pose

$$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots,$$

ϖ sera une somme alternée des racines primitives de l'équation (1). Lorsque, dans une semblable somme, on remplacera la racine primitive ρ par une autre racine primitive ρ^m, les différents termes se transformeront, au signe près, les uns dans les autres, et deux termes, qui se déduiront ainsi l'un de l'autre, se trouveront toujours affectés du même signe pour certaines valeurs de m, mais affectés de signes contraires pour d'autres valeurs de m; par conséquent la substitution de ρ^m à ρ laissera invariable la valeur de la somme, ou la fera seulement changer de signe. Supposons, pour fixer les idées, que des deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

le premier renferme l'exposant 1. Alors la substitution de ρ^m à ρ n'altérera point la valeur de la somme alternée ϖ, si l'on a pris pour m un des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

et la fera seulement changer de signe, si l'on a pris pour m un des nombres

$$k, k', k'', \ldots$$

Si, par exemple, on suppose $n = 5$, la somme alternée

$$\varpi = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3$$

changera de signe, quand on y remplacera ρ par ρ^2 ou par ρ^3, mais elle ne sera nullement altérée quand on y remplacera ρ par ρ^4.

Il est important d'observer que, dans le cas où la substitution de ρ^m à ρ laisse invariable la somme alternée ϖ, les termes

$$\rho^l \quad \text{et} \quad \rho^{ml},$$

par conséquent les termes

$$\rho^{ml} \quad \text{et} \quad \rho^{m^2 l}, \quad \text{etc...}$$

doivent se trouver affectés du même signe dans cette somme, l pouvant désigner ici l'un quelconque des nombres

$$h, h', h'', \ldots k, k', k'', \ldots,$$

c'est-à-dire l'un quelconque des nombres premiers à n. Donc, dans le cas dont il s'agit, le même signe doit affecter tous les termes de la suite

$$(3) \qquad \rho^l, \rho^{ml}, \rho^{m^2 l}, \ldots \rho^{m^{\iota-1} l},$$

ι étant l'exposant de la plus petite puissance de m propre à vérifier l'équivalence

$$(4) \qquad m^\iota \equiv 1, \ (\text{mod. } n).$$

Mais, si la substitution de ρ^m à ρ fait varier le signe de la somme alternée ϖ, alors les termes

$$\rho^l \quad \text{et} \quad \rho^{ml},$$

devront y être affectés de signes contraires, et l'on pourra en dire autant des termes

$$\rho^{ml} \quad \text{et} \quad \rho^{m^2 l}.$$

ou

$$\rho^{m^2 l} \quad \text{et} \quad \rho^{m^3 l}, \quad \text{etc.}\ldots$$

Donc alors chacun des termes de la suite (3) sera, dans la somme alternée ϖ, précédé du même signe que ρ^l ou d'un signe contraire, suivant que l'exposant de ρ contiendra comme facteur une puissance paire ou une puissance impaire de m. Dans tous les cas,

$$l \quad \text{et} \quad m$$

étant deux nombres premiers à n,

$$\rho^{m^2 l}$$

sera précédé du même signe que ρ^l. Donc, si l'on a pris l'unité pour l'un des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

ρ^{m^2} sera précédé du signe $+$, ainsi que ρ; et par conséquent le groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

renfermera tous ceux des nombres

$$h, k, l, \ldots$$

qui sont équivalents à des carrés

$$m^2, m'^2, \ldots$$

suivant le module n, c'est-à-dire, tous les résidus quadratiques relatifs à ce module.

Supposons maintenant que n soit un nombre premier impair, ou une puissance d'un tel nombre. Alors les entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, et premiers à n, vérifieront l'équivalence

$$(5) \qquad x^{N} \equiv 1, \ (\text{mod. } n),$$

les uns, dont le nombre sera $\frac{N}{2}$, étant résidus quadratiques suivant le module n, et racines de l'équivalence

$$(6) \qquad x^{\frac{N}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod. } n),$$

les autres, dont le nombre sera encore $\frac{N}{2}$, étant non résidus quadratiques, et racines de l'équivalence

$$(7) \qquad x^{\frac{N}{2}} \equiv -1, \ (\text{mod. } n).$$

D'ailleurs, si, dans la somme alternée $\mathcal{D}$, le terme ρ est précédé du signe $+$, on pourra en dire autant de toutes les puissances de ρ, qui offriront pour exposants des résidus quadratiques; et, comme le nombre de ces puissances sera précisément $\frac{N}{2}$, les autres puissances, qui auront pour exposants des non résidus quadratiques, devront toutes être affectées du signe $-$. Donc alors

$$h, h', h'', \ldots$$

devra représenter la suite des résidus quadratiques, et

$$k, k', k'', \ldots$$

la suite des non résidus. D'ailleurs, si l'on prend pour m une racine primitive s de l'équivalence (5), les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées par les divers termes de la suite

$$\rho,\ \rho^{s},\ \rho^{s^2},\ \rho^{s^{N-1}},$$

et, parmi les exposants de ρ dans cette suite, ceux qui représenteront des résidus quadratiques, relatifs au module n, seront les exposants carrés

$$1,\ s^2,\ s^4, \ldots\ s^{N-2}.$$

Donc, si le terme ρ se trouve précédé du signe $+$ dans la somme alternée Ⓓ, la valeur de cette somme, dans l'hypothèse admise, ne pourra être que la suivante

$$\text{Ⓓ} = \rho - \rho^{s} + \rho^{s^2} - \rho^{s^3} + \ldots - \rho^{s^{N-1}}. \tag{8}$$

Il est au reste facile de s'assurer que, dans le cas où n se réduit à un nombre premier impair ou à une puissance d'un tel nombre, le second nombre de la formule (8) représente effectivement une somme alternée des racines primitives

$$\rho,\ \rho^{s},\ \rho^{s^2}, \ldots\ \rho^{s^{N-1}}$$

de l'équation (1). Car, si, dans ce second nombre, on remplace ρ par ρ^{s}, chaque terme se trouvera remplacé par le suivant, pris en signe contraire, le dernier terme étant remplacé par $-\rho$. Or, de cette seule observation il résulte que le second membre de l'équation (8) restera composé des mêmes termes, tous ces termes étant pris avec des signes contraires à ceux dont ils étaient d'abord affectés, ou tous étant pris avec ces mêmes signes, si l'on y remplace la racine primitive ρ par l'une des autres racines primitives

$$\rho^s, \rho^{s^2}, \ldots, \rho^{s^{N-1}}$$

ce qui revient à remplacer une ou plusieurs fois de suite ρ par ρ^s.

Dans le cas particulier on n se réduit à un nombre premier impair, on a

$$N = n - 1,$$

et la formule (8) donne simplement

$$(9) \qquad \varpi = \rho - \rho^s + \rho^{s^2} - \rho^{s^3} + \ldots - \rho^{s^{n-2}},$$

s étant une racine primitive de l'équivalence

$$(10) \qquad x^{n-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } n).$$

Alors, aussi, en vertu de la formule (14) de la note 1[re], on aura

$$(11) \qquad (\rho - \rho^s + \rho^{s^2} - \rho^{s^3} + \ldots - \rho^{s^{n-2}})^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

par conséquent

$$(13) \qquad \varpi^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n.$$

Donc, n étant un nombre premier impair, on aura

$$(13) \qquad \varpi^2 = n, \quad \varpi = \pm \sqrt{n},$$

si ce nombre premier n est de la forme $4x + 1$, et l'on trouvera au contraire

$$(14) \qquad \varpi^2 = -n, \quad \varpi = \pm n^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}$$

si n est de la forme $4x + 3$.

Si l'on suppose, par exemple, $n = 3$, on trouvera

$$\varpi = \rho - \rho^2,$$

ρ, ρ^2 représentant les deux racines primitives de l'équation

$$x^3 - 1 = 0,$$

ou, ce qui revient au même, les deux racines de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Or, ces deux racines étant

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1},$$

il est clair qu'en supposant $n = 3$, on trouvera

$$\text{Ⓓ} = 3^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \text{Ⓓ} = -3^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1},$$

suivant que l'on prendra pour ρ première ou la seconde racine.

Lorsque, n étant une puissance entière d'un nombre premier impair ν, on aura

$$n = \nu^a,$$

et $a > 1$, alors, d'après ce qui a été dit ci-dessus, deux monômes de la forme

$$\rho^l, \quad \rho^{l'}$$

seront, dans la somme alternée Ⓓ, affectés du même signe, si les nombres l, l', premiers à n, vérifient la condition

$$l' \equiv m^2 l, \text{ (mod. } n)$$

m^2 étant un carré premier à n, ou, ce qui revient au même, si le rapport

$$\frac{l'}{l},$$

étant équivalent suivant le module n à un carré, vérifie par suite la formule

$$x^{\frac{N}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod. } n).$$

Or, c'est évidemment ce qui arrivera, si l'on a

(15) $$l' \equiv l, \ (\text{mod. } \nu).$$

Car, en élevant plusieurs fois de suite à la puissance ν les deux membres de la formule (15), on en tirera successivement

$$\begin{aligned}
l'^{\nu} &\equiv l^{\nu}, && (\text{mod. } \nu^2);\\
l'^{\nu^2} &\equiv l^{\nu^2}, && (\text{mod. } \nu^3);\\
&\text{etc...}\\
l'^{\nu^{a-1}} &\equiv l^{\nu^{a-1}}, && (\text{mod. } \nu^a);
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\left(\frac{l'}{l}\right)^{\nu^{a-1}} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu^a);$$

puis, en élevant les deux membres de cette dernière formule à la puissance entière $\frac{\nu - 1}{2}$, et ayant égard aux équations

$$\nu^a = n, \quad \nu^{a-1}\frac{\nu - 1}{2} = \frac{N}{2},$$

on trouvera définitivement

$$\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{N}{2}} \equiv 1, \ (\text{mod. } \nu).$$

Donc, lorsque n représente le carré, le cube, ou une puissance plus élevée d'un nombre premier impair ν, le même signe doit affecter, dans la somme alternée $\circledS$, toutes les puissances de ρ dont les exposants sont équivalents, suivant le module ν, à un même nombre l; par conséquent le même signe doit affecter, dans la somme alternée ϖ, tous les termes de la suite

$$\rho^l,\ \rho^{l+\nu},\ \rho^{l+2\nu}, \ldots \rho^{l+n-\nu}.$$

Or, la somme de ces derniers termes, savoir,

$$\rho^l + \rho^{l+\nu} + \rho^{l+2\nu} + \ldots + \rho^{l+n-\nu} = \rho^l \frac{1-\rho^n}{1-\rho^\nu},$$

étant nulle avec les différences $1-\rho^n$, il est clair que, dans le cas dont il s'agit, la somme alternée ϖ se composera de diverses parties séparément égales à zéro. Donc, la somme ϖ s'évanouira elle-même; et, lorsque n sera le carré, le cube ou une puissance plus élevée d'un nombre premier impair, on aura toujours

$$(16) \qquad \varpi = 0.$$

Si n se réduisait au nombre 2, l'équation binôme

$$x^2 = 1$$

n'offrirait qu'une seule racine primitive

$$\rho = -1,$$

avec laquelle on ne pourrait composer une somme alternée. C'est au reste le seul cas où la formation d'une somme alternée des racines primitives devienne impossible, et où le nombre N cesse d'être pair, en se réduisant à l'unité.

Il n'en sera plus de même si l'on prend pour n une puissance de 2. Concevons qu'alors on réduise toujours l'un des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

à l'unité. Si, pour fixer les idées, on suppose $n=4$, on trouvera

$$h = 1, \quad k = 3,$$

et

(17) $$\varpi = \rho - \rho^3$$

sera une somme alternée des racines primitives de l'équation

$$x^4 = 1.$$

Cette même somme, égale à

$$2\rho = \pm 2\sqrt{-1},$$

vérifiera d'ailleurs la formule

(18) $$\varpi^2 = -4.$$

Si l'on suppose $n = 8$, on pourra prendre

$$h = 1, \quad h' = 3, \quad k = 5, \quad k' = 7$$

ou bien

$$h = 1, \quad h' = 5, \quad k = 3, \quad k' = 7,$$

ou bien

$$h = 1, \quad h' = 7, \quad k = 3, \quad k' = 5,$$

et obtenir ainsi trois sommes alternées des racines primitives de l'équation

$$x^8 = 1.$$

De ces trois sommes la première, savoir,

(19) $$\varpi = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7$$

vérifiera la formule

(20) $$\varpi^2 = -8;$$

la seconde, savoir,

(21) $$\varpi = \rho + \rho^5 - \rho^3 - \rho^7$$

se réduira simplement à

$$\varpi = 0; \tag{22}$$

et la troisième, savoir,

$$\varpi = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5 \tag{23}$$

vérifiera la formule

$$\varpi = 8. \tag{24}$$

Enfin, si n est une puissance de 2, supérieure à la troisième, alors en posant

$$l' = l + \frac{n}{2}, \tag{25}$$

et choisissant le nombre entier d de manière à vérifier la formule

$$ld \equiv 1, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{l} \equiv d, \ (\text{mod. } n)$$

on trouvera

$$\frac{l'}{l} = 1 + \frac{n}{2l} \equiv 1 + \frac{n}{2} d, \ (\text{mod. } n)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{l'}{l} \equiv \left(1 + \frac{n}{4} d\right)^2, \ (\text{mod. } n),$$

attendu que, n étant divisible par 16,

$$\left(\frac{n}{4} d\right)^2 = \frac{n}{16} nd^2$$

sera divisible par n. Donc alors la valeur de l', déterminée par l'équation (25), sera équivalente, suivant le module n, à un produit de la forme

$$\left(1 + \frac{n}{4} d\right)^2 l \quad \text{ou} \quad m^2 l$$

m étant premier à n, c'est-à-dire, impair; et les termes

$$\rho, \quad \rho'' = \rho^{l+\frac{n}{2}}$$

seront généralement affectés de signes contraires dans une somme alternée $\mathfrak{D}$ des racines primitives de l'équation (1). D'autre part, puisque, pour des valeurs paires de n, l'équation (1) se décompose en deux autres, savoir

$$(26) \qquad x^{\frac{n}{2}} = 1, \qquad\qquad (27) \qquad x^{\frac{n}{2}} = -1,$$

et qu'une racine primitive ρ de l'équation (1) ne peut vérifier l'équation (26), on aura nécessairement

$$\rho^{\frac{n}{2}} = -1, \quad \text{et} \quad \rho'' = -\rho',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\rho' + \rho'' = 0.$$

Donc, si n est une puissance de 2 supérieure à la troisième, une somme alternée $\mathfrak{D}$ des racines primitives de l'équation (1) sera composée de telle manière, que les termes affectés du même signe se détruiront deux à deux, en fournissant des sommes partielles égales à zéro. Donc alors, la somme $\mathfrak{D}$ sera nulle elle même, et l'on aura

$$\mathfrak{D} = 0.$$

En résumé, si n est un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre, la somme alternée $\mathfrak{D}$ sera nulle, à moins que n ne se réduise à 4 ou à 8, ou à un nombre premier impair.

D'ailleurs, lorsque $\mathfrak{D}$ ne sera pas nul, on aura toujours

$$\mathfrak{D}^2 = \pm n,$$

savoir

$$(28) \qquad \varpi^2 = n,$$

si n est de la forme $4x+1$;

$$(29) \qquad \varpi = -n$$

si n est égal à 4, ou de la forme $4x+3$; enfin, si n est égal à 8,

$$(30) \qquad \varpi^2 = n, \quad \text{ou} \quad \varpi^2 = -n$$

suivant que l'on placera dans le même groupe les deux nombres 1 et 3, ou 1 et 7.

Concevons maintenant que, n étant un nombre entier quelconque, l'on pose

$$(31) \qquad n = \nu^a \nu'^b \nu''^c \ldots$$

$\nu, \nu', \nu'' \ldots$ étant les facteurs premiers de n, dont l'un pourra se réduire à 2. Alors, comme on l'a vu dans la note précédente, une racine primitive

$$\rho$$

de l'équation (1) sera le produit de racines primitives

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \ldots$$

propres à vérifier respectivement les diverses équations

$$(32) \qquad x^{\nu^a} = 1, \quad x^{\nu'^b} = 1, \quad x^{\nu''^c} = 1, \quad \text{etc...}$$

Alors aussi on obtiendra les diverses valeurs de ρ, et on les obtiendra chacune d'une seule manière, si dans le second membre de la formule

$$(33) \qquad \rho = \xi\eta\zeta\ldots$$

on substitue successivement les divers systèmes de valeurs de

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ldots$$

combinées entre elles de toutes les manières possibles. D'ailleurs, ξ étant une des racines primitives de l'équation

$$x^{\nu^a} = 1,$$

chacune des autres racines primitives de la même équation sera de la forme

$$\xi^l,$$

l étant un nombre entier premier à ν. Pareillement, η étant une racine primitive de l'équation

$$x^{\nu'^b} = 1,$$

chacune des autres racines primitives de la même équation sera de la forme

$$\eta^{l'},$$

l' étant un nombre entier, premier à ν', etc... Donc, si l'on désigne, comme ci-dessus, par

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\ldots$$

certaines racines primitives, propres à vérifier respectivement les équations

$$x^{\nu^a} = 1,\quad x^{\nu'^b} = 1,\quad x^{\nu''^c} = 1,\quad \text{etc}\ldots,$$

les diverses racines primitives de l'équation (1) se trouveront représentées par des produits de la forme

$$\xi^l \eta^{l'} \zeta^{l''}\ldots,$$

l étant premier à ν, l' à ν', l'' à ν''... Cela posé, considérons une somme alternée $\mathfrak{S}$ des racines primitives de l'équation (1). Comme les différents termes de la somme $\mathfrak{S}$ se réduiront à de semblables produits, pris, les uns avec le signe $+$, les autres avec le signe $-$, cette somme sera évidemment une fonction entière de chacune des racines primitives

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta,\ldots$$

On arriverait, au reste, à la même conclusion, en partant de la formule (33). En effet, la valeur de ρ, que détermine cette formule, étant une racine primitive de l'équation (1), la somme alternée $\mathfrak{S}$ sera nécessairement une fonction entière de ρ, et par suite une fonction entière de ξ, de η, de ζ,... Or, concevons que, dans cette fonction, l'on écrive à la place de ξ, une autre racine primitive de la première des équations (32). La somme alternée $\mathfrak{S}$ devra rester composée des mêmes termes, tous étant pris avec les signes qui les affectaient d'abord, ou tous étant pris avec des signes contraires. Donc, chaque somme partielle de termes qui ne différeront les uns des autres que par la valeur de ξ, et par suite la somme $\mathfrak{S}$ elle-même, seront proportionnelles à la somme de toutes les valeurs de ξ, ou à une somme alternée de ces valeurs. On prouvera pareillement que $\mathfrak{S}$ est proportionnel à la somme des valeurs de η, ou à une somme alternée de ces valeurs, à la somme des valeurs de ζ, ou à une somme alternée de ces valeurs... Donc la somme alternée $\mathfrak{S}$ renfermera, comme facteur, ou la somme ou une somme alternée des racines primitives de chacune des équations (32); et sera proportionnelle au produit de divers facteurs de cette nature, correspondants à ces diverses équations. D'ailleurs, si l'on développe le produit dont il est ici question, le développement offrira, au signe près, chacun des termes que renferme la somme alternée ϖ, et deux termes devront encore être affectés du même signe ou de signes contraires dans le produit, suivant qu'ils seront affectés du même signe ou de signes contraires dans la somme ϖ. Donc la somme alternée ϖ sera égale au produit obtenu, comme on vient de le dire, ou à ce produit pris en signe contraire.

Réciproquement, si l'on forme un produit dont les divers facteurs, correspondants aux diverses équations (32), représentent chacun la somme des racines primitives de l'une de ces équations, ou une somme alternée de ces racines, il est clair que ce produit développé sera composé de termes égaux, au signe près, aux diverses racines primitives de l'équation (1), et pourra être considéré comme une fonction entière, non-seulement d'une racine primitive ρ de l'équation (1), mais encore de certaines racines primitives

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \ldots,$$

propres à vérifier respectivement les équations (32). D'ailleurs, dans ce produit, on verra évidemment reparaître les mêmes termes, tous pris avec des signes contraires à ceux dont ils étaient d'abord affectés, ou tous pris avec les mêmes signes, quand on y remplacera la racine primitive ξ par une autre racine primitive de l'équation

$$x^{\nu^a} = 1,$$

ou la racine primitive η par une autre racine primitive de l'équation

$$x^{\nu'^b} = 1,$$

etc..., par conséquent aussi, quand on effectuera simultanément plusieurs remplacements de ce genre, ce qui revient à remplacer la racine primitive

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots$$

de l'équation (1), par une autre racine primitive de la même équation. Donc le produit, formé comme nous l'avons dit, ne pourra être qu'une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1), dans le cas où il ne se réduirait pas à une fonction symétrique de ces racines.

Il est bon d'observer que la somme des racines primitives de l'équation

$$x^{\nu^a} = 1,$$

étant égale à -1, a pour carré l'unité, et que la somme alternée de ces racines primitives, quand elle ne s'évanouit pas, offre pour carré $\pm\nu^a$. Une pareille observation pouvant être appliquée à chacune des équations (32), le produit de plusieurs facteurs, dont chacun sera, ou la somme, ou une somme alternée des racines primitives de l'une de ces équations, devra toujours, quand il ne s'évanouira pas, offrir un carré qui soit égal, abstraction faite du signe, au produit des nombres

$$\nu^a, \quad \nu'^b, \quad \nu''^c, \ldots,$$

ou de plusieurs d'entre eux, par conséquent à n, ou à un diviseur de n. D'ailleurs, comme nous l'avons prouvé, le premier de ces deux produits peut représenter une somme alternée quelconque ω des racines primitives de l'équation (1). Donc, si une semblable somme ne s'évanouit pas, elle offrira pour carré $\pm n$, ou un diviseur de $\pm n$.

Observons encore que l'on aura toujours, ou

$$(34) \qquad \omega = 0,$$

ou

(35) $$\text{ⓓ}^2 = \pm n,$$

si chacun des facteurs du produit qui représente ⓓ est une somme alternée. Au contraire, si l'un de ces facteurs est la somme des racines primitives de l'une des équations (32), ⓓ^2, en cessant d'être nul, sera généralement de la forme

(36) $$\text{ⓓ}^2 = \pm \omega,$$

ω étant un diviseur de n. Alors aussi, ⓓ, considéré comme fonction des racines primitives des équations (32) sera, pour une ou pour plusieurs des équations dont il s'agit, fonction symétrique de ces racines.

Pour que l'on trouve en particulier

$$\text{ⓓ}^2 = \pm n,$$

il sera nécessaire que, dans le produit propre à représenter ⓓ, chaque facteur se réduise à une somme alternée différente de zéro. C'est ce qui arrivera, lorsque, dans le nombre composé n, les facteurs premiers impairs seront inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant précisément 4 ou 8.

Soit maintenant

$$f(\rho)$$

une fonction entière de la racine primitive ρ de l'équation (1). On pourra, dans cette fonction, réduire l'exposant de chaque puissance de ρ à un nombre entier plus petit que n, et poser en conséquence

(37) $$f(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots + a_{n-1}\rho^{n-1},$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ désignant des coefficients indépendants de ρ.

Supposons d'ailleurs que, dans le cas où l'on remplace la racine primitive ρ de l'équation (1) par une autre racine primitive ρ^m de la même équation, les différents termes contenus dans $f(\rho)$ se transforment, au signe près, les uns dans les autres, et que deux termes, qui se déduisent ainsi l'un de l'autre, se trouvent toujours affectés du même signe pour certaines valeurs

$$h,\ h',\ h'',\ldots$$

du nombre m, mais affectés de signes contraires pour d'autres valeurs

$$k,\ k',\ k'',\ldots$$

du même nombre; en sorte que, sous ce point de vue, les entiers

$$h,\ k,\ l,\ldots$$

inférieurs à n et premiers à n, se partagent en deux groupes

$$h,\ h',\ h'',\ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'',\ldots$$

Alors, dans $f(\rho)$, les coefficients a_0 s'évanouiront nécessairement, et $f(\rho)$ sera une fonction linéaire de chacune de sommes algébriques

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} \rho^{h} + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots \quad - \rho^{k} - \rho^{k'} + \rho^{k''} - \ldots, \\ \rho^{2h} + \rho^{2h'} + \rho^{2h''} + \ldots \quad - \rho^{2k} - \rho^{2k'} + \rho^{2k''} - \ldots, \\ \rho^{3h} + \rho^{3h'} + \rho^{3h''} + \ldots \quad - \rho^{3k} - \rho^{3k'} + \rho^{3k''} - \ldots, \\ \text{etc}\ldots \end{array}\right.$$

chacune d'elles étant censée ne renfermer que des termes distincts les uns des autres. Sous cette condition, les sommes algébriques dont il s'agit se réduiront toujours, ou, comme la première, à une somme alternée des racines primitives de l'équation (1), ou du moins à des sommes alternées des racines primitives d'équations de la forme

$$(39) \qquad x^{\omega} = 1,$$

les exposants ou les valeurs de ω étant des diviseurs de n. Cela posé, dans la fonction $f(\rho)$, aussi bien que dans chaque somme alternée, les termes précédés du signe $+$ seront évidemment en même nombre que des termes précédés du signe $-$; et, si à un terme que précède le signe $+$ on fait succéder un terme correspondant que précède le signe $-$, on pourra obtenir, pour représenter la fonction, une suite de termes alternativement positifs et négatifs. Pour cette raison, nous désignerons sous le nom de *fonction alternée* la fonction $f(\rho)$, formée comme il a été dit ci-dessus. Il est clair qu'une semblable fonction pourra seulement acquérir deux formes distinctes, et deux valeurs égales au signe près, mais affectées de signes contraires, si l'on y remplace une racine primitive ρ de l'équation (1) par une autre racine primitive ρ^m de la même équation. Ajoutons qu'en vertu des relations établies par la formule (33) entre les racines primitives de l'équation (1) et celles des équations (32), toute fonction alternée des racines primitives de l'équation (1) sera en même temps, ou une fonction alternée, ou une fonction symétrique des racines primitives de chacune des équations (32). Il sera maintenant facile de trouver la forme la plus simple à laquelle se réduise, pour une valeur donnée de n, une fonction alternée $f(\rho)$ des racines primitives de l'équation (1); surtout, lorsque n représentera un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Supposons d'abord que le nombre n se réduise à un nombre premier impair ν, ou à une puissance de ce nombre premier, en sorte qu'on ait

$$n = \nu^a,$$

l'exposant a pouvant se réduire à l'unité. Les divers diviseurs du nombre n, y compris ce nombre lui-même, ou les diverses valeurs que pourra prendre l'exposant ω dans la formule (39), seront respectivement

$$\nu,\ \nu^2,\ \nu^3, \ldots \nu^{a-1},\ \nu^a;$$

et les sommes alternées des racines primitives de l'équation (38), qui correspondront à ces diverses valeurs de ω, seront toutes nulles, à l'exception d'une seule, que nous désignerons par Δ, et à laquelle la fonction $f(\rho)$ deviendra proportionnelle; en sorte qu'on aura

$$f(\rho) = a\Delta, \tag{40}$$

a étant indépendant de ρ. La somme Δ dont il s'agit sera d'ailleurs la somme alternée des racines primitives de l'équation

$$x^\nu = 1.$$

qu'on obtient en posant, dans l'équation (39), $\omega = \nu$.

Supposons en second lieu que le nombre n se réduise à une puissance

$$2^a$$

du nombre 2. Alors, pour que l'on puisse former avec les racines de l'équation (1) une fonction alternée, il sera nécessaire que cette équation offre plus d'une racine primitive et que l'on ait en conséquence

$$a > 1.$$

Cela posé, n pourra être l'un quelconque des termes de la progression géométrique

$$4,\ 8,\ 16, \ldots;$$

et, les valeurs de ω, dans l'équation (39), devant aussi se réduire à des termes de cette progression, la somme des racines primitives de l'équation (39) ne pourra cesser de s'évanouir que lorsqu'on prendra

$$\omega = 4 \quad \text{ou} \quad \omega = 8.$$

Donc alors une fonction alternée $f(\rho)$ des racines primitives de l'équation (1) renfermera tout au plus deux termes qui ne s'évanouiront pas, ces deux termes étant proportionnels, le premier à une fonction alternée des racines primitives de l'équation

$$(41) \qquad x^4 = 1,$$

le second à une fonction alternée des racines primitives de l'équation

$$(42) \qquad x^8 = 1.$$

Or, évidemment de ces deux termes le premier subsistera seul, si l'on a $n = 4$, et alors la fonction alternée $f(\rho)$ sera encore de la forme indiquée par l'équation (40), la valeur de Δ étant

$$\Delta = \rho - \rho^3 = \pm 2\sqrt{-1}.$$

Si n devient égal à 8, on aura trois cas à considérer, suivant que le second terme deviendra proportionnel à l'une ou à l'autre des trois sommes alternées

$$(43)\quad \rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7,\quad \rho+\rho^5-\rho^3-\rho^7=0,\quad \rho+\rho^7-\rho^3-\rho^5.$$

Or, quand on fait successivement coïncider avec chacune de ces trois sommes la première des expressions (38), savoir

$$\rho^h+\rho^{h'}+\ldots-\rho^k+\rho^k-\ldots,$$

on trouve que les valeurs correspondantes de la seconde expression

$$\rho^{2h}+\ldots-\rho^{2k}-\ldots$$

réduite à ne contenir que des puissances de ρ non équivalentes entre elles, deviennent respectivement

$$(44)\qquad 0,\quad \rho^2-\rho^6=\pm 2\sqrt{-1},\quad 0.$$

Donc, n étant égal à 8, le second des termes dont nous avons parlé disparaît lorsque le premier subsiste, et réciproquement; en sorte que, dans ce cas encore, la fonction $f(\rho)$ est de la forme indiquée par l'équation (40), ρ désignant une somme alternée des racines primitives ou de l'équation (41) ou de l'équation (42).

Au reste, ces conclusions doivent être étendues au cas même où n, étant une puissance de 2, deviendrait supérieur à 8, puisqu'alors la fonction $f(\rho)$, dans laquelle tous les termes disparaîtraient, à l'exception des deux termes ci-dessus mentionnés, pourrait encore être considérée comme une fonction alternée des racines primitives de l'équation (42).

Revenons à des valeurs quelconques de n, et posons de nouveau

$$n=\nu^a\nu'^b\nu''^c\ldots$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ désignant les facteurs premiers de n, dont l'un pourra se réduire à 2. Comme nous l'avons déjà dit, une fonction alternée $f(\rho)$ des racines primitives de l'équation (1) sera en même temps ou une fonction symétrique, ou une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (32). Occupons-nous d'ailleurs spécialement du cas où $f(\rho)$, considéré comme fonction des racines primitives de l'une quelconque des équations (32), est toujours une fonction alternée, jamais une fonction symétrique de ces racines; ce qui suppose n impair ou divisible plusieurs fois par le facteur 2. Dans ce cas spécial, d'après ce qu'on a vu tout à l'heure, ou la fonction $f(\rho)$ s'évanouira, ou elle deviendra simultanément proportionnelle à divers facteurs

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$$

qui représenteront des sommes alternées, respectivement formées avec les racines primitives des équations

$$(45) \qquad x^{\nu} = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1, \ldots$$

si les facteurs premiers

$$\nu, \nu', \nu'', \ldots$$

sont tous des nombres impairs. Donc alors $f(\rho)$ sera proportionnel au produit

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$$

qui représentera une somme alternée des racines primitives de l'équation

$$(46) \qquad x^{\nu\nu'\nu''\ldots} = 1$$

ou

$$(47) \qquad x^{\omega} = 1,$$

la valeur de ω étant

$$(48) \qquad \omega = \nu\nu'\nu''\ldots,$$

et l'on aura en conséquence

$$(49) \qquad f(\rho) = a\Delta\Delta'\Delta''\ldots$$

a désignant dans $f(\rho)$ le coefficient d'une racine primitive de l'équation (46). Si, parmi les facteurs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

le premier ν se réduisait à 2, on devrait remplacer la première des équations (45), par l'équation (41) ou (42); et par suite on devrait, dans la formule (49), prendra pour Δ une somme alternée des racines primitives de l'une des équations

$$(50) \qquad x^4 = 1, \quad x^8 = 1.$$

Alors le produit

$$\Delta\Delta'\Delta''\ldots,$$

serait une somme alternée des racines primitives de l'équation (47), la valeur de ω étant donnée non plus par la formule (48), mais par l'une des deux suivantes

$$(51) \qquad \omega = 4\nu'\nu''\ldots, \quad \omega = 8\nu'\nu''\ldots$$

D'ailleurs, en supposant n impair avec chacun des facteurs

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

on trouvera

$$(52) \quad \Delta^2 = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\nu, \quad \Delta'^2 = (-1)^{\frac{\nu'-1}{2}}\nu, \quad \Delta''^2 = (-1)^{\frac{\nu''-1}{2}}\nu'',\ldots$$

et par suite

$$(53) \qquad \Delta^2\Delta'^2\Delta''^2\ldots = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}+\frac{\nu'-1}{2}+\frac{\nu''-1}{2}+\ldots}\nu\nu'\nu''\ldots,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(54)\qquad \Delta^2\Delta'^2\Delta''^2\ldots=(-1)^{\frac{\omega-1}{2}}\omega=\pm\omega$$

la valeur de ω étant donnée par la formule (48). Si au contraire on suppose $\nu=2$, n étant divisible par 4 ou par 8, la première des formules (52) se trouvera remplacée par l'une des équations

$$(55)\qquad \Delta^2=-4,\quad \Delta^2=\pm 8,$$

et la formule (53) par l'une des équations

$$(56)\qquad \Delta^2\Delta'^2\Delta''^2\ldots=\pm 4\nu'\nu''\ldots,\quad \Delta^2\Delta'^2\Delta''^2\ldots=\pm 8\nu'\nu''\ldots;$$

par conséquent on aura encore

$$(57)\qquad \Delta^2\Delta'^2\Delta''^2\ldots=\pm\omega,$$

la valeur de ω étant donnée, non plus par la formule (48), mais par l'une des formules (51). Dans l'une et l'autre hypothèse, on tirera de la formule (49)

$$(58)\qquad [f(\rho)]^2=\pm\omega a^2.$$

L'équation (58) se réduira simplement à

$$(59)\qquad [f(\rho)]^2=\pm n a^2,$$

si l'on a

$$(60)\qquad \omega=n.$$

Or, pour que le nombre ω, déterminé par la formule (48), ou par l'une des formules (51), devienne précisément égal à n, il est nécessaire que les facteurs premiers et impairs de n soient inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant 4 ou 8.

L'équation (59) se réduira en particulier à

$$[f(\rho)]^2 = na^2, \tag{61}$$

si, les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux, ce nombre est de l'une des formes

$$4x+1, \quad 4(4x+3),$$

ou bien encore de l'une des formes

$$8(4x+1), \quad 8(4x+3),$$

pourvu toutefois que, dans ce dernier cas, on place dans le même groupe ceux des entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n, qui, divisés par 8, donnent pour restes 1 et 7, quand $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x+1$, et ceux qui, divisés par 8, donnent pour restes 1 et 3, quand $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x+3$.

Enfin l'équation (59) se trouvera réduite à

$$[f(\rho)]^2 = -na^2, \tag{62}$$

si, les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux, ce nombre est de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1).$$

ou bien encore de l'une des formes

$$8(4x+1), \quad 8(4x+3),$$

pourvu toutefois que, dans ce dernier cas, on placee dans le même groupe ceux des entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n, qui, divisés par 8, donnent pour restes 1 et 3, quand $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x + 1$, et ceux qui donnent pour restes 1 et 7, quand $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x + 3$.

Nous observerons en finissant que, dans le cas où l'on a $n = \omega$, et où la formule (58) se réduit à la formule (59), le produit

$$\Delta\Delta'\Delta''\ldots,$$

renfermé dans le second membre de la formule (49), se réduit à une somme alternée ϖ des racines primitives de l'équation (1). Donc alors la formule (49) pourra s'écrire comme il suit

$$\mathrm{f}(\rho) = \mathrm{a}\varpi. \tag{63}$$

Or, en élevant au carré chaque membre de cette dernière formule, et ayant égard à l'équation (35), on retrouvera, comme on devait s'y attendre, l'équation (59).

NOTE VIII.

Propriétés des nombres qui, dans une somme alternée des racines primitives d'une équation binôme, servent d'exposants aux diverses puissances de l'une de ces racines.

Soient, comme dans la note précédente

n un nombre entier quelconque,
$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n, et premiers à n,
N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$
ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1, \tag{1}$$

et

$$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots \tag{2}$$

une somme alternée des racines primitives de cette équation, les entiers

$$h, k, l, \ldots$$

étant partagés en deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

de telle manière qu'un changement opéré dans la valeur de la racine primitive ρ puisse produire un changement de signe dans la somme ϖ, sans avoir jamais d'autre effet sur cette même somme. Enfin supposons, pour plus de commodité, que le nombre 1 fasse partie du groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

Si le nombre n est premier, il sera en même temps impair, et l'on aura

$$\mathrm{N} = n - 1.$$

Alors aussi, d'après ce qui a été dit dans la note précédente, les nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

seront résidus quadratiques suivant le module n, et racines de l'équation

$$x^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1, \ (\mathrm{mod.}\ n) \tag{3}$$

en sorte que chacun d'eux vérifiera la condition

$$\left[\frac{h}{n}\right] = 1. \tag{4}$$

Au contraire les nombres

$$k, k', k'', \ldots$$

seront non résidus quadratiques suivant le module n, et racines de l'équivalence

$$x^{\frac{n-1}{2}} \equiv -1, \ (\mathrm{mod.}\ n), \tag{5}$$

en sorte que chacun d'eux vérifiera la condition

$$\left[\frac{k}{n}\right] = -1. \tag{6}$$

D'ailleurs, pour chacune des équations

$$x^{\frac{n-1}{2}} = 1, \quad x^{\frac{n-1}{2}} = -1,$$

la somme des racines se réduira toujours à zéro, lorsque $\frac{n-1}{2}$ sera un nombre entier supérieur à l'unité; et par conséquent, pour chacune des formules (3), (5), la somme des racines sera équivalente à zéro, suivant le module n, lorsqu'on aura

$$\frac{n-1}{2} > 1, \quad n > 3.$$

Donc, n étant un nombre premier supérieur à 3, on aura toujours

$$h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0. \tag{7}$$

La formule (7) comprend évidemment un théorème que l'on peut énoncer comme il suit.

Premier théorème. n étant un nombre premier supérieur à 3, si, parmi les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, on distingue les résidus quadratiques

$$h, h', h'', \ldots$$

et les non résidus quadratiques

$$k, k', k'', \ldots,$$

la somme $h + h' + h'' + \ldots$ des résidus, et la somme $k + k' + k'' + \ldots$ des non résidus seront l'une et l'autre divisibles par n.

Ainsi, en particulier, on trouvera, pour $n = 5$,

$$h = 1, \quad h' = 4, \quad h + h' = 5 \equiv 0, (\text{mod. } 5),$$
$$k = 2, \quad k' = 3, \quad k + k' = 5 \equiv 0, (\text{mod. } 5),$$

pour $n = 7$

$$h = 3, \quad h' = 2, \quad h'' = 4, \quad h + h + h'' = 7 \equiv 0, (\text{mod. } 7)$$
$$k = 1, \quad k' = 5, \quad k'' = 6, \quad k + k + k'' = 14 \equiv 0, (\text{mod. } 7)$$

etc. Mais, si l'on prend

$$n = 3,$$

on aura

$$h = 1, \quad k = 2,$$

et la condition (7), qui cessera d'être vérifiée, se trouvera remplacée par la suivante

$$h \equiv -k \equiv 1, \text{ (mod. 3)}.$$

On pourrait démontrer encore le premier théorème comme il suit.

n étant un nombre premier impair, nommons s une racine primitive de l'équivalence

$$x^{n-1} \equiv 1, \text{ (mod. } n).$$

Les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, seront équivalents aux diverses puissances de s d'un degré plus petit que $n-1$, savoir, les résidus quadratiques aux puissances paires

$$1, s^2, s^4, \ldots s^{n-3}$$

et les non résidus aux puissances impaires

$$s, s^3, s^5, \ldots s^{n-2}.$$

On trouvera par suite

$$h + h' + h'' + \ldots \equiv s + s^2 + s^4 + \ldots s^{n-3} \equiv \frac{s^{n-1}-1}{s^2-1} \equiv 0, \text{ (mod. } n)$$

$$k + k' + k'' + \ldots \equiv s + s^3 + s^5 + \ldots s^{n-2} \equiv \frac{s^{n-1}-1}{s^2-1} \equiv 0, \text{ (mod. } n),$$

excepté dans le cas ou, n étant égal à 3, on aurait, non-seulement

$$s^{n-1} \equiv 1, (\text{mod. } n)$$

mais encore $n - 1 = 2$, et par conséquent

$$s^2 \equiv 1, (\text{mod. } n).$$

Supposons maintenant que n devienne une puissance d'un nombre premier impair ν, en sorte qu'on ait

$$n = \nu^a.$$

Alors on trouvera

$$N = \nu^{a-1}(\nu - 1) = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

Alors aussi

$$h, h', h'', \ldots$$

seront résidus quadratiques suivant le module n, et racines de l'équivalence

$$(8) \qquad x^{\frac{N}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } n),$$

tandis que

$$k, k', k'', \ldots$$

seront non résidus suivant le module n, et racines de l'équivalence

$$(9) \qquad x^{\frac{N}{2}} \equiv -1, (\text{mod. } n).$$

Donc, si, en nommant l un nombre entier premier à n, on désigne par

$$\left[\frac{l}{n}\right]$$

le reste $+1$ ou -1, qu'on obtient en divisant par n la puissance

$$l^{\frac{N}{2}},$$

chacun des nombres $h, h', h'' \dots$ vérifiera encore la condition (4), et chacun des nombres $k, k', k'', \dots$ la condition (6). D'autre part, chacun des groupes

$$h,\ h',\ h'',\dots$$
$$k,\ k',\ k'',\dots$$

pouvant être décomposé (page 536) en plusieurs suites de termes de la forme

$$l,\ l+\nu,\ l+2\nu,\dots\ l+n-\nu,$$

et la somme de ces derniers termes étant égale à

$$\frac{n}{\nu}\left(l+\frac{n-\nu}{2}\right)$$

par conséquent divisible par $\nu^{a-1}=\frac{n}{\nu}$, il est clair que, dans l'hypothèse admise, la formule (7) pourra être remplacée par la suivante :

$$(10)\quad h+h'+h''+\dots\equiv k+k'+k''+\dots\equiv 0,\ \left(\text{mod. } \nu^{a-1}=\frac{n}{\nu}\right).$$

Ainsi, en particulier, on trouvera pour $n=9=3^2$,

$$h=1,\quad h'=4,\quad h''=7,\quad h+h'+h''=12\equiv 0,\ (\text{mod. } 3)$$
$$k=2,\quad k'=5,\quad k''=8,\quad k+k'+k''=15\equiv 0,\ (\text{mod. } 3).$$

La formule (11) renferme un théorème qu'on peut énoncer comme il suit :

Deuxième théorème. ν étant un nombre premier impair, et $n=\nu^a$ une puissance de ν, dont le degré surpasse l'unité, si parmi les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, on distingue les résidus quadratiques

$$h,\ h',\ h'',\dots$$

et les non-résidus

$$k,\ k',\ k'',\dots$$

la somme $h + h' + h'' + \dots$ des résidus, et la somme $k + k' + k'' + \dots$ des non-résidus seront, l'une et l'autre, divisibles par ν^{a-1} ou, ce qui revient au même, par $\frac{n}{\nu}$.

Au reste, on pourrait encore établir le deuxième théorème de la manière suivante :

Si, en supposant

$$n = \nu^a \quad \text{et} \quad N = \nu^{a-1}(\nu - 1),$$

on nomme s une racine primitive de l'équivalence

$$x^N \equiv 1, \ (\text{mod.}\, n)$$

on trouvera, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons précédemment fait usage,

$$h + h' + h'' + \dots \equiv 1 + s^2 + s^4 + \dots + s^{N-2} \equiv \frac{s^N - 1}{s^2 - 1}, \ (\text{mod.}\ n),$$

$$k + k' + k'' + \dots \equiv s + s^3 + s^5 + \dots + s^{N-1} \equiv s\,\frac{s^N - 1}{s^2 - 1}, \ (\text{mod.}\ n),$$

et par suite

$$(s^2 - 1)(h + h' + h'' + \dots) \equiv s^N - 1 \equiv 0, \ (\text{mod.}\ n),$$
$$(s^2 - 1)(k + k' + k'' + \dots) \equiv s(s^N - 1) \equiv 0, \ (\text{mod.}\ n).$$

Donc chacun des produits

$$(s^2 - 1)\,(h + h' + h'' + \dots), \quad (s^2 - 1)\,(k + k' + k'' + \dots)$$

sera divisible par $n = \nu^a$; et, dans chacun d'eux, le second facteur

$$h + h' + h'' + \dots \quad \text{ou} \quad k + k' + k'' + \dots$$

sera nécessairement divisible par ν^{a-1}, si le premier facteur

$$s^2 - 1$$

ne peut être qu'une seule fois divisible par ν. Or, c'est précisément ce qui arrivera. Car, si le facteur $s^2 - 1$ était seulement divisible par ν^2, on en conclurait

$$s^{\nu-1} \equiv 1, (\text{mod. } \nu^2)$$

et par suite (voir la note placée au bas de la page 335)

$$s^{\nu(\nu-1)} \equiv 1, (\text{mod.} \nu^3), s^{\nu^2(\nu-1)} \equiv 1, (\text{mod.} \nu^4), \ldots s^{\nu^{a-2}(\nu-1)} \equiv 1, (\text{mod.} \nu^a).$$

Donc s vérifierait la formule

$$s^{\nu^{a-2}(\nu-1)} \equiv 1, (\text{mod. } \nu^a)$$

ou, ce qui revient au même, la formule

$$s^{\frac{N}{2}} \equiv 1, (\text{mod. } n)$$

et ne pourrait représenter, comme nous le supposons, une racine primitive de l'équivalence

$$x^N \equiv 1, (\text{mod. } n).$$

Lorsque ν est de la forme $4x + 1$, et n de la forme ν^a, l'exposant a étant supérieur à l'unité, alors

$$\frac{N}{2} = \nu^{a-1} \frac{\nu - 1}{2}$$

est, ainsi que $\frac{\nu - 1}{2}$, un nombre pair; donc, par suite, la quantité -1 vérifie l'équation

$$x^{\frac{N}{2}} = 1,$$

et représente un résidu quadratique suivant le module n. D'ailleurs, l et m étant premiers à n, les deux nombres

$$l, \quad ml$$

sont toujours en même temps ou résidus ou non-résidus. Donc, dans le cas que nous considérons ici,

$$l \text{ et } -l \text{ ou } n-l$$

seront en même temps résidus ou non-résidus, et la somme des résidus

$$h, h', h'', \ldots$$

se composera, ainsi que la somme des non-résidus, de termes qui, ajoutés deux à deux, donneront des sommes partielles égales à n. En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Troisième théorème. ν étant un nombre premier de la forme $4x+1$, et

$$n=\nu^a$$

une puissance de ν, dont le degré a surpasse l'unité, si, parmi les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, on distingue les résidus quadratiques

$$h, h', h'', \ldots$$

et les non-résidus

$$k, k', k'', \ldots$$

la somme $h+h'+h''+\ldots$ des résidus, et la somme $k+k'+k''+\ldots$ des non-résidus seront, l'une et l'autre, divisibles par n.

Ainsi, en particulier, on trouvera, pour $n=25=5^2$,

$$\begin{aligned} h+h'+h''+\ldots &= 1+4+6+9+11+14+16+19+21+24 \\ &\equiv 1+4+6+9+11-11-9-6-4-1 \\ &\equiv 0, \text{ (mod. 25)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k+k'+k''+\ldots &= 2+3+7+8+12+13+17+18+22+23 \\ &\equiv 2+3+7+8+12-12-8-7-3-2 \\ &\equiv 0, \pmod{25}. \end{aligned}$$

Aux théorèmes 1, 2, 3, on peut évidemment joindre le suivant :

Quatrième théorème. n représentant un nombre entier supérieur à 2, la somme des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, sera divisible par n, de sorte qu'en désignant ces entiers par

$$h, k, l, \ldots$$

on aura

$$h+k+l+\ldots \equiv 0, \pmod{n}. \tag{11}$$

Effectivement, les entiers inférieurs à n et premiers à n, étant deux à deux de la forme

$$l, \quad n-l,$$

fourniront des sommes partielles toutes égales à n. On doit seulement excepter le cas où les nombres

$$l, \quad n-l$$

pourraient devenir égaux, en restant premiers à n. Or, l'équation

$$l = n-l$$

donne

$$l = \frac{1}{2} n,$$

et pour que $\frac{1}{2} n$ soit entier, mais premier à n, il faut que l'on ait $n = 2$.

Avant d'aller plus loin, nous présenterons une observation importante. La somme alternée $\circledS$ étant déterminée par la formule (2), et le groupe des exposants

$$h, h', h'', \ldots$$

étant supposé, dans cette somme, renfermer l'exposant 1, enfin, le nombre l étant inférieur, ou même supérieur à n, mais premier à n; si, dans la somme alternée $\circledS$, on remplace ρ par ρ^l, alors, suivant que l sera équivalent à l'un des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

ou à l'un des nombres

$$k, k', k'', \ldots$$

cette même somme se trouvera multipliée par $+1$ ou par -1, c'est-à-dire que les termes précédés du signe $+$ s'y trouveront échangés ou non contre les termes précédés du signe $-$, cette espèce de multiplication ou d'échange ayant lieu dans le cas même où n renfermerait des facteurs égaux, et où par suite, en vertu des propriétés de la racine ρ, la somme alternée $\circledS$ s'évanouirait. D'ailleurs, si n est un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre, on aura, dans le premier cas,

$$\left[\frac{l}{n}\right] = 1,$$

dans le second cas

$$\left[\frac{l}{n}\right] = -1.$$

Donc, alors, changer, dans la somme alternée $\circledS$, ρ en ρ^l, revient à multiplier cette somme, ou plutôt ses divers termes, par $\left[\frac{l}{n}\right]$.

Concevons à présent que n représente un nombre impair quelconque. Il sera le produit de facteurs premiers impairs

$$\nu, \nu', \nu'', \ldots$$

élevés à diverses puissances ; et, si l'on désigne les exposants de ces puissances par

$$a, b, c, \ldots$$

on aura

$$n = \nu^a \nu'^b \nu''^c, \ldots \tag{12}$$

$$N = \nu^{a-1} \nu'^{b-1} \nu''^{c-1} \ldots (\nu - 1)(\nu' - 1)(\nu'' - 1) \ldots = n\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu'}\right)\left(1 - \frac{1}{\nu''}\right) \cdots \tag{13}$$

Soient d'ailleurs

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \ldots$$

des racines primitives qui appartiennent respectivement aux diverses équations

$$x^{\nu^a} = 1, \quad x^{\nu'^b} = 1, \quad x^{\nu''^c} = 1, \text{ etc...} \tag{14}$$

On pourra prendre

$$\rho = \xi \eta \zeta \ldots \tag{15}$$

Soient de plus

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \Delta'', \ldots$$

des sommes alternées, respectivement formées avec les racines primitives de la première, ou de la seconde, ou de la troisième... des équations (14), et de manière que la racine

$$\xi, \text{ ou } \eta, \text{ ou } \zeta, \ldots$$

représente l'un des termes affectés du signe $+$. D'après ce qui a été dit dans la note précédente, si la somme alternée ω est en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14), non-seulement cette somme ϖ vérifiera l'une des conditions

$$(16)\qquad \varpi = 0, \qquad\qquad (17)\qquad \varpi^2 = \pm n,$$

mais en outre le produit

$$\Delta\Delta'\Delta''\dots$$

sera égal, au signe près, à la somme ϖ; et comme, dans ce produit, aussi bien que dans la somme ϖ, le terme

$$\xi\eta\zeta\dots$$

sera évidemment affecté du signe $+$, on aura nécessairement

$$(18)\qquad \varpi = \Delta\Delta'\Delta''\dots$$

Il y a plus : les divers termes compris dans la somme ϖ seront les produits partiels que l'on peut former, en multipliant les divers termes de la somme Δ, par les divers termes de la somme Δ', puis par les divers termes de la somme Δ'', et ainsi de suite. Cela posé, on pourra facilement décider si un entier l, inférieur à n et premier à n, fait partie du groupe

$$h, h', h'', \dots$$

ou du groupe

$$k, k', k''\dots$$

En effet, pour y parvenir, il suffira de savoir si, dans la somme ϖ, les termes précédés du signe $+$ se trouvent échangés ou non contre les termes précédés du signe $-$, quand on remplace

$$\rho = \xi\eta\zeta\dots \quad \text{par} \quad \rho' = \xi'\eta'\zeta'\dots,$$

ou, ce qui revient au même, quand on substitue simultanément

$$\xi' \text{ à } \xi, \quad \eta' \text{ à } \eta, \quad \zeta' \text{ à } \zeta, \dots$$

Or, de ces diverses substitutions la première équivaut à la multiplication des divers termes de la somme Δ par

$$\left[\frac{l}{\nu^a}\right],$$

la seconde à la multiplication des divers termes de Δ' par

$$\left[\frac{l}{\nu'^b}\right],$$

la troisième à la multiplication des divers termes de Δ'' par

$$\left[\frac{l}{\nu''^c}\right],$$

etc... Donc, en vertu de ces substitutions réunies, les divers termes du produit $\Delta\Delta'\Delta''$... ou de la somme $\circledS$ pourront être censés multipliés par

$$\left[\frac{l}{\nu^a}\right]\left[\frac{l}{\nu'^b}\right]\left[\frac{l}{\nu''^c}\right]\cdots$$

Donc, en définitive, l fera partie du groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

ou du groupe

$$k, k', k'', \ldots,$$

suivant que le produit

$$\left[\frac{l}{\nu^a}\right]\left[\frac{l}{\nu'^b}\right]\left[\frac{l}{\nu''^c}\right]\cdots$$

sera égal à $+1$ ou à -1.

Si, en supposant toujours

$$n = \nu^a \nu'^b \nu''^c, \ldots,$$

on se sert de la notation

$$\left[\frac{l}{n}\right]$$

pour représenter le produit

$$\left[\frac{l}{\nu^a}\right]\left[\frac{l}{\nu'^b}\right]\left[\frac{l}{\nu''^c}\right]\cdots,$$

on déduira immédiatement des principes que nous venons d'établir la proposition suivante :

Cinquième théorème. Soient n un nombre impair ; $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ ses facteurs premiers ; $a, b, c\ldots$ les exposants de ces facteurs dans le nombre n ; l un des entiers inférieurs à n mais premiers à n ; et ρ une des racines primitives de l'équation (1). Si une somme alternée ϖ de ces racines est en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14), les deux termes

$$\rho, \rho^l$$

seront, dans la somme alternée ϖ, affectés du même signe ou de signes contraires suivant que l'on aura

$$(19) \qquad \left[\frac{l}{n}\right] = 1 \quad \text{ou} \quad \left[\frac{l}{n}\right] = -1.$$

Il en résulte encore que, dans le cas où, comme nous l'avons supposé, le groupe des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

renferme l'unité, l fait partie ou non de ce même groupe suivant que la première ou la seconde des formules (19) se vérifie.

Supposons maintenant que, n étant déterminé par la formule (12), et l désignant l'un des nombres entiers inférieurs à n, on nomme

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

les restes positifs qu'on obtient, quand on divise successivement l par chacun des nombres

$$\nu^a,\ \nu'^b,\ \nu''^c,\ldots$$

L'équation

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots$$

donnera non-seulement

$$\rho^l = \xi^l\eta^l\zeta^l\ldots$$

mais aussi

(20) $$\rho^l = \xi^\lambda\eta^{\lambda'}\zeta^{\lambda''}\ldots;$$

et pareillement la formule

$$\left[\frac{l}{n}\right] = \left[\frac{l}{\nu^a}\right]\left[\frac{l}{\nu'^b}\right]\left[\frac{l}{\nu''^c}\right]\cdots$$

entraînera la suivante

(21) $$\left[\frac{l}{n}\right] = \left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right]\left[\frac{\lambda'}{\nu'^b}\right]\left[\frac{\lambda''}{\nu''^c}\right]\cdots$$

D'ailleurs les diverses racines primitives de l'équation

$$x^{\nu^a} = 1,$$

seront les diverses valeurs qu'on obtient pour

$$\xi^\lambda$$

en prenant successivement pour λ tous les entiers inférieurs à ν^a et premiers à ν^a. De même les diverses racines primitives de l'équation

$$x^{\nu'^b} = 1$$

seront les diverses valeurs qu'on obtient pour

$$\eta^{\lambda'}$$

en prenant successivement pour λ' tous les entiers inférieurs à ν'^b et premiers à ν'^b; etc... Donc, en vertu du quatrième théorème de la note VI, les diverses racines primitives de l'équation (1) seront représentées par les diverses valeurs du produit

$$\xi^{\lambda}\eta^{\lambda'}\zeta^{\lambda''}\ldots$$

correspondantes aux divers systèmes de valeurs que peuvent acquérir les exposants

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

quand on prend pour λ un entier inférieur à ν^a, mais premier à ν^a, pour λ' un entier inférieur à ν'^b, mais premier à ν'^b, pour λ'' un entier inférieur à ν''^c; mais premier à ν''^c, etc... Donc, puisque les diverses racines primitives de l'équation (1) peuvent encore être représentées par les diverses valeurs qu'on obtient pour

$$\rho^l$$

en prenant successivement pour l tous les entiers inférieurs à n, mais premiers à n; on peut affirmer, non-seulement, qu'à chaque valeur de l correspondra, comme il était facile de le prévoir, un seul système des valeurs de

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

mais réciproquement, qu'à chaque système de valeurs de $\lambda, \lambda'. \lambda'', \ldots$ correspondra une seule valeur de l.

Il est bon d'observer encore que, le nombre n étant impair, la somme alternée ϖ, déterminée par l'équation (2), ne pourra, en vertu des principes établis dans la note précédente, vérifier la formule (17), ou

$$\varpi^2 = \pm n,$$

que dans deux cas particuliers, savoir, 1° lorsque n sera un nombre premier, 2° lorsque, n étant le produit de facteurs premiers inégaux

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

Δ sera une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations

$$x^{\nu}=1,\quad x^{\nu'}=1,\quad x^{\nu''}=1,\ldots \tag{22}$$

Ajoutons que, dans l'un et l'autre cas, on aura

$$\Delta^2=n,$$

si n est de la forme $4x+1$, et

$$\Delta^2=-n$$

si n est de la forme $4x+3$.

Jusqu'à présent nous avons supposé que dans l'équation (1) l'exposant n était un nombre impair. Concevons maintenant qu'il devienne un nombre pair, et supposons d'abord qu'il se réduise à une puissance de 2.

Pour que l'on puisse former, avec les racines primitives de l'équation (1) une somme alternée

$$\Delta=\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^{k}-\rho^{k'}-\rho^{k''}-\ldots,$$

il sera nécessaire que la puissance de 2, représentée par n, soit une puissance supérieure à la première, par conséquent un terme de la progression géométrique

$$4,\quad 8,\quad 16,\ \text{etc}\ldots$$

Alors, on pourra supposer, si n est égal à 4,

$$\Delta=\rho-\rho^{3};$$

et si n est égal à 8

$$\Delta=\rho+\rho^{3}-\rho^{5}-\rho^{7},$$

ou bien

$$\varpi = \rho + \rho^5 - \rho^3 - \rho^7,$$

ou bien encore

$$\varpi = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5,$$

etc... Alors aussi la formule (17) ne pourra être vérifiée que dans trois cas spéciaux, savoir, 1° lorsque, n étant égal à 4, on aura

$$\varpi = \rho - \rho^3, \quad \varpi^2 = -4,$$

2° lorsque, n étant égal à 8, on aura

$$\varpi = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7, \quad \varpi^2 = -8$$

3° lorsque, n étant égal à 8, on aura

$$\varpi = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5, \quad \varpi^2 = 8.$$

Or, de ces trois cas le dernier est le seul dans lequel les sommes

$$h + h' + \ldots, \quad k + k' + \ldots$$

deviennent divibles par n. En effet, on aura dans le premier cas

$$h = 1, \quad k = 3,$$

par conséquent

$$h \equiv -k \equiv 1, \ (\text{mod. } n);$$

dans le second cas

$$h + h' = 1 + 3 = 4, \quad k + k' = 5 + 7 = 12,$$

par conséquent

$$h + h' \equiv k + k' \equiv \frac{1}{2} n, \ (\text{mod. } n);$$

et dans le troisième cas

$$h + h' = 1 + 7 = 8, \quad k + k' = 3 + 5 = 8,$$

par conséquent

$$h + h' = k + k' = n.$$

Concevons maintenant que n, étant un nombre pair, ne se réduise plus à une puissance de 2. Si l'on nomme $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ les facteurs premiers de n, dont l'un, ν par exemple, se réduira simplement au nombre 2, on pourra supposer encore la valeur de n déterminée par l'équation (12), et la valeur de ρ par l'équation (15),

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots,$$

désignant des racines primitives qui appartiennent respectivement à la première, à la seconde, à la troisième... des formules (14). Il y a plus : si l'on nomme

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$$

des sommes alternées respectivement formées avec les racines primitives de la première, de la seconde, de la troisième... des équations (14), et de manière que la racine

$$\xi, \quad \text{ou} \quad \eta, \quad \text{ou} \quad \zeta, \ldots$$

représente l'un des termes affectés du signe $+$; si d'autre part on nomme

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

les restes qu'on obtient quand on divise successivement par chacun des facteurs

$$\nu^a, \nu'^b, \nu''^c, \ldots$$

un entier l inférieur à n, mais premier à n; on se trouvera de nouveau conduit aux formules (18) et (20) : et l'on conclura toujours de la formule (20) qu'à chaque système de valeurs de

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

correspond une seule valeur de l. D'ailleurs la formule (18) fournira encore le moyen de décider si un entier l, inférieur à n, mais premier à n, fait partie du groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

qui par hypothèse renferme l'unité, ou du groupe

$$k, k', k'', \ldots$$

En effet, pour y parvenir, il suffira de savoir si, dans la somme $\mathfrak{O}$, les termes du signe $+$ se trouvent échangés ou non contre les termes précédés du signe $-$, quand on remplace

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots \quad \text{par} \quad \rho' = \xi'\eta'\zeta'\ldots$$

ou, ce qui revient au même, quand on substitue simultanément

$$\xi' \text{ à } \xi, \quad \eta' \text{ à } \eta, \quad \zeta' \text{ à } \zeta, \ldots$$

Or, de ces diverses substitutions, la seconde, la troisième,... simultanément effectuées, changeront ou ne changeront pas les termes précédés d'un signe en ceux que précède le signe contraire, par exemple, les termes affectés du signe $+$ en ceux qu'affecte le signe $-$, suivant que l'expression

$$\left[\frac{l}{\nu'^b}\right]\left[\frac{l}{\nu''^c}\right]\cdots = \left[\frac{l}{\nu'^b\nu''^c\ldots}\right]$$

sera égale à $+1$ ou à -1. Cela posé, en passant du cas où la lettre n désigne un nombre impair au cas où cette lettre représente un nombre pair, on obtiendra, au lieu du cinquième théorème, la proposition suivante :

Sixième théorème. Soient n un nombre pair,

$$\nu = 2, \nu, \nu', \ldots$$

ses facteurs premiers

$$a, b, c, \ldots$$

les exposants de ces facteurs dans le nombre n,

$$l$$

un des entiers inférieurs à n et premiers à n, et ρ une des racines primitives de l'équation (1). Si une somme alternée ϖ de ces racines est en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14), et a, en conséquence, pour facteur une somme alternée Δ des racines primitives $\xi, \xi_{,}, \ldots$ de l'équation

$$x^{2^a} = 1, \tag{23}$$

les deux termes

$$\rho, \rho^l$$

seront, dans la somme alternée ϖ, affectés du même signe, 1° lorsque, les termes

$$\xi, \xi^l$$

étant affectés du même signe dans la somme alternée Δ, on aura

$$\left[\frac{l}{\nu'^b \nu''^c \ldots}\right] = 1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(24)\qquad \left[\frac{l}{\frac{1}{2^a}n}\right] = 1;$$

2° lorsque, les termes

$$\xi,\ \xi'$$

étant affectés de signes contraires dans la somme alternée Δ, on aura

$$\left[\frac{l}{\nu'^b\nu''^c\ldots}\right] = -1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25)\qquad \left[\frac{l}{\frac{1}{2^a}n}\right] = -1.$$

Considérons en particulier le cas où, n étant pair, la somme $\otimes$ vérifie la condition (17), savoir,

$$\otimes^2 = \pm n.$$

Dans ce cas, en vertu des principes établis dans la note précédente, $\otimes$ sera nécessairement une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14), et de plus on aura, d'une part,

$$a = 2,\quad 2^a = 4,$$

ou

$$a = 3,\quad 2^a = 8;$$

d'autre part,

$$b = 1,\quad c = 1, \ldots\quad n = 2^a\nu'\nu''\ldots$$

Or, supposons d'abord

$$2^a = 4.$$

Alors on trouvera

$$n = 4\nu\nu'\nu''\ldots \qquad \Delta = \rho - \rho^3 = \rho^1 - \rho^{-1},$$

et le théorème 6 entraînera le suivant :

Septième théorème. Soient n un nombre pair divisible par 4,

$$\nu', \nu'', \text{etc.}\ldots$$

les facteurs premiers de $\frac{n}{4}$, supposés impairs et inégaux, l un des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, et ρ l'une des racines primitives de l'équation

$$x^n = 1.$$

Si une somme alternée ϖ de ces racines vérifie la condition

$$\varpi^2 = \pm n,$$

non-seulement ϖ sera une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations

$$(26) \qquad x^4 = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1, \ldots$$

mais de plus les deux termes

$$\rho, \rho^l,$$

seront, dans la somme alternée ϖ, affectés du même signe, quand on aura simultanément

$$(27)\left\{\begin{array}{lll} l \equiv 1, (\text{mod. } 4), & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{4}n}\right] = 1, & \text{ou bien} \\ l \equiv -1, (\text{mod. } 4), & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{4}n}\right] = -1, & \end{array}\right.$$

et affectés de signes contraires, quand on aura

$$(28)\left\{\begin{array}{lll} l\equiv 1,\ (\text{mod. } 4), & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{4}n}\right]=-1, & \text{ou bien} \\ l\equiv -1,(\text{mod. } 4), & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{4}n}\right]=1. & \end{array}\right.$$

Supposons, en second lieu,

$$2^a=8.$$

Alors on aura

$$n=8\nu'\nu''\ldots;$$

et, si l'on veut que la fonction alternée ϖ vérifie la condition

$$\varpi^2=n.$$

on devra supposer

$\Delta=\rho+\rho^7-\rho^3+\rho^5$, lorsque n sera de la forme $4x+1$,

et

$\Delta=\rho-\rho^3-\rho^5-\rho^7$, lorsque n sera de la forme $4x+3$.

Au contraire, si l'on veut que la somme alternée ϖ vérifie la condition

$$\varpi^2=-n$$

on devra supposer

$\Delta=\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7$, lorsque n sera de la forme $4x+1$,

et

$\Delta=\rho+\rho^7-\rho-\rho^3$, lorsque n sera de la forme $4x+1$.

Cela posé, le théorème 6 entraînera évidemment les propositions suivantes:

Huitième théorème. Soient n un nombre pair divisible par 8;

$$\nu', \nu'', \ldots$$

les facteurs premiers de $\frac{n}{8}$ supposés impairs et inégaux; l un des entiers inférieurs à n, mais premiers à n; et ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1.$$

Enfin, supposons qu'une somme alternée $\mathbb{O}$ de ces racines vérifie la condition

$$\mathbb{O}^2 = n.$$

Non-seulement cette somme sera une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations

$$(29) \qquad x^8 = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1, \ldots,$$

mais de plus les termes

$$\rho, \rho^l$$

seront, dans la somme $\mathbb{O}$, affectés du même signe, 1° si $\frac{n}{8}$ étant de la forme $4x+1$, on a

$$(30) \left\{ \begin{aligned} & l \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 7, \quad \left[\frac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \qquad \text{ou bien} \\ & l \equiv 3 \quad \text{ou} \quad 5, \quad \left[\frac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = -1; \end{aligned} \right.$$

2° si $\frac{n}{8}$ étant de la forme $4x+3$, on a

$$(31) \left\{ \begin{aligned} & l \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 3, \quad \left[\frac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \qquad \text{ou bien} \\ & l \equiv 3 \quad \text{ou} \quad 7, \quad \left[\frac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = -1. \end{aligned} \right.$$

Neuvième théorème. Soient n un nombre pair divisible par 8,

$$\nu', \nu'', \ldots$$

les facteurs premiers de $\frac{n}{8}$, supposés impairs et inégaux, l un des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, et ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1,$$

Enfin, supposons qu'une somme alternée ω de ces racines vérifie la condition

$$\omega^2 = -n.$$

Non-seulement cette somme sera une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations

$$(32) \qquad x^8 = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1, \text{ etc}\ldots;$$

mais de plus les termes

$$\rho, \rho^l$$

seront, dans la somme alternée ω, affectés du même signe, 1° si, $\frac{n}{8}$ étant de la forme $4x + 1$, on a

$$(33) \begin{cases} l \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 3, & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \quad \text{ou bien} \\ l \equiv 5 \quad \text{ou} \quad 7, & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = -1; \end{cases}$$

2° si, $\frac{n}{8}$ étant de la forme $4x + 3$, on a

$$(34) \begin{cases} l \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 7, & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \quad \text{ou bien} \\ l \equiv 3 \quad \text{ou} \quad 5, & \left[\dfrac{l}{\frac{1}{8}n}\right] = -1. \end{cases}$$

Revenons maintenant à la formule (7), où les nombres

$$h, h', h'' \dots \quad \text{ou} \quad k, k', k'', \dots$$

représentent les exposants des termes affectés du signe + ou du signe — dans la somme alternée ⓓ. Il suit des théorèmes 1 et 3 que cette formule se vérifie, 1° quand n est un nombre premier impair, supérieur à 3, 2° quand n est une puissance quelconque d'un nombre premier de la forme $4x+1$. J'ajoute qu'elle se vérifiera encore, si n est un nombre composé qui renferme plusieurs facteurs premiers, l'un de ces facteurs pouvant être le nombre 2 élevé à une puissance dont le degré surpasse l'unité, et si d'ailleurs, la valeur de n étant donnée par la formule (12), la somme alternée ⓓ est une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14). En effet, supposons d'abord n impair. Alors, en vertu du cinquième théorème joint à la formule (21), les valeurs de l qui appartiendront au groupe

$$h, h', h'', \dots$$

seront celles qui vérifieront la condition

$$\left[\frac{l}{n}\right] = 1 \tag{35}$$

ou

$$\left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right]\left[\frac{\lambda'}{\nu'^b}\right]\left[\frac{\lambda''}{\nu''^c}\right]\dots = 1; \tag{36}$$

par conséquent, celles qui vérifieront ou les conditions

$$\left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right] = 1, \qquad \left[\frac{\lambda'}{\nu'^b}\right]\left[\frac{\lambda''}{\nu''^c}\right]\dots = 1, \tag{37}$$

ou les conditions

$$\left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right] = -1, \quad \left[\frac{\lambda'}{\nu'^b}\right]\left[\frac{\lambda''}{\nu''^c}\right]\dots = -1. \tag{38}$$

Or, le nombre des valeurs de l qui vérifieront la condition (35), ou, ce qui revient au même, le nombre des systèmes de valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ qui vérifieront la condition (36), sera

$$\frac{1}{2}\mathrm{N} = \frac{1}{2}\nu^{a-1}\nu'^{b-1}\nu''^{c-1}\ldots(\nu-1)(\nu'-1)(\nu''-1)\ldots,$$

aussi bien que le nombre des valeurs de l qui vérifieront la condition

$$\left[\frac{l}{n}\right] = -1,$$

ou

$$\left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right]\left[\frac{\lambda'}{\nu'^b}\right]\left[\frac{\lambda''}{\nu''^c}\right]\ldots = -1.$$

Pareillement, on reconnaîtra que le produit

$$\frac{1}{2}\nu'^{b-1}\nu''^{c-1}\ldots(\nu'-1)(\nu''-1)\ldots$$

exprime le nombre des systèmes de valeurs de

$$\lambda', \lambda'', \ldots,$$

qui sont propres à vérifier, soit la seconde des formules (37), soit la seconde des formules (38). Donc ce dernier produit, que nous représentons par $\frac{1}{2}\mathfrak{N}$, en posant, pour abréger,

$$\mathfrak{N} = \nu'^{b-1}\nu''^{c-1}\ldots(\nu'-1)(\nu''-1)\ldots, \tag{39}$$

exprimera le nombre des valeurs de l, qui, étant comprises dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots,$$

seront équivalentes, suivant le module ν^a, à une même valeur de λ, par laquelle la première des formules (37) ou (38) se trouve vérifiée. Donc la somme des valeurs de l, comprises dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, la somme

$$h + h' + h'' + \ldots$$

sera équivalente, suivant le module ν^a, au produit du nombre

$$\frac{1}{2}\mathfrak{N},$$

par la somme des valeurs de λ, qui vérifieront l'une des formules

$$(40) \qquad \left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right] = 1, \quad \left[\frac{\lambda}{\nu^a}\right] = -1.$$

Or, comme chaque valeur de λ satisfera nécessairement à l'une des équations (40), il est clair que la dernière somme comprendra toutes les valeurs de λ, et sera par suite, en vertu du quatrième théorème, divisible par ν^a. Donc aussi la première somme

$$h + h' + h'' + \ldots$$

sera divisible pour ν^a; et, comme elle devra être, pour les mêmes raisons, divisible par ν'^b, par $\nu''^c, \ldots$ il est clair que, dans l'hypothèse admise, elle sera divisible par le produit

$$n = \nu^a \nu'^b \nu''^c \ldots$$

On pourra encore en dire autant de la somme

$$k + k' + k'' + \ldots$$

puisque, en vertu du théorème 4, la somme totale

$$h + h' + h'' + \ldots + k + k' + k'' + \ldots$$

devra encore être divisible par n. Donc si, n étant impair, la somme alternée $\mathfrak{D}$ est en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14), les deux sommes

$$h + h' + h'' + \ldots, \quad k + k' + k'' + \ldots$$

vérifieront la formule (7).

Supposons maintenant que, dans l'équation (12), l'un des facteurs

$$\nu, \nu', \nu'' \ldots$$

se réduise au nombre 2, mais se trouve élevé à une puissance dont le degré surpasse l'unité. On prouvera encore, non plus à l'aide de la seule formule (21), mais à l'aide des formules (18) et (20), que la moitié du produit $\mathfrak{N}$, déterminé par l'équation (38), exprime le nombre des valeurs de l qui, étant comprises dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots,$$

sont équivalentes, suivant le module ν^a, à une même valeur de λ. D'ailleurs, parmi les termes affectés du signe $+$ dans la somme $\mathfrak{D}$ que détermine la formule (18), on en trouvera qui auront pour facteur un terme donné quelconque, affecté du signe $+$ ou du signe $-$ dans la somme Δ. Donc la somme

$$h + h' + h'' + \ldots$$

sera encore, dans l'hypothèse admise, équivalente, suivant le module ν^a, au produit de $\frac{1}{2}\mathfrak{N}$, par la somme totale des valeurs de λ. Donc, cette dernière somme devant être, en vertu du quatrième théorème, divisible par ν^a, on pourra en dire autant de la première, qui devra être divisible par chacun des nombres

$$\nu^a, \nu'^b, \nu''^c \ldots$$

et se réduire, en conséquence, à un multiple de n. La somme totale

$$h + h' + h'' + \ldots + k + k' + k'' + \ldots$$

devant être elle-même, en vertu du théorème 4, un multiple de n, il suit de ce qu'on vient de dire que les deux sommes

$$h + h' + h'' + \ldots, \quad k + k' + k'' + \ldots$$

devront encore vérifier la formule (7).

En résumé, l'on pourra énoncer la proposition suivante.

Dixième théorème. n étant un nombre composé qui renferme divers facteurs premiers $\nu, \nu', \nu'', \ldots$ et ne puisse devenir pair, sans être divisible par 4, si l'on suppose que, la valeur de n étant fournie par l'équation (12), la somme alternée ϖ, déterminée par la formule (2), soit en même temps une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (4), on aura

$$h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0, \ (\text{mod. } n).$$

Il est bon d'observer que, dans le théorème précédent, les exposants de tous les facteurs impairs pourraient se réduire à l'unité.

En vertu des principes établis dans la note précédente, pour que la somme alternée ϖ vérifie la condition

$$\varpi^2 = \pm n,$$

n étant un nombre premier ou composé, pair ou impair, déterminé par la formule (12), il est nécessaire que les facteurs premiers impairs de n soient inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant 4 ou 8; et qu'en outre ϖ soit une fonction alternée des racines primitives de chacune des équations (14). Cela posé, les théorèmes 1 et 2 entraînent évidemment la proposition suivante.

Onzième théorème. Lorsque la somme alternée ϖ, déterminée par la formule (2), vérifie l'équation (17), savoir

$$\varpi^2 = \pm n,$$

les deux groupes d'exposants

$$h, h', h'', \ldots$$
$$k, k', k'', \ldots$$

vérifient la condition (7), savoir

$$h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0, (\text{mod. } n),$$

à moins toutefois que le module n ne se réduise à l'un des trois nombres

$$3, \quad 4, \quad 8.$$

On peut d'ailleurs observer que la condition dont il s'agit est vérifiée, pour le cas même où l'on suppose $n = 8$, lorsque ϖ, étant réduit à la somme alternée

$$\rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5,$$

vérifie l'équation

$$\varpi^2 = 8 = n,$$

mais cesse de l'être lorsque ϖ, étant réduit à

$$\rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$

vérifie l'équation

$$\varpi^2 = -8 = -n.$$

NOTE IX.

THÉORÈMES DIVERS RELATIFS AUX SOMMES ALTERNÉES DES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINÔMES.

Soient n un nombre entier supérieur à 2;

$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n, mais premiers à n;

N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$;

ρ une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1; \tag{1}$$

enfin, supposons les entiers

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots,$$

de telle manière que l'expression

$$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots \tag{2}$$

représente une somme alternée des racines primitives de l'équation (1), et que l'unité fasse partie du premier groupe

$$h,\ h',\ h'', \ldots$$

Alors, la quantité m étant équivalente, suivant le module n, à l'un des entiers

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

les produits

$$mh,\quad mh',\quad mh'',\ldots$$

seront équivalents, à l'ordre près, soit aux termes du premier groupe

$$k,\ k',\ k'',\ldots,$$

soit aux termes du second groupe

$$h,\ h',\ h'',\ldots$$

selon que m fera partie du premier ou du second groupe ; et au contraire, les produits

$$mk,\quad mk',\quad mk'',\ldots$$

seront équivalents, dans le premier cas, aux nombres

$$k,\quad k',\quad k'',\ldots,$$

dans le second cas, aux nombres

$$h,\quad h',\quad h'',\ldots$$

Donc, l étant l'un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, le nombre l et le produit ml, ou plutôt le reste de la division de ml par n, appartiendront ou non au même groupe, selon que la quantité m deviendra équivalente à un terme du premier ou du second groupe. Ainsi, par exemple,

$$l \quad \text{et} \quad -l, \quad \text{ou plutôt} \quad n-l$$

appartiendront ou non au même groupe, suivant que la quantité

$$-1, \quad \text{ou plutôt} \quad n-1,$$

fera partie du premier ou du second groupe. Pareillement, si le nombre n est impair,

$$l \quad \text{et} \quad \iota l$$

appartiendront ou non au même groupe, et par suite les produits

$$\iota h, \quad \iota h', \quad \iota h'', \ldots$$

seront équivalents, à l'ordre près, aux nombres

$$h, \quad h', \quad h'', \ldots,$$

ou aux nombres

$$k, \quad k', \quad k'', \ldots,$$

suivant que le nombre ι fera partie du premier groupe ou du second.

Des principes que nous venons de rappeler il résulte encore que, si l'on remplace

$$\rho \quad \text{par} \quad \rho^m,$$

les deux groupes des racines primitives

$$\rho^h, \ \rho^{h'}, \ \rho^{h''}, \ldots \quad \text{et} \quad \rho^k, \ \rho^{k'}, \ \rho^{k''}, \ldots$$

resteront composés chacun des mêmes racines, ou se transformeront l'un dans l'autre, suivant que m sera équivalent, suivant le module n, à l'un des nombres

$$h, \quad h', \quad h'', \ldots,$$

ou à l'un des nombres

$$k, \quad k', \quad k'', \ldots$$

Donc, si l'on nomme

$$\mathrm{I} = \mathrm{f}(\rho^h, \ \rho^{h'}, \ \rho^{h''}, \ \ldots)$$

une fonction symétrique des racines

$$\rho^h, \quad \rho^{h'}, \quad \rho^{h''}, \ldots,$$

et

$$J = f(\rho^k, \ \rho^{k'}, \ \rho^{k''}, \ldots)$$

ce que devient la fonction I, quand on y remplace

$$\rho^h, \quad \rho^{h'}, \quad \rho^{h''}, \ldots$$

par

$$\rho^k, \quad \rho^{k'}, \quad \rho^{k''}, \ldots$$

la somme

$$I + J$$

ne changera jamais ni de valeur ni de signe, et la différence

$$I - J$$

pourra seulement changer de signe, en conservant toujours, au signe près, la même valeur, lorsqu'on remplacera la racine primitive ρ par une autre racine primitive ρ^m. Donc alors la somme $I + J$ sera une fonction symétrique, et la différence $I - J$ une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1).

Si le nombre n est tel que l'on ait

$$\varpi^2 = \pm n, \tag{3}$$

alors, en vertu des principes établis dans la note précédente, ce nombre sera de l'une des formes

$$\nu\nu'\nu'', \ldots \quad 4\nu'\nu'', \ldots, \quad 8\nu'\nu'', \ldots,$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ désignant des facteurs impairs et premiers, inégaux entre eux ; et, si d'ailleurs n ne se réduit pas à l'un des trois nombres

$$3, \quad 4, \quad 8,$$

on aura

(4) $h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0, (\text{mod. } n).$

Ajoutons que l'équation (3) pourra se réduire à

(5) $$\varpi^2 = n,$$

dans le cas seulement où, les facteurs impairs de n étant inégaux, n sera de l'une des formes

$$4x + 1, \quad 4(4x + 3), \quad 8(2x + 1),$$

et qu'alors chacun des nombres

$$h\, h'\, h'', \ldots,$$

vérifiera 1°, si n est de la forme $4x + 1$, la condition

(6) $$\left[\frac{h}{n}\right] = 1;$$

2°, si $\frac{n}{4}$ est entier et de la forme $4x + 3$, les conditions

(7) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right] = 1, \qquad h \equiv 1, \quad (\text{mod. } 4),$$

ou

(8) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right] = -1, \quad h \equiv -1, (\text{mod. } 4);$$

3°, si $\frac{n}{8}$ est entier et de la forme $4x + 1$, les conditions

(9) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \qquad h \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 7, (\text{mod. } 8),$$

ou

(10) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = -1, \quad h \equiv 3 \quad \text{ou} \quad 5, (\text{mod. } 8);$$

4°, si $\frac{n}{8}$ est entier et de la forme $4x+3$, les conditions

(11) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \qquad h \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 3, \pmod{8},$$

ou

(12) $$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = -1, \qquad h \equiv 5 \quad \text{ou} \quad 7, \pmod{8}.$$

Au contraire, l'équation (3) pourra se réduire à

(13) $$\varpi^2 = -n,$$

dans le cas seulement où, les facteurs impairs de n étant inégaux, n sera de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(2x+1);$$

et alors chacun des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

vérifiera, 1°, si n est de la forme $4x+3$, la condition (6); 2°, si $\frac{n}{4}$ est entier et de la forme $4x+1$, les conditions (7) ou (8); 3° si $\frac{n}{8}$ est entier et de la forme $4x+3$, les conditions (9) ou (10); 4° si $\frac{n}{8}$ est entier et de la forme $4x+1$, les conditions (11) ou (12).

Si l'on désigne par

$$\nu, \nu', \nu'', \ldots$$

les facteurs premiers de n, et par

$$a, b, c, \ldots$$

les exposants des puissances auxquelles ces mêmes facteurs sont élevés, l'équation

$$(14) \qquad n = \nu^a \nu'^b \nu''^c, \ldots$$

entraînera généralement la suivante

$$(15) \qquad N = \nu^{a-1} \nu'^{b-1} \nu''^{c-1} - (\nu - 1)(\nu' - 1)(\nu'' - 1) \ldots$$

Si l'on suppose en particulier n impair, et composé de facteurs impairs inégaux

$$\nu, \ \nu', \ \nu'', \ldots$$

alors l'équation

$$(16) \qquad n = \nu'\nu\nu'' \ldots$$

entraînera les suivantes :

$$(17) \qquad N = (\nu - 1)(\nu' - 1)(\nu'' - 1) \ldots$$

$$(18) \qquad \left[\frac{-1}{n}\right] = \left[\frac{-1}{\nu}\right] \left[\frac{-1}{\nu'}\right] \left[\frac{-1}{\nu''}\right] \ldots,$$

$$(19) \qquad \left[\frac{2}{n}\right] = \left[\frac{2}{\nu}\right] \left[\frac{2}{\nu'}\right] \left[\frac{2}{\nu''}\right] \ldots$$

D'ailleurs, ν étant un nombre premier impair, l'expression

$$\left[\frac{-1}{\nu}\right] = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$$

se réduira simplement à $+1$ ou à -1, suivant que ν sera de la forme $4x + 1$ ou $4x - 1$. Donc, en vertu de la formule (18), l'expression

$$\left[\frac{-1}{n}\right]$$

sera égale à $+1$ ou à -1, suivant que les facteurs premiers de n, de la forme $4x - 1$, seront en nombre pair ou en nombre impair ; et, comme le nombre n sera, dans le premier cas, de la forme $4x + 1$, dans le second cas, de la forme

$4x - 1$, il est clair que l'équation (18) pourra être réduite à

(20) $$\left[\frac{-1}{n}\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

De plus, ν étant un nombre premier impair, l'expression

$$\left[\frac{2}{\nu}\right] = (-1)^{\frac{\nu^2-1}{8}}$$

se réduira simplement à $+1$ ou à -1, suivant que ν^2 sera de la forme $16x + 1$ ou $16x + 9$. Donc, en vertu de la formule (19), l'expression

$$\left[\frac{2}{n}\right]$$

sera égale à $+1$, ou à -1, suivant que, parmi les carrés

$$\nu^2, \nu'^2, \nu''^2, \ldots$$

ceux qui se présenteront sous la forme

$$16x + 9$$

seront en nombre pair ou en nombre impair. D'ailleurs, le produit de deux facteurs de la forme $16x + 9$ étant lui-même de la forme $16x + 1$, il est clair que le carré

$$n^2 = \nu^2\nu'^2\nu''^2 \ldots$$

sera, dans le premier cas de la forme $16x + 1$, dans le second cas de la forme $16x + 9$. Donc, par suite n sera, dans le premier cas, de la forme $8x \pm 1$, ou, ce qui revient au même, de l'une des formes

$$8x + 1 \quad \text{ou} \quad 8x + 7;$$

dans le second cas, de la forme $8x \pm 3$, ou, ce qui revient au même de l'une des formes

$$8x+3 \quad \text{ou} \quad 8x+5;$$

et l'équation (19) pourra être réduite à

$$\left[\frac{2}{n}\right]=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}. \tag{21}$$

Supposons maintenant que, les facteurs impairs de n étant inégaux et représentés par

$$\nu', \nu'', \ldots,$$

n renferme en outre un facteur pair représenté par 4 ou par 8; alors, eu égard à la formule (20), il est clair que l'équation

$$n=4\nu'\nu''\ldots \tag{22}$$

entraînera la suivante

$$\left[\frac{-1}{\frac{1}{4}n}\right]=(-1)^{\frac{\frac{n}{4}-1}{2}} \tag{23}$$

ou que l'équation

$$n=8\nu'\nu''\ldots \tag{24}$$

entraînera la suivante

$$\left[\frac{-1}{\frac{1}{8}n}\right]=(-1)^{\frac{\frac{n}{8}-1}{2}}. \tag{25}$$

Des formules (20), (23), (25) jointes aux conditions (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12) on déduit immédiatement les propositions que nous allons énoncer.

Premier théorème. Soit ρ l'une des racines primitives de l'équation (1), et supposons les exposants des puissances diverses de ρ partagés en deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad k, k', k'', \ldots$$

chaque exposant étant censé appartenir au premier ou au second groupe, suivant que la puissance correspondante se trouve affectée du signe $+$ ou du signe $-$ dans une somme alternée $\mathcal{D}$ de ces racines primives. Les deux exposants

$$1 \quad \text{et} \quad -1 \quad \text{ou} \quad n-1$$

appartiendront au même groupe, si la somme $\mathcal{D}$ vérifie la condition

$$\mathcal{D}^2 = n,$$

et à des groupes différents, si la somme $\mathcal{D}$ vérifie la condition

$$\mathcal{D}^2 = -n.$$

Par suite, l étant premier à n, les exposants

$$l \quad \text{et} \quad -l \quad \text{ou} \quad n-l$$

appartiendront au même groupe, si l'on a $\mathcal{D} = n$, ce qui suppose que n soit de l'une des formes

$$4x+1, \quad 4(4x+3), \quad 8(2x+1),$$

et à des groupes différents, si l'on a $\mathcal{D}^2 = -n$, ce qui suppose que n soit de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(2x+1).$$

On peut aussi, de l'équation (21), jointe à ce qui a été dit plus haut, déduire le théorème dont voici l'énoncé :

Deuxième théorème. Le nombre n étant impair, soit ρ

l'une des racines primitives de l'équation (1), et supposons les exposants des puissances diverses de ρ partagés en deux groupes, chaque exposant étant censé appartenir au premier ou au second groupe, suivant que la puissance correspondante se trouve affectée du signe $+$ ou du signe $-$ dans une somme alternée ϖ de ces racines, qui offre pour carré $\pm n$. Les deux exposants

$$1 \quad \text{et} \quad 2$$

ou plus généralement

$$l \quad \text{et} \quad 2l$$

appartiendront au même groupe, ou à des groupes différents, suivant que le module n sera de l'une des formes

$$8x + 1, \quad 8x + 7$$

ou de l'une des formes

$$8x + 3, \quad 8x + 5.$$

Le deuxième théorème entraîne immédiatement la proposition suivante.

Troisième théorème. n étant un nombre impair, et ρ une des racines primitives de l'équation (1), soient

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

les deux groupes d'exposants de ρ dans une somme alternée ϖ de ces racines, qui offre pour carré $\pm n$. Si n est de la forme

$$8x + 1 \quad \text{ou} \quad 8x + 7,$$

le groupe des exposants

$$h, h', h'', \ldots$$

pourra être remplacé, dans la somme alternée ϖ, par le groupe des exposants

$$2h,\ 2h',\ 2h'',\ldots$$

qui seront, à l'ordre près, équivalents aux premiers suivant le module n, et le groupe des exposants

$$k,\ k',\ k'',\ldots$$

par le groupe des exposants

$$2k,\ 2k',\ 2k'',\ldots$$

Si au contraire n est de l'une des formes

$$8x+3,\quad 8x+5,$$

le groupe des exposants

$$h,\ h',\ h'',\ldots$$

pourra être remplacé par le groupe des exposants

$$2k,\ 2k',\ 2k'',\ldots$$

et le groupe des exposants

$$k,\ k',\ k'',\ldots$$

par le groupe des exposants

$$2h,\ 2h',\ 2h'',\ldots$$

Supposons maintenant que, l'équation

$$\varpi^2 = \pm n$$

étant vérifiée, n représente, non plus un nombre impair, mais un nombre pair. Alors n sera de l'une des formes

$$4\nu'\nu''\ldots,\quad 8\nu'\nu''\ldots$$

$\nu',\ \nu'',\ldots$ étant des facteurs impairs inégaux. Or, si l'on suppose d'abord

$$n = 4\nu'\nu''\ldots$$

un nombre l inférieur à n, mais premier à n, fera partie du premier groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

si ce nombre l, pris pour h, vérifie les conditions (7) ou (8), et n'en fera pas partie dans le cas contraire. Par suite, deux nombres impairs

$$l, l'$$

inférieurs à n, mais premiers à n, appartiendront l'un au premier groupe, l'autre au second groupe, si ces nombres vérifient la condition

(26) $$\left[\frac{l'}{\frac{1}{4}n}\right] = \left[\frac{l}{\frac{1}{4}n}\right]$$

sans vérifier la suivante

$$l' \equiv l, \ (\text{mod. } 4);$$

en sorte que l'on ait, non pas

$$l' - l \equiv 0, \ (\text{mod. } 4),$$

mais au contraire

(27) $$l' - l \equiv 2, \ (\text{mod. } 4).$$

Or, les conditions (26), (27) seront évidemment vérifiées si, l étant inférieur à $\frac{n}{2}$, on pose

(28) $$l' = l + \frac{n}{2},$$

puisque alors on aura

$$l' - l = \frac{n}{2} = 2\nu'\nu''\ldots \equiv 2, \ (\text{mod. } 4).$$

Supposons maintenant

$$n = 8\nu'\nu''\ldots$$

$\nu', \nu'', \ldots$ étant toujours des facteurs impairs inégaux, et la valeur de ϖ^2 étant $\pm n$. En vertu des conditions (9) ou (10), (11) ou (12), deux nombres impairs

$$l,\ l'$$

inférieurs à n, mais premiers à n, appartiendront nécessairement, l'un au premier groupe, l'autre au second groupe, si ces nombres vérifient les deux conditions

$$(29)\qquad \left[\frac{l'}{\frac{1}{8}n}\right] = \left[\frac{l}{\frac{1}{8}n}\right],$$

$$(30)\qquad l' - l \equiv 4, \text{ (mod. 8)}.$$

Or, c'est précisément ce qui arrivera, si, l étant inférieur à $\frac{n}{2}$, on suppose la valeur de l' déterminée par l'équation (28), puisque alors on aura

$$l' - l - \frac{n}{2} = 4\nu'\nu''\ldots \equiv 4, \text{ (mod 8)}.$$

Observons maintenant que la formule (28) entraîne immédiatement la suivante

$$(31)\qquad 2l' \equiv 2l, \text{ (mod. } n).$$

Donc, lorsque n étant pair, le carré de ϖ sera $\pm n$, on pourra aux termes du premier groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

faire correspondre les termes du second groupe

$$k,\ k',\ k'', \ldots$$

de manière que l'on ait par exemple

$$2h \equiv 2k, \quad 2h' \equiv 2k', \quad 2h'' \equiv 2k'', \ldots \pmod{n}.$$

En conséquence on peut énoncer la proposition suivante.

Quatrième théorème. n étant un nombre pair, et ρ une des racines primitives de l'équation (1), soient

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots$$

les deux groupes d'exposants de ρ, dans une somme alternée $\circledS$ de ces racines, qui offre pour carré $\pm n$. Les nombres

$$2h,\ 2h',\ 2h'', \ldots$$

seront équivalents, à l'ordre près, suivant le module n, aux nombres

$$2k,\ 2k',\ 2k'', \ldots$$

Le nombre total des entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n, étant représenté par N, et la somme alternée $\circledS$ renfermant toujours autant de termes positifs que de termes négatifs, il est clair que dans chacun des groupes

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots$$

le nombre des termes doit être égal à $\frac{N}{2}$. Cela posé, l'unité étant censée faire partie du premier groupe,

$$h,\ h',\ h'', \ldots$$

nommons i le nombre des termes qui, dans ce groupe, sont inférieurs à $\frac{n}{2}$, et j le nombre de ceux qui surpassent $\frac{n}{2}$.

On aura

$$(32) \qquad i + j = \frac{N}{2}.$$

D'autre part, l étant un entier inférieur à $\frac{n}{2}$, mais premier à l,

$$n - l$$

sera un autre entier supérieur à $\frac{n}{2}$, mais inférieur à n, et premier à n. Donc, les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, se correspondront deux à deux, au-dessus et au-dessous de $\frac{n}{2}$, le nombre des uns et des autres étant encore $\frac{N}{2}$. Donc, ceux qui feront partie du second groupe seront, au-dessous de $\frac{n}{2}$, en nombre égal à

$$\frac{N}{2} - i = j,$$

et au-dessus de $\frac{n}{2}$, en nombre égal à

$$\frac{N}{2} - j = i.$$

Il y a plus : deux termes correspondants, c'est-à-dire de la forme

$$l, \quad n - l$$

seront, en vertu du théorème premier, deux termes qui feront partie d'un même groupe, si la somme alternée ϖ vérifie la condition

$$\varpi^2 = n.$$

Donc alors, à l'équation (32), on pourra joindre celle-ci

$$(33) \qquad i = j,$$

et l'on aura par suite

$$i = j = \frac{N}{4}. \tag{34}$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

Cinquième théorème. Le nombre n étant tel que la somme alternée ϖ, déterminée par l'équation (2), vérifie la condition

$$\varpi^2 = n,$$

chacun des groupes d'exposants

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

offrira autant de termes inférieurs à $\frac{n}{2}$, que de termes supérieurs à $\frac{n}{2}$, le nombre des termes de chaque groupe, inférieurs à $\frac{n}{2}$, étant $\frac{N}{4}$.

En terminant cette note, nous joindrons ici quelques observations qui ne sont pas sans intérêt.

Si, dans le cas où n représente une puissance d'un nombre premier impair, et l un entier premier à n, on désigne par

$$\left[\frac{l}{n}\right],$$

comme nous l'avons fait dans la note précédente, le reste $+1$ ou -1, qu'on obtient en divisant par n le nombre entier

$$l^{\frac{N}{2}},$$

alors on devra, dans les formules (20) et (21), supposer, ainsi que nous l'avons admis, le nombre n non-seulement impair, mais composé de facteurs inégaux. Car, si l'on supposait, par exemple,

$$n=9=3^2,$$

on trouverait

$$N=2.3,\quad \frac{N}{2}=3,$$

et les expressions

$$\left[\frac{-1}{n}\right]=(-1)^3=-1,\quad \left[\frac{2}{n}\right]\equiv 2^3\equiv -1,\ (\text{mod. } 9),$$

cesseraient d'être égales aux quantités

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}=(-1)^4=1,\quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}=(-1)^{10}=1.$$

Toutefois les formules (20), (21) continueraient d'être vérifiées, si, dans le cas où n représente une puissance ν^a d'un nombre ν premier et impair, on désignait, avec M. Jacobi, par la notation

$$\left[\frac{l}{n}\right],$$

non plus le reste $+1$ ou -1, qu'on obtient en divisant par n le nombre

$$l^{\frac{N}{2}},$$

mais l'expression

$$\left[\frac{l}{\nu}\right]^a.$$

Alors aussi l'on pourrait étendre à des nombres impairs quelconques la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers impairs; en sorte qu'on aurait généralement, pour des valeurs impaires des nombres entiers m et n

(35) $$\left[\frac{m}{n}\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}\left[\frac{n}{m}\right].$$

NOTE X.

SUR LES FONCTIONS RÉCIPROQUES, ET SUR LES MOYENS QU'ELLES FOURNISSENT D'ÉVALUER LES SOMMES ALTERNÉES DES RACINES PRIMITIVES D'UNE ÉQUATION BINÔME.

f(x) étant une fonction donnée de la variable x, on a généralement, pour une valeur de x, renfermée entre les limites x_0, X [voir le neuvième cahier du *Journal de l'école polytechnique,* et le tome II des *Exercices de mathématiques,* page 118],

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-u)\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(u)\,du\,dr,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(1) \qquad \mathrm{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{x_0}^{X} \cos r(x-u)\,\mathrm{f}(u)\,du\,dr;$$

et pour une valeur de x, située hors des limites x_0, X,

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{x_0}^{X} e^{r(x-u)\sqrt{-1}}\,\mathrm{f}(u)\,du\,dr,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad 0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{x_0}^{X} \cos r(x-u)\,\mathrm{f}(u)\,du\,dr.$$

Ainsi, en particulier, si l'on suppose

$$x_0 = 0, \quad X = \infty,$$

la formule (1) donnera, pour des valeurs positives de x,

$$(3)\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos r(x-u)\,f(u)\,du\,dr;$$

mais on conclura de la formule (2), en y remplaçant x par $-x$,

$$(4)\qquad 0=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos r(x-u)\,f(u)\,du\,dr.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\cos r(x+u)=\cos rx\cos ru+\sin rx\sin ru,$$
$$\cos r(x-u)=\cos rx\cos ru-\sin rx\sin ru,$$

on tirera des équations (3) et (4)

$$(5)\qquad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \cos rx.\cos ru\,f(u)\,du\,dr,$$

$$(6)\qquad f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin rx.\sin ru\,f(u)\,du\,dr.$$

De ces dernières formules, données pour la première fois par M. Fourier, il résulte que, si l'on suppose

$$(7)\qquad \varphi(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \cos rx\,f(r)\,dr,$$

on aura réciproquement

$$(8)\qquad f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \sin rx\,f(r)\,dr,$$

et que, si l'on suppose

$$(9)\qquad \psi(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \sin rx\,f(x)\,dr,$$

on aura réciproquement

$$(10)\qquad f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \sin rx\,f(r)\,dr.$$

On voit donc ici se manifester une loi de réciprocité, 1° entre les fonctions f et φ, 2° entre les fonctions f et ψ, de telle sorte, que chacune des équations (7), (9) subsiste, pour des valeurs positives de x, quand on échange entre elles les fonctions f et φ, ou f et ψ. C'est pour cette raison que, dans le *Bulletin de la Société philomathique* d'août 1817, j'ai désigné les fonctions

$$\mathrm{f}(x), \quad \varphi(x),$$

sous le nom de *fonctions réciproques de première espèce,* et les fonctions

$$\mathrm{f}(x), \quad \psi(x),$$

sous le nom de *fonctions réciproques de seconde espèce.* Ces deux espèces de fonctions peuvent être, ainsi que les formules citées de M. Fourier, employées avec avantage dans la solution d'un grand nombre de problèmes, et jouissent de propriétés importantes, dont je rappellerai quelques-unes en peu de mots.

D'abord, puisqu'on a généralement, pour des valeurs positives de ω,

$$\int_0^\infty e^{-\omega r}\cos rx\,dr = \frac{\omega}{\omega^2+x^2}, \quad \int_0^\infty e^{-\omega r}\sin rx\,dr = \frac{x}{\omega^2+x^2},$$

il en résulte que la fonction

$$\mathrm{f}(x) = e^{-\omega x}$$

a pour réciproque de première espèce

$$\varphi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\omega}{\omega^2+x^2},$$

et pour réciproque de seconde espèce

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\omega^2+x^2}.$$

On a donc par suite

$$(11)\ \int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2+r^2}\cos rx\,dr = \frac{\pi}{2}e^{-\omega},\quad \int_0^\infty \frac{r}{\omega^2+r^2}\sin rx\,dr = \frac{\pi}{2}e^{-\omega}.$$

On se trouve ainsi ramené à deux formules données par M. Laplace. Lorsque, dans la dernière de ces formules, on pose $\omega = 0$, on retrouve la formule connue

$$(12)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin rx}{r}\,dr = \frac{\pi}{2},$$

qui subsiste seulement pour des valeurs positives de la variable x.

Il résulte encore de la formule connue

$$(13)\qquad \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\cos rx\,dr = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

que la fonction

$$e^{-\frac{x^2}{2}},$$

se confond avec sa réciproque de première espèce.

Soit maintenant z une variable, dont le module reste inférieur à l'unité, et a une quantité positive. Si la série

$$\mathrm{f}(0),\quad z\mathrm{f}(a),\quad z^2\mathrm{f}(2a),\ \text{etc}\ldots$$

est convergente, on tirera des formules (8) et (10)

$$(14)\ \mathrm{f}(0)+z\mathrm{f}(a)+z^2\mathrm{f}(2a)+\ldots = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{1-z\cos ar}{1-2z\cos ar+z^2}\,\varphi(r)dr,$$

et

$$(15)\qquad z\mathrm{f}(a)+z^2\mathrm{f}(2a)+\ldots = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{z\sin ar}{1-2z\cos ar+z^2}\,\psi(r)dr.$$

Si d'ailleurs on fait converger z vers la limite 1, le rapport

$$\frac{1-z\cos ar}{1-2z\cos ar+z^2}$$

s'approchera indéfiniment de la limite $\frac{1}{2}$, à moins que l'on n'attribue à r des valeurs peu différentes de celles qui vérifient l'équation

$$\cos ar = 1$$

Or, les racines positives de cette équation seront de la forme

$$r = nb$$

n étant un nombre entier, et b une constante positive liée à la constante a par la formule

$$(16) \qquad ab = 2\pi.$$

Cela posé, on reconnaîtra sans peine [voir le deuxième volume des *Exercices de mathématiques*, page 148 et suivantes] que, si z s'approche indéfiniment de la limite 1, l'intégrale renfermée dans le second membre de la formule (14) aura pour limite, non pas l'expression

$$\int_0^\infty \frac{1}{2}\varphi(r)\,dr = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} f(0),$$

comme on pourrait le croire au premier abord, mais cette expression augmentée de certaines intégrales singulières dont la somme sera

$$\frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(b) + \varphi(2b) + \ldots\text{—}\right].$$

En conséquence on trouvera

$$(17) \quad \frac{1}{2}f(0) + f(a) + f(2a) + \ldots = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(b) + \varphi(2b) + \ldots\right],$$

ou, ce qui revient au même,

$$(18) \quad a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}f(0) + f(a) + f(2a) + \ldots\right] = b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(b) + \varphi(2b) + \ldots\right].$$

Ainsi, lorsque la série

$$f(0),\quad f(a),\quad f(2a),\ldots$$

est convergente, l'équation (18) subsiste entre les fonctions réciproques de première espèce désignées par les lettres f et φ, pourvu que les nombres a, b vérifient la condition (16).

Il importe d'observer que la série

$$\varphi(0),\quad \varphi(b),\quad \varphi(2b),\ldots$$

peut quelquefois se réduire à un nombre fini de termes, et qu'alors l'équation (17) fournit immédiatement la somme de la série

$$f(0),\quad f(a),\quad f(2a),\ldots$$

C'est ce que nous allons montrer par un exemple.

Comme on a généralement

$$\sin \omega r \cos rx = \frac{\sin r(\omega + x) + \sin r(\omega - x)}{2},$$

on en conclura, eu égard à la formule (12),

$$(19)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin \omega r}{r} \cos rx \, dr = \frac{\pi}{2},$$

ou

$$(20)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin \omega r}{r} \cos rx \, dr = 0,$$

suivant que x sera inférieur ou supérieur à ω. Donc, si l'on pose

$$f(x) = \frac{\sin \omega x}{x},$$

on aura

$$\varphi(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ou} \quad \varphi(x) = 0,$$

suivant que la valeur de x sera inférieure ou supérieure à la constante positive ω; et alors, pour réduire l'équation (17) à la formule

$$\frac{1}{2}f(0)+f(a)+f(2a)+\ldots=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi(0)}{a},$$

par conséquent à la formule

$$(21)\qquad \frac{1}{2}a\omega+\sin a\omega+\frac{\sin 2a\omega}{2}+\frac{\sin 3a\omega}{3}+\ldots=\frac{\pi}{2},$$

il suffira de choisir la constante a, de manière à vérifier la condition

$$\omega<b,$$

ou

$$a\omega<2\pi.$$

La formule (21) était déjà connue. Lorsqu'on y pose $a=1$, elle donne, pour des valeurs de ω, renfermées entre les limites $0, 2\pi$,

$$(22)\qquad \frac{1}{2}\omega+\sin\omega+\frac{\sin 2\omega}{2}+\frac{\sin 3\omega}{3}+\ldots=\frac{\pi}{2}.$$

Si, dans la formule (18), on pose

$$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}},$$

elle donnera

$$(23)\qquad a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-\frac{a^2}{2}}+e^{-4\frac{a^2}{2}}+\ldots\right]=b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-\frac{b^2}{2}}+e^{-4\frac{b^2}{2}}+\ldots\right],$$

les nombres a, b étant toujours assujettis à la condition

$$ab=2\pi.$$

Si, dans l'équation (23), on remplace a^2 par $2a^2$, et b^2 par

$2b^2$, on en conclura

$$(24)\qquad a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9b^2}+\ldots\right]=b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\ldots\right]$$

les nombres a, b étant maintenant assujettis à vérifier la condition

$$(25)\qquad ab=\pi.$$

J'ai signalé les formules (18) et (24), avec la méthode par laquelle je viens de les reproduire, dans le *Bulletin de la Société Philomathique* de 1817, et j'ai développé cette méthode dans les leçons données la même année au collége de France. La relation établie par la formule (24) entre les termes des deux séries

$$(26)\qquad 1,\quad e^{-a^2},\quad e^{-4a^2},\quad e^{-9a^2},\ldots$$

$$(27)\qquad 1,\quad e^{-b^2},\quad e^{-4b^2},\quad e^{-9b^2},\ldots$$

parut digne d'attention à l'auteur de la *Mécanique céleste,* qui me dit l'avoir vérifiée dans le cas où l'un des nombres a, b devient très-petit. Effectivement la formule (24), que l'on peut écrire comme il suit

$$(28)\qquad a\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right]=\pi^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}+e^{-4\frac{\pi^2}{a^2}}+\ldots\right],$$

donnera sensiblement, si a se réduit à un très-petit nombre α,

$$\alpha\left(\frac{1}{2}+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}};$$

et, pour vérifier cette dernière équation, il suffit d'observer que, d'après la définition des intégrales définies, le produit

$$\alpha(1+e^{-\alpha^2}+e^{-4\alpha^2}+\ldots),$$

a pour limite

$$(29) \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}.$$

La formule (18), avec la démonstration que nous en avons donnée, peut être étendue, ainsi que la formule (24), à des valeurs imaginaires de a, renfermées entre certaines limites. Ainsi, en particulier, la formule (24) continue de subsister, comme l'a dit M. Poisson, quand on y remplace a^2 par $a^2\sqrt{-1}$. Elle subsiste même généralement, quand on prend pour a^2 une expression imaginaire, pourvu que les parties réelles de a et de b soient nulles ou positives; et l'on peut retrouver aussi une autre formule, déduite par M. Poisson de l'équation (18), dans un Mémoire sur le calcul numérique des intégrales définies. J'ajouterai que, pour arriver au cas où la partie réelle de a s'évanouit, il convient d'examiner d'abord celui où la même partie réelle est infiniment petite, mais positive; et qu'en opérant de cette manière, on peut, de la formule (24), déduire la somme de certaines puissances d'une racine de l'équation binôme

$$(30) \qquad x^n = 1,$$

n étant un nombre entier quelconque; savoir : la somme des puissances qui ont pour exposants les carrés des nombres entiers inférieurs à n. C'est ce que nous allons expliquer plus en détail.

Nommons ρ une racine primitive de l'équation (30). On pourra supposer

$$(31) \qquad \rho = e^{\omega\sqrt{-1}},$$

la valeur de ω étant

$$(32) \qquad \omega = \frac{2\pi}{n},$$

et alors les diverses racines de l'équation (30) pourront être représentées par celles des puissances de ρ, qui offriront des valeurs distinctes; par exemple, par les termes de la progression géométrique

(33) $$1=\rho^0,\ \rho^1,\ \rho^2,\ \rho^3,\ldots\ \rho^{n-1}.$$

Si, dans cette même progression, l'on remplace les exposants

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots\ n-1,$$

par leurs carrés

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ldots\ (n-1)^2,$$

on obtiendra une nouvelle suite; savoir :

(34) $$1,\ \rho,\ \rho^4,\ \rho^9,\ldots\ \rho^{(n-1)^2},$$

et, si l'on nomme Ω la somme des termes de cette nouvelle suite, on aura

(35) $$\Omega=1+\rho+\rho^4+\rho^9+\ldots+\rho^{(n-1)^2},$$

ou, ce qui revient au même

(36) $$\Omega=1+e^{\omega\sqrt{-1}}+e^{4\omega\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(n-1)^2\omega\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, Ω sera évidemment ce que devient la somme des n premiers termes de la série (26), quand on y remplace a^2 par $-\omega\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, lorsqu'on prend

(37) $$a^2=-\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}.$$

Or, dans ce cas, la formule (25), ou

$$a^2b^2=\pi^2,$$

donnera

(38) $$b^2=\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}\ ;$$

et, en adoptant cette valeur de b^2, on verra les termes distincts de la série (27) se réduire aux deux premiers, c'est-à-dire, aux deux termes du binôme

$$1 + e^{-b^2} = 1 + e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}.$$

On doit donc s'attendre à voir l'équation (24) fournir une relation entre la somme représentée par Ω et le binôme dont il s'agit. Or, effectivement, pour obtenir cette relation, il suffira de supposer, dans l'équation (24),

$$(39) \qquad a^2 = \alpha^2 - \frac{2\pi}{n}\sqrt{-1} = \alpha^2 - \omega\sqrt{-1},$$

α^2 désignant un nombre infiniment petit. Dans cette supposition, a^2 différant très-peu de $-\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$, b^2 devra très-peu différer de $\frac{n\pi}{2}\cdot$ Donc, si l'on pose

$$(40) \qquad b^2 = \beta^2 + \frac{n\pi}{2}\sqrt{-1},$$

β^2 s'évanouira en même temps que α^2; et, comme la condition (25) donnera

$$\alpha^2\beta^2 + \left(\frac{n}{2}\alpha^2 - \frac{2}{n}\beta^2\right)\pi\sqrt{-1} = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = \left(1 + \frac{n}{2\pi}\alpha^2\sqrt{-1}\right)^{-1},$$

on en conclura sensiblement

$$(41) \qquad \frac{4\beta^2}{n^2\alpha^2} = 1, \quad \frac{2\beta}{n\alpha} = 1.$$

Concevons maintenant que l'on multiplie par $n\alpha$, et par 2β, les sommes des séries (26) et (27), en ayant égard aux formules (39), (40), et supposant α, β infiniment petits. Comme chacun des produits

$$n\alpha\left[\frac{1}{2}+e^{-n^2\alpha^2}+e^{-4n^2\alpha^2}+\ldots\right],\ n\alpha\left[e^{-\alpha^2}+e^{-(n+1)^2\alpha^2}+\ldots\right],\ n\alpha\left[e^{-(n-1)^2\alpha^2}+e^{-(2n-1)^2\alpha^2}\ldots\right]$$

$$2\beta\left[\frac{1}{2}+e^{-4\beta^2}+e^{-16\beta^2}+\ldots\right],\quad 2\beta\left[e^{-\beta^2}+e^{-9\beta^2}+\ldots\right]$$

se réduira sensiblement à l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}},$$

on trouvera, sans erreur sensible, non-seulement

$$n\alpha\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{\omega\sqrt{-1}}+\ldots+e^{(n-1)^2\omega\sqrt{-1}}\right)$$

ou, ce qui revient au même,

$$n\alpha\left[\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\Omega,$$

mais encore

$$2\beta\left[\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+\ldots\right]=\frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\left(1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right),$$

puis, on en conclura, eu égard à la seconde des formules (41),

$$\frac{\frac{1}{2}+e^{-a^2}+e^{-4a^2}+e^{-9a^2}+\ldots}{\frac{1}{2}+e^{-b^2}+e^{-4b^2}+e^{-9b^2}+\ldots}=\frac{\Omega}{1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}}. \tag{42}$$

D'ailleurs, en vertu de la formule (24) ou (28), le premier membre de l'équation (42) sera équivalent au rapport

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a}.$$

Donc, en supposant les valeurs de a^2, b^2 déterminées par les formules (37), (38), c'est-à-dire, en faisant évanouir α et ε, dans les formules (39), (40), on trouvera

$$\frac{\Omega}{1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a},$$

ou, ce qui revient au même

(43) $$\Omega=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a}\left(1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right).$$

Mais alors de l'équation (37) présentée sous la forme

$$a^2=\frac{2\pi}{n}e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}},$$

on tirera (voyez l'*Analyse algébrique*, chapitre VII et IX)

$$a=\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},\quad \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{a}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}(1+\sqrt{-1}).$$

Donc la formule (43) donnera

(44) $$\Omega=\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}(1+\sqrt{-1})\left(1+e^{-\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}}\right)$$

En conséquence, l'on aura : 1°, si n est de la forme $4x$

(45) $$\Omega=n^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{-1});$$

2°, si n est de la forme $4x+1$,

(46) $$\Omega=n^{\frac{1}{2}};$$

3°, si n est de la forme $4x+2$,

(47) $$\Omega=0;$$

4°, si n est de la forme $4x+3$,

$$(48) \qquad \Omega = n^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}.$$

Ainsi les formules (44), (45), (46), (47), (48) que M. Gauss a établies dans l'un de ses plus beaux mémoires, et dont M. Dirichlet a donné une démonstration nouvelle en 1835, se trouvent comprises, comme cas particuliers dans l'équation (24) de laquelle on déduit immédiatement la formule (44), en attribuant à l'exposant $-a^2$ une valeur infiniment rapprochée de la valeur imaginaire $\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}$, ou, ce qui revient au même, en réduisant l'exponentielle e^{-a^2} à une racine primitive ρ de l'équation (30).

Il est important d'observer que, dans les équations précédentes, la valeur de Ω, déterminée par la formule (35), peut encore s'écrire comme il suit

$$(49) \qquad \Omega = 1 + 2\left(\rho^1 + \rho^4 + \rho^9 + \ldots + \rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}\right),$$

puisque, l étant un entier quelconque inférieur à $\frac{1}{2}n$, on aura généralement

$$(n-l)^2 \equiv l^2, (\text{mod. } n).$$

Nous avons supposé, dans ce qui précède, la valeur de ρ déterminée par la formule (31). Pour savoir ce qui arriverait dans la supposition contraire, il convient d'examiner d'abord séparément le cas où n est un nombre premier impair. Dans ce cas, si l'on nomme

$$h,\ h',\ h'',\ldots$$

les résidus, et

$$k,\ k',\ k'',\ldots,$$

les non résidus, inférieurs à n, les termes de la série

$$\rho^{h},\ \rho^{h'},\ \rho^{h''},\ldots$$

se confondront, à l'ordre près, avec les termes de la série

$$\rho,\ \rho^{4},\ \rho^{9},\ldots\rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2}};$$

et par suite, on aura non-seulement

$$1+\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots+\rho^{k}+\rho^{k'}+\rho^{k''}+\ldots=1+\rho+\rho^{2}+\ldots\rho^{n-1}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$1+\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots=-\rho^{k}-\rho^{k'}-\rho^{k''}-\text{etc.}$$

mais encore

$$\rho+\rho^{4}+\ldots+\rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2}}=\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots$$

Cela posé, la valeur de Ω, donnée par la formule (49), deviendra

(50) $$\Omega=1+2(\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots),$$

ou même

(51) $$\Omega=\rho^{h}+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^{k}-\rho^{k'}-\rho^{k''}-\text{etc.}\ldots$$

D'ailleurs, le second membre de la formule (51) est une fonction alternée des racines primitives de l'équation (30), et si, dans cette fonction, l'on remplace ρ par ρ^{m}, m étant premier à n, elle changera ou ne changera pas de signe, en conservant, au signe près, la même valeur, suivant que m sera ou ne sera pas résidu quadratique (pages 528 et 529). Donc, si n est un nombre premier impair, la valeur de Ω, déterminée par la formule (35) ou (49) ne sera autre chose qu'une fonction alternée des racines primitives de l'équation (30); et la substitution de ρ^m à ρ, dans cette fonction, n'aura d'autre effet que de faire varier la valeur de Ω dans le rapport de 1 à $\left[\frac{m}{n}\right]$. Donc, puisqu'en supposant

$$\rho = e^{\omega\sqrt{-1}}$$

on a, en vertu de la formule (46) ou (48),

$$\Omega = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}, \tag{52}$$

si l'on suppose au contraire

$$\rho = e^{m\omega\sqrt{-1}}, \tag{53}$$

m étant premier à n, on trouvera

$$\Omega = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}, \tag{54}$$

Si m cessait d'être premier à n, c'est-à-dire, s'il était divisible par n, alors la formule (35) donnerait immédiatement

$$\Omega = n. \tag{55}$$

Supposons maintenant que n soit le carré d'un nombre premier ν, en sorte qu'on ait

$$n = \nu^2,$$

Alors ceux des entiers

$$1,\ 2,\ 3, \ldots n-1$$

qui seront divisibles par ν, et dont le nombre sera ν, offriront des carrés divisibles par ν^2 ou n. Donc, dans le second membre de la formule (35), ν puissances de ρ, qui offriront ces carrés pour exposants, se réduiront chacune à l'unité. Si d'ailleurs on continue de nommer

$$h,\ h',\ h'', \ldots$$

les résidus quadratiques inférieurs à n, on obtiendra, au lieu de la formule (50), la suivante

$$(56) \qquad \Omega = \nu + 2(\rho^{h} + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots).$$

Enfin, si ρ désigne une racine primitive de l'équation (1), et si, parmi les résidus quadratiques

$$h,\ h',\ h'',\ldots,$$

relatifs au module

$$n = \nu^2,$$

on considère ceux qui sont équivalents à un même nombre, représentant un résidu quadratique relatif au module ν, ces résidus correspondront à des puissances de ρ, dont la somme sera nulle (page 536). Il y a plus, pour que cette somme s'évanouisse, il ne sera pas nécessaire que ρ désigne une racine primitive de l'équation (1), mais seulement une racine distincte de l'unité. Donc par suite si, n étant le carré d'un nombre premier impair ν, ρ diffère de l'unité, la somme totale des diverses puissances de ρ, qui offriront pour exposants les divers résidus quadratiques s'évanouira, en sorte que l'on aura

$$\rho^{h} + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots = 0,$$

et l'équation (56) donnera simplement

$$(57) \qquad \Omega = \nu.$$

Si ρ se réduisait à l'unité, la même équation donnerait

$$\Omega = n,$$

et l'on se trouverait ainsi ramené à l'équation (55). Au reste il est facile de reconnaître que l'équation (57) se trouve elle-même comprise, comme cas particulier, dans la formule (54), lorsqu'on attribue généralement à la notation $\left[\frac{m}{n}\right]$ le sens que lui donne M. Jacobi, et que l'on pose en conséquence

$$\left[\frac{m}{\nu^2}\right]=\left[\frac{m}{\nu}\right]^2=1.$$

Supposons enfin que n soit une puissance entière d'un nombre premier et impair ν, en sorte qu'on ait

$$n=\nu^a.$$

Alors, par des raisonnements semblables à ceux qui précèdent, l'on prouvera encore que l'équation (54) subsiste, pour des valeurs de m premières à n, pourvu que l'on pose généralement avec M. Jacobi

$$\left[\frac{m}{\nu^a}\right]=\left[\frac{m}{\nu}\right]^a.$$

Effectivement, m étant premier à n, posons

$$\rho^{\nu^{a-1}}=\varsigma.$$

ς sera une racine primitive de l'équation

$$x^\nu=1;$$

et l'on reconnaîtra sans peine 1° que, dans le développement de Ω, la somme des puissances de ρ dont l'exposant est divisible par une puissance de ν d'un degré inférieur à $a-1$ s'évanouit; 2° que la somme des autres termes se réduit, pour des valeurs paires de a, au nombre

$$\nu^{\frac{a}{2}}=n^{\frac{1}{2}},$$

et, pour des valeurs impaires de a, au produit

$$\nu^{\frac{a-1}{2}}\left(1+\varsigma^4+\varsigma^4+\ldots+\varsigma^{(\nu-1)^2}\right).$$

Or, comme on aura

pour $\rho = e^{\omega\sqrt{-1}}\ldots\qquad\qquad\varsigma = e^{\frac{2\pi}{\nu}\sqrt{-1}}$,

et pour $\rho = e^{m\omega\sqrt{-1}}\ldots\qquad\qquad\varsigma = e^{\frac{2m\pi}{\nu}\sqrt{-1}}$,

il en résulte que la somme

$$1 + \varsigma + \varsigma^4 + \ldots + \varsigma^{(\nu-1)^2}$$

se réduira pour

$$\rho = e^{\omega\sqrt{-1}} \quad \text{à} \quad \nu^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2},$$

et pour

$$\rho = e^{m\omega\sqrt{-1}} \quad \text{à} \quad \left[\frac{m}{\nu}\right]\nu^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}.$$

Donc par suite, pour des valeurs impaires de a, le produit

$$\nu^{\frac{a-1}{2}}\left(1 + \varsigma^2 + \varsigma^4 + \ldots + \varsigma^{(\nu-1)^2}\right)$$

se réduira, tant que m et n sont premiers entre eux, à l'expression

$$\left(\frac{m}{\nu}\right)\nu^{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2},$$

qui ne différera pas de la suivante

$$\left(\frac{m}{n}\right)n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2};$$

en sorte que la formule (54) se trouvera encore vérifiée. Par des raisonnements semblables, on déterminera généralement la valeur que prend Ω, lorsque, la valeur de n étant

$$n = \nu^a,$$

m cesse d'être premier à n; et l'on reconnaîtra que, dans ce cas, Ω est le produit d'une certaine puissance de ν par la valeur de Ω qu'on aurait obtenue, si l'on eût substitué au module n le dénominateur de la fraction $\frac{m}{n}$ réduite à sa plus simple expression. Si l'on supposait $m = \nu^a$, on trouverait

$$\rho = 1,$$

et la valeur de Ω serait précisément celle que fournit l'équation (55).

Il est facile de vérifier sur des exemples particuliers les principes généraux que nous venons d'établir. Ainsi l'on trouvera, pour $n = 3$,

$$\Omega = 1 + \rho + \rho^4 = 1 + 2\rho.$$

Donc alors, en supposant

$$\rho = e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad \omega = \frac{2\pi}{3},$$

ou, ce qui revient au même

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

on aura

$$\Omega = 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

tandis qu'en posant successivement

$$\rho = e^{2\omega\sqrt{-1}} = -\frac{1}{2} - \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2}\sqrt{-1},$$

et

$$\rho = 1,$$

on trouvera, dans le premier cas,

$$\Omega = -3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = \left[\frac{2}{3}\right] 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et dans le second cas

$$\Omega = 3.$$

On trouvera de même, pour $n = 5$,

$$\Omega = 1 + \rho^4 + \rho^4 + \rho^3 + \rho^{16} = 1 + 2\rho + 2\rho^4.$$

Donc alors, en supposant

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{5}\sqrt{-1}} = \cos\frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{5},$$

on aura

$$\Omega = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5} = 5^{\frac{1}{2}},$$

tandis qu'en posant successivement

$$\rho = e^{2\omega\sqrt{-1}}, \quad \rho = e^{3\omega\sqrt{-1}}, \quad \rho = e^{4\omega\sqrt{-1}}, \quad \rho = 1,$$

on trouvera, dans le premier et le second cas,

$$\rho = 1 + 4\cos\frac{4\pi}{5} = 1 + 4\cos\frac{6\pi}{5} = -5^{\frac{1}{2}},$$

ou, cequi revient au même

$$\rho = \left[\frac{2}{5}\right]5^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{3}{5}\right]5^{\frac{1}{2}};$$

dans le troisième cas

$$\rho = 1 + 4\cos\frac{8\pi}{5} = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5} = 5^{\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\rho = \left[\frac{4}{5}\right]5^{\frac{1}{2}};$$

et dans le dernier cas

$$\rho = 5.$$

De même on trouvera, pour $x = 9 = 3^2$,

$$\Omega = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \ldots + \rho^{64} = 3 + 2(\rho + \rho^4 + \rho^7) = 3 + 2\rho\,\frac{\rho^9 - 1}{\rho^3 - 1} = 3;$$

et par suite

$$\Omega = 3 = 9^{\frac{1}{2}},$$

à moins que ρ ne se réduise à l'unité, et la valeur de Ω à celle que donne la formule

$$\Omega = 9.$$

Si au contraire l'on prend $x = 27 = 2^0$, on trouvera

$$\Omega = 1 + \rho + \rho^4 + \ldots + \rho^{26^2} = 3 + 6\rho^9 + 2\rho(1 + \rho^3 + \ldots + \rho^{24});$$

et par suite, en supposant

$$\rho = e^{\omega\sqrt{-1}} = e^{\frac{2\pi}{27}\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\Omega = 3(1 + 2\rho^2),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Omega = 3(1 + 2e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}) = 3.3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = 27^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

tandis que, si l'on pose

$$\rho = e^{m\omega\sqrt{-1}},$$

m étant premier à 3, l'on trouvera

$$\Omega = 3^{\frac{1}{2}}\left(1 + 2\cos\frac{2m\pi}{3}\sqrt{-1}\right) = \left[\frac{m}{3}\right] 27^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Omega = \left[\frac{m}{27}\right] 27^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

Si m cessait d'être premier à 27, alors on trouverait 1°, en supposant m divisible une seule fois par 3,

$$\Omega = 3 + 6\rho^{27} = 9;$$

2° en supposant m divisible par $3^2=9$,

$$\Omega=3+6+2.9=27.$$

Passons maintenant au cas où le module se réduit à 2 ou à une puissance de 2.

Lorsqu'on a précisément $n=2$, l'équation

$$x^2=1,$$

offre pour racines

$$-1, \quad +1;$$

et par suite la valeur de

$$\Omega=1+\rho$$

se réduit à zéro ou à 2, suivant que l'on prend pour ρ la racine positive ou la racine négative. Dans le premier cas, on retrouve la formule (55).

Lorsqu'on suppose $x=2^2=4$, l'équation

$$x^4=1,$$

a, pour racines primitives,

$$\rho=e^{\omega\sqrt{-1}}=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=\sqrt{-1},$$

et

$$\rho=e^{3\omega\sqrt{-1}}=e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}.$$

Alors les valeurs de Ω que fournit l'équation

$$\Omega=1+\rho+\rho^4+\rho^9=2(1+\rho),$$

quand on y pose successivement

$$\rho=\sqrt{-1}, \quad \rho=-\sqrt{-1},$$

sont

$$\Omega=2(1+\sqrt{-1}),$$
$$\Omega=2(1-\sqrt{-1}).$$

La première de ces valeurs est, comme on devait s'y attendre, celle que fournirait l'équation (45). Si l'on prenait pour ρ, non plus une racine primitive de l'équation

$$x^4 = 1,$$

mais l'une des deux autres racines -1, 1, la formule

$$\Omega = 2(1 + \rho)$$

donnerait, pour $\rho = -1$,

$$\Omega = 0,$$

et pour $\rho = 1$,

$$\Omega = 2 . 2 = 4.$$

Lorsqu'on suppose $n = 2^3 = 8$, l'équation

$$x^8 = 1$$

a pour racines primitives les expressions imaginaires

$$e^{\omega\sqrt{-1}}, \quad e^{3\omega\sqrt{-1}}, \quad e^{5\omega\sqrt{-1}}, \quad e^{7\omega\sqrt{-1}},$$

l'arc ω étant $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, ou, ce qui revient au même, les expressions imaginaires

$$\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}}, \quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}}, \quad \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}}, \quad \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{-2}};$$

et, si l'on prend alors pour ρ l'une de ces expressions, la valeur de Ω, généralement déterminée par la formule

$$\Omega = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \rho^{16} + \rho^{25} + \rho^{36} + \rho^{49} = 2(1 + 2\rho + \rho^4),$$

se réduira simplement à

$$4\rho = 8^{\frac{1}{2}}(\pm 1 \pm \sqrt{-1}).$$

Lorsque, dans ce dernier produit, on réduit chaque double signe au signe $+$, on retrouve, comme on devait s'y attendre, la valeur de Ω fournie par l'équation (45). Si l'on prenait pour ρ une racine non primitive de l'équation

$$x^8 = 1,$$

c'est-à-dire l'une des racines

$$\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}, \quad -1, \quad 1,$$

qui vérifient l'équation de degré moindre

$$x^4 = 1,$$

la valeur de Ω, réduite à

$$4(1 + \rho),$$

serait évidemment double de celle qu'on aurait trouvée en supposant, non plus $n = 8$, mais $n = 4$.

On obtiendrait avec la même facilité les valeurs de Ω correspondantes à $n = 2^4 = 16$, à $n = 2^5 = 32$, etc...

Concevons maintenant que n, cessant de représenter un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre, désigne le produit de plusieurs facteurs premiers

$$\nu, \nu'. \nu'', \ldots,$$

élevés à des puissances entières, dont les degrés soient respectivement

$$a, b, c, \ldots,$$

en sorte que l'on ait

$$n = \nu^a \nu'^b \nu''^c, \ldots \tag{58}$$

Alors, en vertu du quatrième théorème de la note VI, si l'on représente par ρ une racine primitive de l'équation (1), ρ sera de la forme

$$(59) \qquad \rho = \xi\eta\zeta\ldots,$$

chacun des facteurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ désignant une racine primitive de la première, ou de la seconde, ou de la troisième, ... des équations

$$(60) \qquad x^{\nu^a} = 1, \quad x^{\nu'^b} = 1, \quad x^{\nu''^c} = 1, \quad \text{etc.}\ldots;$$

et les n racines de l'équation (1) seront les n valeurs qu'on obtient pour ρ^l, en prenant successivement pour l tous les entiers

$$0, 1, 2, 3, \ldots n-1$$

inférieurs à n. Soient d'ailleurs

$$\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$$

les restes qu'on obtient en divisant successivement l'exposant l par les divers facteurs

$$\nu^a, \nu'^b, \nu''^c, \ldots$$

de l'exposant n. Comme les valeurs de λ seront en nombre égal à ν^a, les valeurs de λ' en nombre égal à ν'^b, les valeurs de λ'' en nombre égal à $\nu''^c, \ldots$ les systèmes de valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ seront en nombre égal au produit

$$\nu^a \nu'^b \nu''^c \ldots = n,$$

c'est-à-dire, en même nombre que les valeurs de l. Donc à chaque valeur de l correspondra un seul système de valeurs de $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ et réciproquement. Ce n'est pas tout. Comme les formules

$$l \equiv \lambda, \ (\text{mod. } \nu^a), \quad l \equiv \lambda', \ (\text{mod. } \nu'^b), \quad l \equiv \lambda'', \ (\text{mod. } \nu''^c), \ldots$$

entraîneront évidemment les suivantes

$$l^{\iota} \equiv \lambda^{\iota}, \ (\text{mod. } \nu^{a}), \quad l^{\iota} \equiv \lambda'^{\iota}, \ (\text{mod. } \nu'^{b}), \quad l^{\iota} \equiv \lambda''^{\iota}, \ (\text{mod. } \nu''^{c}), \ldots$$

quel que soit l'entier désigné par ι, on peut affirmer que l'équation (59) entraînera non-seulement la formule

$$(61) \qquad \rho^{l} = \xi^{\lambda} \eta^{\lambda'} \zeta^{\lambda''} \ldots,$$

mais encore la suivante

$$(62) \qquad \rho^{l^{\iota}} = \xi^{\lambda^{\iota}} \eta^{\lambda'^{\iota}} \xi^{\lambda''^{\iota}} \ldots$$

Donc, en posant, pour abréger,

$$\nu^{a} = \varphi, \quad \nu'^{b} = \chi, \quad \nu''^{c} = \psi, \ldots$$

on aura non-seulement

$$(63) \qquad 1 + \rho + \rho^{2} + \rho^{3} + \ldots + \rho^{n-1} =$$
$$(1 + \xi + \xi^{2} + \xi^{3} + \ldots + \xi^{\varphi-1})(1 + \eta + \eta^{2} + \eta^{3} + \ldots + \eta^{\chi-1}) \ldots,$$

mais encore

$$(64) \qquad 1 + \rho + \rho^{2^{\iota}} + \rho^{3^{\iota}} + \ldots + \rho^{(n-1)^{\iota}} =$$
$$(1 + \xi + \xi^{2^{\iota}} + \xi^{3^{\iota}} + \ldots + \xi^{(\varphi-1)^{\iota}})(1 + \eta + \eta^{2^{\iota}} + \eta^{3^{\iota}} + \ldots + \eta^{(\chi-1)^{\iota}}) \ldots$$

Ainsi, en particulier, en prenant $\iota = 2$, on trouvera

$$(65) \qquad 1 + \rho + \rho^{4} + \rho^{9} + \ldots + \rho^{(n-1)^{2}} =$$
$$(1 + \xi + \xi^{4} + \xi^{9} + \ldots + \xi^{(\varphi-1)^{2}})(1 + \eta + \eta^{4} + \eta^{9} + \ldots + \eta^{(\chi-1)^{2}}) \ldots$$

De cette dernière formule, que M. Gauss a établie comme nous venons de le faire, il résulte évidemment qu'une valeur de Ω, correspondante à une valeur donnée du degré n de l'équation (30), est le produit de divers facteurs dont chacun représente une valeur de Ω correspondante, non plus au degré donné n et à l'équation (30), mais à l'un des degrés $\nu^{a}, \nu'^{b}, \nu''^{c}, \ldots$ et à l'une des équations (60). Donc, puisque nous avons appris à trouver la valeur de Ω correspondante au cas où n est une puissance d'un nombre premier, la formule (65) offrira le moyen d'obtenir la valeur de Ω dans tous les cas possibles.

Considérons en particulier le cas où n est un nombre impair composé de facteurs impairs inégaux

$$\nu,\ \nu',\ \nu'',\ldots$$

en sorte qu'on ait simplement

$$\nu\nu'\nu''\ldots = n.$$

Alors les équations (60) deviendront

$$(66)\qquad x^{\nu}=1,\quad x^{\nu'}=1,\quad x^{\nu''}=1,\ldots;$$

par conséquent la formule (65) sera réduite à

$$(67)\qquad 1+\rho+\rho^4+\rho^9+\ldots+\rho^{(n-1)^2}=$$
$$(1+\xi+\xi^4+\xi^9+\ldots+\xi^{(\nu-1)^2})(1+\eta+\eta^4+\eta^9+\ldots+\eta^{(\nu'-1)^2})\ldots,$$

et l'on conclura de cette formule que la valeur de Ω, correspondante à l'équation (30), est le produit de facteurs dont chacun représente une valeur de Ω correspondante à l'une des équations (66). D'ailleurs, d'après ce qui a été dit plus haut, le premier, le second, le troisième... de ces facteurs représenteront des sommes alternées des racines primitives de la première, de la seconde, de la troisième... des équations (66). Donc, le produit de ces mêmes facteurs, ou la valeur de Ω correspondante à l'équation (30), représentera une somme alternée des racines primitives de cette équation ; et, en raisonnant comme à la page 569, on reconnaîtra facilement que la formule (52) entraîne encore, dans le cas dont il s'agit, la formule (54).

Pour montrer une application de la formule (67), supposons en particulier

$$n = 15 = 3.5.$$

Alors on trouvera

$$\Omega = 1 + \rho + \rho^4 + \rho^9 + \ldots + \rho^{14^2} = 1 + 4\rho + 4\rho^4 + 2\rho^6 + 2\rho^9 + 2\rho^{10}$$
$$= (1 + 2\rho^{10})(1 + 2\rho^6 + 2\rho^9);$$

et par suite, si l'on pose

$$\xi = \rho^{10}, \quad \eta = \rho^6,$$

on aura

$$\Omega = (1 + 2\xi)(1 + 2\eta + 2\eta^4),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Omega = (1 + \xi + \xi^4)(1 + \eta + \eta^4 + \eta^9 + \eta^{16})$$

attendu que, ρ étant racine de l'équation

$$x^{15} = 1,$$

$\xi = \rho^{10}$ sera racine de l'équation

$$x^3 = 1,$$

et $\eta = \rho^6$ racine de l'équation

$$x^5 = 1.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{15}\sqrt{-1}} = \cos\frac{2\pi}{15} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{15},$$

on trouvera

$$\xi = e^{\frac{4\pi}{3}\sqrt{-1}}, \quad \eta = e^{\frac{4\pi}{5}\sqrt{-1}}$$

$$1 + 2\xi = -3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad 1 + 2\eta + 2\eta^4 = -5^{\frac{1}{2}},$$

et par suite on aura, conformément à l'équation (52),

$$\Omega = (-3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1})(-5^{\frac{1}{2}}) = 15^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

80.

NOTE XI.

MÉTHODE SIMPLE ET NOUVELLE POUR LA DÉTERMINATION COMPLÈTE DES SOMMES ALTERNÉES, FORMÉES AVEC LES RACINES PRIMITIVES DES ÉQUATIONS BINÔMES.

Soit

$$\rho$$

une racine primitive de l'équation

$$x^n = 1, \tag{1}$$

et supposons d'abord que n soit un nombre premier impair. Les diverses racines primitives de l'équation (1) pourront être représentées par

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1},$$

ou par

$$\rho^m, \rho^{2m}, \rho^{3m}, \ldots \rho^{(n-1)m},$$

m étant premier à n. Soit d'ailleurs ϖ une somme alternée de ces racines primitives. Cette somme sera de la forme

$$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots, \tag{2}$$

les exposants

$$1, 2, 3, \ldots n-1$$

étant ainsi partagés en deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

dont le premier pourra être censé renfermer les résidus quadratiques

$$1, 4, \text{etc}\ldots$$

et le second les non-résidus suivant le module n. Si l'on suppose en particulier $n = 3$, on aura simplement

$$\text{Ⓓ} = \rho^1 - \rho^2 = \rho^1 - \rho^{-1},$$

en sorte qu'une somme alternée Ⓓ pourra être représentée, au signe près, par le binôme

$$\rho^1 - \rho^{-1},$$

ou plus généralement par le binôme

$$\rho^m - \rho^{-m}$$

m étant non divisible par 3. Si n devient égal à 5, les binômes de la forme $\rho^m - \rho^{-m}$ se réduiront, au signe près, à l'un des suivants

$$\rho^1 - \rho^4 = \rho^1 - \rho^{-1}, \quad \rho^2 - \rho^3 = \rho^2 - \rho^{-2},$$

et le produit de ces deux derniers binômes, savoir,

$$(\rho^1 - \rho^4)(\rho^2 - \rho^3) = \rho^2 + \rho^3 - \rho - \rho^4$$

représentera encore, au signe près, la somme alternée

$$\text{Ⓓ} = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$

qui pourra s'écrire comme il suit

$$\text{Ⓓ} = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3}).$$

J'ajoute qu'il en sera généralement de même, et que, pour une valeur quelconque du nombre premier n, la somme alternée Ⓓ pourra être réduite au produit $\mathfrak{P}$ déterminé par la formule

(3) $$\mathfrak{P} = (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3})\ldots(\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}).$$

Effectivement, ce produit, égal, au signe près, au suivant

$$(\rho^1 - \rho^n)(\rho^2 - \rho^{n-2})\ldots(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{\frac{n+1}{2}}),$$

changera tout au plus de signe, quand on y remplacera ρ par ρ^m, attendu qu'alors les termes de la suite

$$\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^{n-1}$$

se trouveront remplacés par les termes de la suite

$$\rho^m, \rho^{2m}, \rho^{3m}, \ldots \rho^{(n-1)m},$$

qui sont les mêmes, à l'ordre près, et chaque binôme de la forme

$$\rho^l - \rho^{-l}$$

par un binôme de la même forme

$$\rho^{ml} - \rho^{-ml}.$$

Donc le produit $\mathfrak{P}$ ne pourra représenter qu'une fonction symétrique ou une fonction alternée des racines primitives de l'équation (1). Donc il sera de l'une des formes

$$\mathrm{a}, \quad \mathrm{a}\omega,$$

a désignant une quantité entière positive ou négative, et son carré $\mathfrak{P}^2$ sera de l'une des formes

$$\mathrm{a}^2, \quad \mathrm{a}^2\omega^2.$$

Comme on tirera d'ailleurs de l'équation (3), non-seulement

$$\mathfrak{P} = \rho^{1+3+5+\ldots+(n-2)}(1 - \rho^{-2})(1 - \rho^{-6})\ldots(1 - \rho^{-2(n-2)}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathfrak{P} = \rho^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}(1 - \rho^{n-2})(1 - \rho^{n-6})\ldots(1 - \rho^4),$$

mais encore

$$\mathfrak{P} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \rho^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} (1-\rho^2)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-4}),$$

et par suite

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^2 &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1-\rho^2)(1-\rho^4)(1-\rho^6)\ldots(1-\rho^{n-6})(1-\rho^{n-4})(1-\rho^{n-2}) \\ &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} (1-\rho)\,(1-\rho^2)\ldots(1-\rho^{n-1}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n;\end{aligned}$$

il est clair que $\mathfrak{P}^2$, n'étant pas de la forme a^2, devra être de la forme $\mathrm{a}^2\mathfrak{D}^2$. On aura donc

$$(4) \qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n = \mathrm{a}^2\mathfrak{D}^2, \quad \mathfrak{P} = \mathrm{a}\mathfrak{D}.$$

Or, $\mathfrak{D}^2$ ne pouvant être qu'une fonction symétrique de $\rho, \rho^2, \ldots \rho^{n-1}$, et par conséquent un nombre entier, la seule manière de vérifier la première des équations (4), sera de poser

$$\mathrm{a}^2 = 1, \quad \mathfrak{D}^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n.$$

On aura donc

$$\mathrm{a} = \pm 1,$$

par conséquent

$$(5) \qquad \mathfrak{P} = \pm \mathfrak{D};$$

et toute la difficulté se réduit à déterminer le signe qui doit affecter le second membre de la formule (5). Or, si, dans la somme alternée

$$\mathfrak{D} = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \text{etc.},$$

on remplace généralement

$$\rho^l \quad \text{par} \quad \left[\frac{l}{n}\right],$$

cette somme sera remplacée elle-même par la suivante

$$\left[\frac{h}{n}\right]+\left[\frac{h'}{n}\right]+\ldots-\left[\frac{k}{n}\right]-\left[\frac{k'}{n}\right]-\text{etc.}=n-1\equiv-1,\ (\text{mod. } n)$$

tandis que la somme alternée $\mathfrak{D}$ se changera en

$$-(n-1)\equiv 1,\ (\text{mod. } n).$$

Donc, pour décider si, dans la formule (5), on doit réduire le double signe au signe $+$ ou au signe $-$, il suffira de chercher la quantité en laquelle se transforme le développement de $\mathfrak{T}$, quand on y remplace chaque terme de la forme ρ^l par $\left[\frac{l}{n}\right]$, et de voir si cette quantité, divisée par n, donne pour reste -1 ou $+1$. Or, comme le développement de $\mathfrak{T}$ se composera de termes de la forme

$$\pm\rho^{\pm 1\pm 3\pm 5\pm\ldots},$$

le signe qui précède ρ étant le produit des signes qui, dans l'exposant de ρ, précèdent les nombres $1, 3, 5,\ldots$; la quantité dont il s'agit sera la somme des expressions de la forme

$$\pm\left[\frac{\pm 1\pm 3\pm 5\pm\ldots}{n}\right],$$

le signe placé en dehors des parenthèses étant le produit des signes placés au dedans. Elle sera donc équivalente, suivant le module n, à la somme des expressions de la forme

$$(6)\qquad \pm(\pm 1\pm 3\pm 5\pm\ldots\pm(n-2))^{\frac{n-1}{2}}.$$

Ainsi, en particulier, elle sera équivalente, pour $n=3$, à

$$1^1-(-1)^1=2\equiv-1,\ (\text{mod. } 3);$$

pour $n=5$, à

$$(1+3)^2+(-1-3)^2-(-1+3)^2-(1-3)^2\equiv 4\equiv-1,(\text{mod. } 5).$$

D'ailleurs, si l'on suppose le nombre des lettres $a, b, c, \ldots$ égal à m, la somme des expressions de la forme

$$\pm(\pm a \pm b \pm c \pm \ldots)^m, \tag{7}$$

développées suivant les puissances ascendantes de $a, b, c, \ldots$ ne pourra renfermer aucun terme dans lequel l'exposant de a, ou de b, ou de c, s'évanouisse. En effet, comme, dans cette somme, deux expressions qui ne différeront l'une de l'autre que par le signe placé devant la lettre a, présenteront, en dehors des parenthèses, des signes contraires, elles fourniront deux développements, dont les divers termes se détruiront mutuellement, à l'exception de ceux qui renfermeront des puissances impaires de a. Donc, chacun des termes qui resteront dans la somme dont il s'agit, sera proportionnel à une puissance impaire de a; et, comme il devra être, par la même raison, proportionnel à une puissance impaire de b, à une puissance impaire de $c, \ldots$, il est clair que, dans un terme conservé, ces diverses puissances, dont les exposants auront pour somme le nombre m, devront toutes se réduire à la première puissance, et chaque exposant à l'unité. Donc, les seuls termes qui ne se détruiront pas les uns les autres, seront les termes proportionnels au produit

$$abc \ldots$$

de toutes les lettres $a, b, c, \ldots$; et, puisque chacune des valeurs de l'expression (7) offre dans son développement un semblable terme, précisément égal au produit

$$1.2.3 \ldots m\, abc \ldots,$$

il suffira, pour obtenir la somme de ces valeurs, de multiplier leur nombre 2^m par ce même produit. Donc la somme des valeurs de l'expression (7) sera

$$2^m(1.2.3\ldots m)abc\ldots$$

Si maintenant on remplace

$$a, b, c, \ldots$$

par les nombres

$$1, 3, 5, \ldots 2m-1,$$

le produit

$$2^m(1.2.3\ldots m)abc\ldots$$

deviendra

$$2^m(1.2.3\ldots m)\,1.3.5\ldots(2m-1)=1.2.3.4\ldots 2m.$$

Donc, en écrivant $\frac{n-1}{2}$ au lieu de m, on reconnaîtra que la somme des expressions (6) a pour valeur le produit

$$1.2.3\ldots(n-1)\equiv -1, \text{ (mod. } n).$$

Donc $\mathfrak{P}$ se transformera en une somme équivalente à -1, si l'on y remplace généralement

$$\rho^l \quad \text{par} \quad \left[\frac{l}{n}\right];$$

d'où il suit que l'équation (5) devra être réduite à

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{Q}. \tag{8}$$

En d'autres termes, on aura

$$(\rho^1-\rho^{-1})(\rho^3-\rho^{-3})\ldots(\rho^{n-2}-\rho^{-(n-2)})=\rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^k-\rho^{k'}-\rho^{k''}\ldots, \tag{9}$$

$h, h', h'', \ldots$ étant les résidus quadratiques, et $k, k', k'', \ldots$ les non résidus quadratiques inférieurs au module n. On se trouve ainsi ramené à la belle formule que M. Gauss a donnée le premier dans le mémoire intitulé : *Summatio serierum quarumdam singularium,* et qui convertit la somme alternée

$$\omega = \rho^{h} + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^{k} + \rho^{k'} + \rho^{k''} \ldots$$

dont le carré ω^2 vérifie l'équation

$$(10) \qquad \omega^2 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n,$$

en un produit de la forme

$$(\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^3 - \rho^{-3}) \ldots (\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)}).$$

Or, cette conversion une fois opérée, il devient facile, comme l'on sait, d'assigner, dans tous les cas, la valeur exacte de la somme alternée ω. On y parvient, en effet, comme il suit.

Observons d'abord qu'en vertu des formules

$$\rho^{n-2} - \rho^{-(n-2)} = -(\rho^2 - \rho^{-2}), \quad \rho^{n-4} - \rho^{-(n-4)} = -(\rho^4 - \rho^{-4}), \ldots$$

le premier membre de l'équation (9), ou la valeur de la somme ω, se réduira, 1°, si n est de la forme $4x + 1$, à

$$(11) \qquad \omega = (-1)^{\frac{n-1}{4}} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots (\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}});$$

2°, si n est de la forme $4x + 3$, à

$$(12) \qquad \omega = (-1)^{\frac{n-3}{4}} (\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2}) \ldots (\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}),$$

attendu que le nombre des entiers pairs, et inférieurs à $\frac{1}{2}n$, sera

$$\frac{1}{2}\,\frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{4}, \qquad \text{si } \frac{n-1}{2} \text{ est pair,}$$

et

$$\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2} - 1\right) = \frac{n-3}{4}, \quad \text{si } \frac{n-1}{2} \text{ est impair.}$$

D'autre part, si l'on pose

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}, \tag{13}$$

on en conclura généralement

$$\rho^l - \rho^{-l} = 2\sin\frac{2l\pi}{n}\sqrt{-1}; \tag{14}$$

et il est clair que, pour toute valeur de l inférieur à $\frac{1}{2}n$, le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans le second membre de l'équation (14), sera une quantité positive. Enfin, l'on tirera de l'équation (14), 1°, en supposant n de la forme $4x+1$

$$(\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2})\ldots(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}) = (-1)^{\frac{n-1}{4}}\, 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}; \tag{15}$$

2°, en supposant n de la forme $4x+3$.

$$(\rho^1 - \rho^{-1})(\rho^2 - \rho^{-2})\ldots(\rho^{\frac{n-1}{2}} - \rho^{-\frac{n-1}{2}}) = (-1)^{\frac{n-3}{4}}\, 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}\sqrt{-1}. \tag{16}$$

Donc, si l'on attribue à ρ la valeur que détermine l'équation (13), on tirera des formules (11) et (12), 1°, en supposant n de la forme $4x+1$,

$$ⓐ = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}; \tag{17}$$

2°, en supposant n de la forme $4x+3$,

$$ⓐ = 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}\sqrt{-1}. \tag{18}$$

Or, en substituant l'une de ces dernières valeurs de la somme alternée ⓐ dans la formule (10), on en conclura que le produit

$$2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{4\pi}{n}\ldots\sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n}$$

a pour carré le nombre n. Donc ce produit, qui ne renferme que des facteurs positifs, sera lui-même positif, et égal à $n^{\frac{1}{2}}$. On aura donc, quel que soit le nombre premier n, pourvu qu'il surpasse 2,

$$(19) \qquad 2^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2\pi}{n} \sin\frac{4\pi}{n} \ldots \sin\frac{\frac{n-1}{2}\pi}{n} = n^{\frac{1}{2}},$$

et, par conséquent, les équations (17), (18) se réduiront, la première à

$$(20) \qquad \mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}},$$

la seconde à

$$(21) \qquad \mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

en sorte que l'une et l'autre seront comprises dans la formule

$$(22) \qquad \mathfrak{S} = n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Si maintenant on veut obtenir la valeur de $\mathfrak{S}$ correspondante à la valeur de ρ que détermine, non plus la formule (15), mais la suivante

$$(23) \qquad \rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m étant un entier quelconque non divisible par n, il suffira évidemment de remplacer, dans la valeur de $\mathfrak{S}$ que fournit l'équation (22), ρ par ρ^m, ou, ce qui revient au même, il suffira de multiplier cette valeur par

$$\left[\frac{m}{n}\right].$$

Donc, lorsque la valeur ρ sera donnée par l'équation (23), m étant premier à n, la valeur de la somme alternée $\mathfrak{S}$ deviendra

$$(24) \qquad \varpi = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Les formules (21), (24) s'accordent avec les formules (52), (54) de la note précédente; et cela devait être, puisqu'en vertu de la formule (51) de la même note les sommes désignées par Ω et par ϖ sont toujours égales, quand n, étant un nombre premier impair, ρ désigne une racine primitive de l'équation (1).

Il n'en serait plus de même si, dans les sommes Ω et ϖ, on remplaçait ρ par la racine non primitive de l'équation (1), c'est-à-dire, par l'unité, puisqu'alors évidemment la somme Ω se réduirait au nombre n, et le second membre de l'équation (2) à zéro.

Les formules (22), (24) une fois établies pour le cas où n désigne un nombre premier supérieur à 2, il est facile de les étendre au cas où n désigne un nombre impair composé de facteurs premiers inégaux. Ainsi, en particulier, soit

$$n = \nu\nu';$$

et supposons que, ξ, η étant des racines primitives des deux équations

$$(25) \qquad x^{\nu} = 1, \quad x^{\nu'} = 1,$$

l'on pose

$$(26) \qquad \rho = \xi\eta.$$

ρ sera une racine primitive de l'équation (1); et, si l'on nomme

$$\varpi, \quad \Delta, \quad \Delta'$$

trois sommes alternées, formées avec les racines primitives des trois équations

$$x^n = 1, \quad x^\nu = 1, \quad x^{\nu'} = 1,$$

de telle manière que, parmi les termes affectés du signe $+$, on trouve dans la somme alternée ϖ le terme ρ, dans la somme Δ le terme ξ, dans la somme Δ' le terme η, on aura, en vertu des principes établis dans la note VII,

$$\varpi = \Delta\Delta'. \tag{27}$$

Soit d'ailleurs m un nombre entier, premier à ν et à ν', par conséquent premier à n; et supposons que, dans les sommes alternées

$$\varpi, \quad \Delta, \quad \Delta',$$

on remplace

$$\rho, \quad \xi, \quad \eta,$$

par

$$\rho^m, \quad \xi^m, \quad \varsigma^m.$$

Les valeurs de

$$\varpi, \quad \Delta, \quad \Delta',$$

ne cesseront pas de vérifier la condition (27); et, comme, en vertu des principes établis dans la note VIII, les valeurs de

$$\Delta, \quad \Delta'$$

se trouveront multipliées par les quantités

$$\left[\frac{m}{\nu}\right], \quad \left[\frac{m}{\nu'}\right]$$

dont chacune se réduit, au signe près, à l'unité, la valeur de ϖ se trouvera multipliée par le produit

$$\left[\frac{m}{\nu}\right]\left[\frac{m}{\nu'}\right] = \left[\frac{m}{n}\right].$$

Donc, la substitution de ρ^m à ρ changera ou ne changera pas le signe de la somme alternée ϖ, suivant que le nombre m vérifiera la première ou la seconde des conditions

$$\left[\frac{m}{n}\right] = -1, \quad \left[\frac{m}{n}\right] = 1.$$

Concevons à présent que l'on pose

$$\xi = e^{\frac{2\pi}{\nu}\sqrt{-1}}, \quad \eta = e^{\frac{2\pi}{\nu'}\sqrt{-1}},$$

l'équation (26) donnera

$$\rho = e^{\frac{2\pi(\nu-\nu')}{n}\sqrt{-1}};$$

et, comme on aura, en vertu de la formule (22)

$$\Delta = \nu^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2}, \quad \Delta'' = \nu'^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2},$$

on conclura de l'équation (27)

$$(28) \qquad \varpi = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(29) \qquad \varpi = (-1)^{\frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2},$$

attendu que l'on a identiquement

$$\left(\frac{\nu-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\nu'-1}{2}\right)^2 = \frac{\nu-1}{2}\frac{\nu'-1}{2} = \left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2.$$

Il y a plus : comme les nombres

$$\frac{\nu-\nu'}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\nu\nu'-1}{2}$$

dont la somme

$$\frac{(\nu-1)(\nu'-1)}{2},$$

est divisible par 2, seront tous deux pairs ou tous deux impairs, on aura

$$(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu-\nu'}{2}\right)^2}=(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\nu\nu'-1}{2}\right)^2}=(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Donc la formule (29) pourra être réduite à

$$\varpi=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}\,\frac{\nu'-1}{2}}\,n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}. \tag{30}$$

Cette dernière équation suppose que, dans la somme alternée ϖ, l'un des termes précédés du signe $+$, est

$$\rho=e^{\frac{2\pi(\nu+\nu')}{n}\sqrt{-1}}.$$

Si à la valeur de ϖ, fournie par l'équation (30), on veut comparer celle qu'on obtiendrait en prenant pour l'un des termes précédés du signe $+$ la valeur de ρ déterminée par la formule

$$\rho=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on conclura des observations précédemment faites, que chacune de ces deux valeurs de ϖ est le produit de l'autre par l'expression

$$\left[\frac{\nu+\nu'}{n}\right]=\left[\frac{\nu+\nu'}{\nu\nu'}\right]=\left[\frac{\nu}{\nu'}\right]\left[\frac{\nu'}{\nu}\right]=(-1)^{\frac{\nu-1}{2}\,\frac{\nu'-1}{2}}.$$

Donc, puisque la première valeur est donnée par la formule (30), la seconde sera fournie simplement par l'équation

$$\varpi=n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}; \tag{31}$$

et si, au lieu de poser

$$\rho=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on pose plus généralement

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on devra multiplier par $\left[\frac{m}{n}\right]$ le second membre de la formule (31), qui deviendra

$$(32) \qquad \varpi = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}} (\sqrt{-1})^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

Les formules (31) et (32) ne sont autre chose que les formules (22) et (24), étendues au cas où n est le produit de deux facteurs impairs et premiers ν, ν'. Il y a plus : les raisonnements dont nous avons fait usage suffisent pour étendre les formules (22), (24) au cas où n est le produit de deux facteurs impairs quelconques, pourvu que ces facteurs soient premiers entre eux, quand on suppose ces mêmes formules séparément vérifiées pour des valeurs de n représentées par chacun de ces facteurs. Donc, puisque,

$$\nu, \ \nu', \ \nu'', \ldots$$

étant des nombres premiers impairs, les formules (22), (24) se vérifient quand on prend

$$n = \nu, \quad n = \nu', \quad n = \nu'', \ldots$$

elles se vérifieront quand on prendra pour n le produit $\nu\nu'$ de ν par ν', ou le produit $\nu\nu'\nu''$ de $\nu\nu'$ par ν'',... et par conséquent lorsqu'on prendra pour n le produit de tous les facteurs premiers $\nu, \nu', \nu'', \ldots$

En résumé, si, n étant un nombre impair, et le produit de facteurs premiers inégaux, ϖ représente une somme alternée, formée avec les racines primitives de l'équation (1), de telle manière que l'un des termes précédés du signe + soit la valeur de ρ déterminée par la formule

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et si d'ailleurs la somme ϖ est une fonction alternée des racines primitives, non-seulement de l'équation (1), mais encore de chacune des équations que l'on pourrait obtenir en remplaçant successivement l'exposant n par chacun de ses facteurs premiers, on aura, 1°, en supposant n de la forme $4x + 1$,

$$\varpi = n^{\frac{1}{2}}; \tag{33}$$

2°, en supposant n de la forme $4x + 3$,

$$\varpi = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{34}$$

Mais si, dans la somme alternée ϖ, l'un des termes positifs est celui que détermine la formule

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on aura, 1°, en supposant n de la forme $4x + 1$

$$\varpi = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}; \tag{35}$$

2°, en supposant n de la forme $4x + 3$,

$$\varpi = \left[\frac{m}{n}\right] n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}. \tag{36}$$

Il sera maintenant facile de déterminer complétement, dans tous les cas possibles, la valeur exacte d'une somme alternée ϖ, formée avec les racines primitives de l'équation (1). Considérons particulièrement le cas où la somme ω est une fonction alternée des racines primitives, non-seulement de l'équation (1), mais encore de chacune des équations qu'on peut obtenir, lorsqu'après avoir décomposé l'exposant n en facteurs premiers entre eux, on remplace successivement n par chacun de ces facteurs. Alors, d'après ce qui a été dit dans les notes VII, VIII, IX, pour que la somme ω ne soit pas nulle, il faudra que les facteurs impairs et premiers de n étant inégaux entre eux, le facteur pair, s'il existe, se réduise à l'un des nombres

$$4, 8;$$

et l'on aura, ou

$$(37) \qquad \omega^2 = n, \quad \omega = \pm n,$$

ou bien

$$(38) \qquad \omega^2 = -n, \quad \omega = \pm n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

les formules (37) devant se vérifier, par exemple, quand n est de l'une des formes

$$4x + 1, \quad 4(4x + 3),$$

et les formules (38), quand n est de l'une des formes

$$4x + 3, \quad 4(4x + 1).$$

Nous avons d'ailleurs donné (pages 593 et 594) les conditions auxquelles doivent satisfaire les exposants

$$h, h', h'', \ldots$$

dans la formule

$$\omega = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \text{etc.} \ldots$$

lorsqu'on en déduit les formules (37) ou les formules (38), et que le groupe des exposants

$$h, h', h'', \ldots,$$

renferme l'unité. Or, de ces conditions on déduira sans peine, à l'aide de raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, les conclusions suivantes :

D'abord, si l'on suppose n impair, et

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

la seconde des formules (37) se réduira simplement à la formule (33), et la seconde des formules (38) à la formule (34). Alors aussi, en prenant, non plus

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

mais

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et supposant m premier à n, on obtiendra, comme on l'a dit, non plus l'équation (33) ou (34), mais l'équation (35) ou (36).

Supposons à présent que, le facteur pair de n étant le nombre 4, on désigne par υ le nombre premier ou non premier $\frac{n}{4}$, par

$$\alpha, \quad \varsigma, \quad \rho = \alpha\varsigma,$$

des racines primitives des trois équations

$$x^4 = 1, \quad x^\upsilon = 1, \quad x^n = 1,$$

enfin par

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \varpi$$

des sommes alternées, formées respectivement avec ces racines, de manière que, parmi les termes précédés du signe $+$, on trouve dans la somme Δ la racine α, dans la somme Δ' la racine ς, dans la somme $\mathfrak{D}$ la racine ρ. Si l'on pose

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{4}\sqrt{-1}}, \quad \varsigma = e^{\frac{2\pi}{\upsilon}\sqrt{-1}},$$

on aura, non-seulement

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}(\upsilon+4)\sqrt{-1}},$$

mais encore

$$\Delta = \alpha - \alpha^3 = 2\sqrt{-1}, \quad \Delta' = \upsilon^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2},$$

et par conséquent

$$(39) \qquad \mathfrak{D} = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{-1}\right)^{1+\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2}.$$

Pour savoir si cette dernière formule fournit ou non la valeur de $\mathfrak{D}$, relative au cas où l'un des termes affectés du signe $+$ se réduirait à

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

il suffira d'examiner si l'exposant $\upsilon + 4$ doit être censé ou non faire partie du même groupe que l'unité. Or, comme l'expression

$$\left[\frac{\upsilon+4}{\frac{1}{4}n}\right] = \left[\frac{\upsilon+4}{\upsilon}\right],$$

se réduit évidemment à

$$\left[\frac{4}{\upsilon}\right] = \left[\frac{2}{\upsilon}\right]^2 = 1,$$

il suffira d'examiner si $\upsilon + 4$, divisé par 4, donne pour reste

1 ou -1. Le premier cas a lieu lorsque $\upsilon = \frac{n}{4}$ est de la forme $4x+1$; le second cas, lorsque n est de la forme $4x+3$; et par suite, en supposant, dans la somme ϖ, l'un des termes positifs réduit à

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on obtiendra pour cette somme, dans le premier cas, la valeur que détermine la formule (39), savoir :

$$\varpi = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2} = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et dans le second cas, une valeur qui différera seulement par le signe de celle que donne la formule (39), savoir, la valeur

$$\varpi = -n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2} = n^{\frac{1}{2}}.$$

Donc, si le facteur pair de n se réduit à 4, la supposition

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

reproduira encore, ou la formule (33), lorsque $\frac{n}{4}$ sera de la forme $4x+1$, ou la formule (34) lorsque $\frac{n}{4}$ sera de la forme $4x+3$. Quant à la supposition

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

elle reproduira, pour la somme ϖ, soit la valeur que détermine la formule (33) ou (34), soit cette valeur prise en signe contraire, suivant que l'exposant m fera ou non partie du groupe $h, h', h'', \ldots$, qui est censé renfermer l'exposant 1.

Supposons enfin que, le facteur pair de n étant le nombre 8, on désigne par υ le nombre premier ou non premier $\frac{n}{8}$, par

$$\alpha, \quad \varsigma, \quad \rho = \alpha\varsigma,$$

des racines primitives des trois équations

$$x^8 = 1, \quad x^\upsilon = 1, \quad x^n = 1,$$

et par

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \varpi,$$

des sommes alternées, formées respectivement avec ces racines, de manière que, parmi les termes affectés du signe +, on trouve dans la somme Δ la racine α, dans la somme Δ' la racine ς, dans la somme ϖ la racine ρ. Si l'on pose

$$\alpha = e^{\frac{2\pi}{8}\sqrt{-1}}, \quad \varsigma = e^{\frac{2\pi}{\upsilon}\sqrt{-1}},$$

on aura non-seulement

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}(\upsilon+8)\sqrt{-1}},$$

mais encore

$$\Delta' = \upsilon^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2}.$$

Alors aussi, quand la somme alternée Δ différera de zéro, elle sera, ou de la forme

$$(40)\quad \Delta = \alpha + \alpha^7 - \alpha^3 - \alpha^5 = 2(\alpha + \alpha^7) = 4\cos\frac{\pi}{4} = 8^{\frac{1}{2}},$$

ou de la forme

$$(41)\quad \Delta = \alpha + \alpha^3 - \alpha^5 - \alpha^7 = 2(\alpha + \alpha^3) = 4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = 8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et l'on aura, dans le premier cas,

$$(42)\qquad \varpi = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2},$$

dans le second cas

$$(43)\qquad \varpi = \Delta\Delta' = n^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-1})^{1+\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2}.$$

Pour savoir si les formules (42) et (43) fournissent ou non les valeurs de ϖ, qui sont relatives au cas où l'un des termes affectés du signe $+$ se réduirait à

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et qui d'ailleurs diffèrent de zéro, il suffira de savoir si, dans chacune des valeurs de ϖ, les termes ρ, $\rho^{\upsilon+4}$ sont affectés du même signe, ou, ce qui revient au même, si l'exposant $\upsilon + 4$ fait partie du même groupe que l'unité. Or, d'une part, l'expression

$$\left[\frac{\upsilon+8}{\frac{1}{8}n}\right] = \left[\frac{\upsilon+8}{\upsilon}\right],$$

se réduit évidemment à

$$\left[\frac{8}{\upsilon}\right] = \left[\frac{2}{\upsilon}\right]^3 = \left[\frac{2}{\upsilon}\right] = (-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}};$$

et, d'autre part, $\upsilon + 8$, divisé par 8, donnera le même reste que υ, savoir : un reste représenté ou non par l'un des nombres 1, 7, suivant que l'expression

$$(-1)^{\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-7)}{8}} = (-1)^{\frac{(\upsilon^2-1)}{8}},$$

aura pour valeur $+1$ ou -1; ou bien encore un reste représenté ou non par l'un des nombres 1, 3, suivant que l'expression

$$(-1)^{\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-3)}{8}},$$

aura pour valeur $+1$ ou -1. Donc, puisque l'on a

$$(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}}(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{4}}=1,$$

et

$$(-1)^{\frac{\upsilon^2-1}{8}}(-1)^{\frac{(\upsilon-1)(\upsilon-3)}{8}}=(-1)^{\left(\frac{\upsilon-1}{2}\right)^2}=(-1)^{\frac{\upsilon-1}{2}},$$

les termes

$$\rho \quad \text{et} \quad \rho^{\upsilon+4},$$

seront toujours affectés du même signe dans la valeur de la somme ϖ, que détermine l'équation (42); mais, dans la valeur de la même somme, déterminée par l'équation (43), ils seront affectés du même signe ou de signes contraires, suivant que $\frac{\upsilon-1}{2}$ sera pair ou impair. Donc si, en supposant

$$\rho=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

on affecte du signe $+$, dans la somme alternée ϖ, toute puissance de ρ, dont l'exposant h vérifie la condition (9) ou (10) de la page 593, on aura, en vertu de la formule (42), 1°, quand $\upsilon=\frac{n}{8}$ sera de la forme $4x+1$,

$$\varpi=n^{\frac{1}{2}};$$

2°, quand $\frac{n}{8}$ sera de la forme $4x+3$,

$$\varpi=n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

et si, en supposant toujours

$$\rho=e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on affecte du signe $+$, dans la somme alternée ϖ, toute puissance de ρ dont l'exposant h vérifie les conditions (11) ou (12) de la page 594, on aura encore, 1°, en vertu de la formule (43), quand $\upsilon = \frac{n}{8}$ sera de la forme $4x+1$,

$$\varpi = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

2°, quand $\upsilon = \frac{n}{8}$ sera de la forme $4x+3$,

$$\varpi = n^{\frac{1}{2}}.$$

Si, dans la somme ϖ, formée comme on vient de le dire, on remplaçait la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

par la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m étant premier à n; cette somme conserverait le même signe avec la même valeur, ou bien elle changerait de signe, suivant que m serait ou ne serait pas un des exposants h compris dans le groupe qui renfermait l'unité.

Il importe d'observer que les conclusions diverses, auxquelles nous venons de parvenir, en supposant successivement le nombre n impair, puis divisible par 4, puis divisible par 8, se trouvent toutes renfermées dans un théorème général, qu'on peut énoncer simplement comme il suit :

Théorème. Soit ϖ une fonction alternée, formée avec les racines primitives de l'équation (1), et de manière à vérifier la formule

$$\varpi = \pm n.$$

Si l'on suppose que, dans la somme alternée ϖ, l'un des termes précédés du signe + soit la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on aura simultanément, ou

$$\Theta^2 = n \quad \text{et} \quad \Theta = n^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\Theta^2 = -n \quad \text{et} \quad \Theta = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1};$$

en sorte que la valeur de Θ sera toujours fournie par l'une des équations (20), (21) ou (33), (34).

Exemples. En prenant $n = 3$, $\rho = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$, on trouvera

$$\Theta = \rho - \rho^2 = 2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1} = 3^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant $n = 4$, $\rho = e^{\frac{2\pi}{4}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, on trouvera

$$\Theta = \rho - \rho^3 = 2\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = 4^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant $n = 8$, $\rho = e^{\frac{2\pi}{8}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$, on trouvera

$$\Theta = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5 = 4\cos\frac{\pi}{4} = 8^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\Theta = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7 = 4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = 8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}.$$

En prenant $n = 24$, $\rho = e^{\frac{2\pi}{24}\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{12}\sqrt{-1}}$, on trouvera, ou

$$\begin{aligned}
\Theta &= \rho + \rho^5 + \rho^7 + \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17} - \rho^{19} - \rho^{23} \\
&= (\rho^8 - \rho^{16})(\rho^3 + \rho^{21} - \rho^9 - \rho^{15}) \\
&= \left(2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(4\cos\frac{\pi}{4}\right) = 3^{\frac{1}{2}}\,8^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1} = 24^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\varpi &= \rho + \rho^{5} + \rho^{19} + \rho^{23} - \rho^{7} - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17}\\ &= (\rho^{8} - \rho^{16})(\rho^{15} + \rho^{21} - \rho^{3} - \rho^{9})\\ &= \left(2\sin\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}\right)\left(-4\sin\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}\right) = 3^{\frac{1}{2}}\,8^{\frac{1}{2}} = 24^{\frac{1}{2}}.\ \text{etc...}\end{aligned}$$

Nota. Si, dans la somme alternée ϖ, formée comme on vient de le dire, on supposait précédé du signe le terme représenté, non par la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

mais par la suivante

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m étant premier à n; alors la somme alternée ϖ offrirait ou la valeur que fournit le théorème énoncé, ou cette même valeur prise en signe contraire, suivant que le nombre m ferait ou non partie du groupe des nombres ci-dessus représentés par

$$h, h', h'', \ldots$$

(voir, pour la détermination de ces mêmes nombres, les pages 593 et 594).

Nous terminons cette note par une observation qui n'est pas sans importance.

Supposons que, dans le cas où l'on prend

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

la somme alternée

$$(44)\qquad \varpi = \rho^{h} + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^{k} - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots,$$

vérifie l'équation

$$\varpi^{2} = \pm n.$$

La même équation sera encore vérifiée quand on prendra

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

si m est premier à n. Mais, si m cesse d'être premier à n, alors en prenant

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

on trouvera toujours

$$\varpi = 0; \tag{45}$$

comme on va le faire voir.

Pour que la somme ϖ vérifie l'équation

$$\varpi^2 = \pm n,$$

il est nécessaire, comme on l'a dit, que les facteurs impairs et premiers de n étant inégaux, le facteur pair, s'il existe, se réduise à l'un des nombres

$$4, 8.$$

D'autre part, lorsque dans la formule

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

m cessera d'être premier à n, ρ deviendra une des racines non primitives de l'équation

$$x^n = 1.$$

Donc alors, si n désigne un nombre premier impair, ou le nombre 4, ou le nombre 8, ρ se réduira, dans le premier cas, à l'unité; dans le second cas, à l'une des racines

$$+1, \quad -1$$

de l'équation

$$x^2 = 1;$$

dans le troisième cas, à l'une des racines

$$+1, \quad -1, \quad +\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1},$$

de l'équation

$$x^4 = 1.$$

Or, dans ces trois cas, la formule (2), que l'on doit, en supposant le terme ρ précédé du signe $+$, réduire, pour $n = 4$, à

$$\omega = \rho - \rho^3,$$

et pour $n = 8$ à l'une des suivantes

$$\omega = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5, \quad \omega = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$

donnera évidemment

$$\omega = 0.$$

Si maintenant on suppose

$$n = \nu\nu'\nu'' \ldots,$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs dont chacun se réduise soit à un nombre impair et premier, soit à l'un des nombres 4, 8, alors la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}$$

pourra être présentée sous la forme

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots,$$

$\xi, \eta, \zeta, \ldots$ désignant des racines primitives propres à vérifier respectivement les équations

$$x^\nu = 1, \quad x^{\nu'} = 1, \quad x^{\nu''} = 1, \text{ etc.}\ldots;$$

et la somme ω, formée avec les puissances de la racine primitive ρ, sera le produit des sommes alternées

$$\Delta, \; \Delta', \; \Delta'', \ldots$$

respectivement formées avec les puissances des racines primitives

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \ldots$$

Or, remplacer dans la somme alternée

$$\varpi = \Delta\Delta'\Delta''\ldots,$$

la racine primitive

$$\rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

par la racine non primitive

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

revient à substituer, dans la somme ϖ, le produit

$$\rho^m = \xi^m \eta^m \zeta^m \ldots$$

au produit

$$\rho = \xi\eta\zeta\ldots,$$

par conséquent à substituer, dans les sommes Δ, Δ', Δ'', ...,

$$\xi^m \text{ à } \xi, \quad \eta^m \text{ à } \eta, \quad \zeta^m \text{ à } \zeta, \ldots$$

Or, en vertu de ces dernières substitutions, une ou plusieurs des sommes

$$\Delta, \quad \Delta', \quad \Delta'', \ldots$$

s'évanouiront, suivant que le nombre m cessera d'être premier à un ou à plusieurs des facteurs

$$\nu, \quad \nu', \quad \nu'' \ldots;$$

donc aussi la somme

$$\varpi = \Delta\Delta'\Delta''\ldots$$

s'évanouira elle-même, et l'on pourra énoncer généralement la proposition suivante.

Deuxième théorème. Soit ρ une des racines primitives de l'équation

$$x^n = 1,$$

et

(46) $$\omega = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} \ldots$$

une somme alternée de ces racines qui vérifie la condition

$$\omega^2 = \pm n.$$

Si, dans cette somme alternée, on substitue à la racine primitive ρ une racine non primitive, en prenant par exemple

$$\rho = e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

et supposant que le nombre m cesse d'être premier à n, la valeur de la somme ω, que déterminera la formule (11), sera

$$\omega = 0.$$

NOTE XII.

FORMULES DIVERSES QUI SE DÉDUISENT DES PRINCIPES ÉTABLIS DANS LA NOTE PRÉCÉDENTE.

Soient toujours

n un nombre entier quelconque;
$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n et premiers à n;
ρ l'une des racines primitives de l'équation

(1) $$x^n = 1,$$

et

$$(2)\qquad \omega = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots$$

une somme alternée formée avec ces racines primitives, les entiers

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

étant partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots$$

de telle manière qu'un changement opéré dans la valeur de la racine primitive ρ puisse produire un changement de signe dans la somme ω, sans avoir jamais d'autre effet sur cette somme, et que l'unité fasse partie du groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

Enfin, considérons spécialement le cas où la somme ω vérifie la condition

$$(3)\qquad \omega^2 = \pm n;$$

ce qui suppose les facteurs impairs de n inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant l'un des nombres 4, 8. Si l'on pose

$$(4)\qquad \rho = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

ou aura, en vertu du premier théorème de la note précédente, ou

$$(5)\qquad \omega^2 = n, \qquad \text{et} \quad \omega = n^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$(6)\qquad \omega^2 = -n, \quad \text{et} \quad \omega = n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

les équations (5) étant relatives au cas où n est de l'une des formes

$$4x+1, \quad 4(4x+3), \quad 8(2x+1),$$

et les équations (6), au cas où n est de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(2x+1).$$

D'ailleurs, en vertu des formules (3), (4), la seconde des équations (5) donnera

$$(7) \quad \begin{cases} \cos\frac{2h\pi}{n}+\cos\frac{2h'\pi}{n}+\ldots-\cos\frac{2k\pi}{n}-\cos\frac{2k'\pi}{n}-\ldots=n^{\frac{1}{2}}, \\ \sin\frac{2h\pi}{n}+\sin\frac{2h'\pi}{n}+\ldots-\sin\frac{2k\pi}{n}-\sin\frac{2k'\pi}{n}-\ldots=0; \end{cases}$$

et la seconde des formules (6) donnera

$$(8) \quad \begin{cases} \cos\frac{2h\pi}{n}+\cos\frac{2h'\pi}{n}+\ldots-\cos\frac{2k\pi}{n}-\cos\frac{2k'\pi}{n}-\ldots=0, \\ \sin\frac{2h\pi}{n}+\sin\frac{2h'\pi}{n}+\ldots-\sin\frac{2k\pi}{n}-\sin\frac{2k'\pi}{n}-\ldots=n^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Il y a plus : si, m étant un nombre impair premier à n, on pose

$$(9) \qquad \rho=e^{\frac{2m\pi}{n}\sqrt{-1}},$$

alors, en désignant par ι_m un coefficient qui se réduise à

$$+1 \quad \text{ou à} \quad -1,$$

suivant que le nombre m fait partie du groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

ou du groupe

$$k, k', k'', \ldots,$$

on aura, en vertu des principes établis dans la note précédente, ou

$$(10) \qquad \omega=\iota_m n^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos\frac{2mh\pi}{n}+\cos\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\cos\frac{2mk\pi}{n}-\cos\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=\iota_m n^{\frac{1}{2}},\\&\sin\frac{2mh\pi}{n}+\sin\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\sin\frac{2mk\pi}{n}-\sin\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=0,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(12)\qquad \omega=\iota_m n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}&\cos\frac{2mh\pi}{n}+\cos\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\cos\frac{2mk\pi}{n}-\cos\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=0,\\&\sin\frac{2mh\pi}{n}+\sin\frac{2mh'\pi}{n}+\ldots-\sin\frac{2mk\pi}{n}-\sin\frac{2mk'\pi}{n}-\ldots=\iota_m n^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right.$$

On aura d'ailleurs, 1°, si n est impair,

$$(14)\qquad \iota_m=\left[\frac{m}{n}\right];$$

2°, si n est divisible par 4, mais non par 8,

$$(15)\qquad \iota_m=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{m}{\frac{1}{4}n}\right];$$

3°, si n est divisible par 8, et de la forme $8(4x+1)$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (10), ou de la forme $8(4x+3)$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (12),

$$(16)\qquad \iota_m=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\left[\frac{m}{\frac{1}{8}n}\right];$$

4°, enfin, si n est divisible par 8 et de la forme $8(4x+3)$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (10), ou de la forme $8(4x+1)$, la valeur de ω étant fournie par l'équation (12),

$$(17)\qquad \iota_m = (-1)^{\frac{(m-1)(m-3)}{8}} \left[\frac{m}{\frac{1}{8}n}\right].$$

M. Gauss est parvenu le premier aux formules (11) et (13), qu'il a données en 1801, dans ses *Recherches arithmétiques*, [§ 356], pour le cas où n est un nombre premier, mais sans déterminer le signe du coefficient ι_m, dont la valeur numérique se réduit à l'unité. C'est dans le mémoire intitulé *Summatio serierum quarumdam singularium* que le même géomètre, en reproduisant les formules (11) et (13), les a déduites d'une méthode qui lui a permis de fixer le signe de ι_m.

Si, dans la valeur de ρ, que fournit l'équation (9), le nombre m cessait d'être premier à n, alors, en vertu du deuxième théorème de la note précédente, la somme alternée ω, que détermine la formule (2), se réduirait à

$$(18)\qquad \omega = 0;$$

et, par suite, on aurait simultanément

$$(19)\left\{\begin{aligned}&\cos\frac{2mh\pi}{n} + \cos\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \cos\frac{2mk\pi}{n} - \cos\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0,\\ &\sin\frac{2mh\pi}{n} + \sin\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \sin\frac{2mk\pi}{n} - \sin\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = 0.\end{aligned}\right.$$

Donc, si l'on veut étendre les formules (11) et (13) au cas où les nombres m et n cessent d'être premiers entre eux, il suffira d'admettre que, dans ce cas, la valeur du coefficient représenté par ι_m est nulle et vérifie l'équation

$$(20)\qquad \iota_m = 0.$$

Avant d'aller plus loin, nous rappellerons ici qu'en vertu des conditions énoncées à la page 593 et à la page 594, les deux nombres

$$1, \quad n-1 \equiv -1, (\text{mod. } n)$$

et, par suite, les deux nombres

$$l, \quad n-l \equiv -l, (\text{mod. } n),$$

l étant inférieur à n, mais premier à n, appartiendront à un seul des deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

ou l'un au premier de ces groupes, l'autre au second, suivant que la somme alternée ® sera déterminée par la formule (10) ou par la formule (12). Donc, si l'on représente par

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{ou par} \quad k, k', k'', \ldots$$

les seules valeurs de h ou de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, alors, dans la somme alternée ® que détermine la formule (10), le système entier des valeurs de h pourra être représenté par

$$h, h', h'', \ldots \quad n-h, \; n-h', \; n-h'', \ldots$$

et le système entier des valeurs de k par

$$k, k', k'', \ldots \quad n-k, \; n-k', \; n-k'', \ldots;$$

mais, au contraire, dans la somme alternée ® que détermine la formule (12), le système entier des valeurs de h pourra être représenté par

$$h, h', h'', \ldots \quad n-k, \; n-k', \; n-k'', \ldots$$

et le système entier des valeurs de k par

$$k, k', k'', \ldots \quad n-h, \; n-h', \; n-h'', \ldots$$

Comme on aura d'ailleurs généralement

$$\rho^{n-l} = \rho^{-l},$$

il est clair qu'à la place de la formule (2) on obtiendra, dans le premier cas, l'équation

$$(21)\quad \mathfrak{D} = \rho^{h} + \rho^{-h} + \rho^{h'} + \rho^{-h'} + \ldots - \rho^{k} - \rho^{-k} - \rho^{k'} - \rho^{-k'} - \ldots,$$

et, dans le second cas, l'équation

$$(22)\quad \mathfrak{D} = \rho^{h} - \rho^{-h} + \rho^{h'} - \rho^{-h'} + \ldots - \rho^{k} + \rho^{-k} - \rho^{k'} + \rho^{-k'} - \ldots$$

Par suite, on pourra facilement constater l'exactitude de la première des formules (11) qui se trouvera remplacée par une équation identique, comme la première des formules (13), tandis que la première des formules (11) se trouvera réduite à

$$(23)\quad \cos\frac{2mh\pi}{n} + \cos\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \cos\frac{2mk\pi}{n} - \cos\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = \frac{1}{2}\iota_m n^{\frac{1}{2}},$$

et la première des formules (13) à

$$(24)\quad \sin\frac{2mh\pi}{n} + \sin\frac{2mh'\pi}{n} + \ldots - \sin\frac{2mk\pi}{n} - \sin\frac{2mk'\pi}{n} - \ldots = \frac{1}{2}\iota_m n^{\frac{1}{2}}.$$

Des observations que nous venons de faire, on déduit encore une conclusion qui peut être aisément vérifiée à l'aide des formules (14), (15), (16), (17); savoir, que l'on a généralement

$$(25)\qquad \iota_{-1} = \iota_1, \quad \iota_{-m} = \iota_m,$$

quand la somme alternée $\mathfrak{D}$ satisfait à l'équation (10), et

$$(26)\qquad \iota_{-1} = -\iota_1, \quad \iota_{-m} = -\iota_m,$$

quand la somme alternée $\mathfrak{D}$ satisfait à l'équation (12). On peut aussi, à l'aide des formules (14), (15), (16), (17), s'assurer facilement que, si l'entier m est décomposable en deux facteurs premiers ou non premiers μ, μ', l'équation

$$m = \mu\mu' \tag{27}$$

entraînera la suivante

$$\iota_m = \iota_\mu \iota_{\mu'}. \tag{28}$$

Pareillement une équation de la forme

$$m = \mu\mu'\mu'' \ldots \tag{29}$$

entraînerait la suivante

$$\iota_m = \iota_\mu \iota_{\mu'} \iota_{\mu''} \ldots \tag{30}$$

Soit maintenant N le nombre des entiers

$$h, k, l, \ldots$$

inférieurs à n, mais premiers à n. Ceux d'entre eux qui ne surpasseront pas $\frac{1}{2}n$ seront en nombre égal à $\frac{N}{2}$, et, parmi ces derniers, les uns, dont nous désignerons le nombre par i, seront ceux que représentent, dans les formules (23), (24), les lettres h, h'..., tandis que les autres, dont nous désignerons le nombre par j, seront ceux que représentent, dans les mêmes formules, les lettres k, k',... Cela posé, on aura nécessairement

$$i + j = \frac{N}{2}. \tag{31}$$

D'autre part, dans la somme alternée ϖ, le nombre des termes affectés du signe + est égal au nombre des termes affectés du signe —, par conséquent à la moitié du nombre total des termes ou à $\frac{1}{2}$N. Or, comme la somme alternée ϖ, lorsqu'elle vérifiera la formule (10), offrira une valeur déterminée par l'équation (21), on aura nécessairement dans cette hypothèse

$$2i = \frac{N}{2}, \quad 2j = \frac{N}{2},$$

et par suite

(32)
$$i = j = \frac{N}{2}.$$

Des formules (11) et (13), ou (23) et (24), combinées avec les équations connues qui servent à développer les fonctions en séries ordonnées suivant les sinus ou les cosinus des multiples d'un arc, on déduit aisément divers résultats dignes de remarque, et en particulier ceux que M. Dirichlet a obtenus, à l'aide de semblables combinaisons, dans plusieurs mémoires qui ont attiré l'attention des géomètres. Concevons, par exemple, que l'on combine les formules (11) et (13), ou, ce qui revient au même, les formules (10) et (12), avec l'équation

$$n\mathrm{f}(x) = \int_0^a \mathrm{f}(u)\,du + 2\int_0^a \cos\frac{2\pi(x-u)}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + 2\int_0^a \cos\frac{4\pi(x-u)}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + \ldots,$$

que l'on déduit de la formule (77) de la page 357 du deuxième volume des *Exercices de mathématiques*, en y remplaçant

$$a \text{ par } n, \quad x_0 \text{ par } 0, \quad \mathrm{X} \text{ par } a,$$

et qui subsiste, pour des valeurs de a inférieures à n, entre les limites $x=0$, $x=a$ de la variable x, dans le cas où la fonction $\mathrm{f}(x)$ reste continue entre ces limites. Comme, en prenant

(34)
$$\omega = \frac{2\pi}{n},$$

on aura généralement

$$\cos\frac{2m\pi(x-u)}{n}=\cos m\omega(x-u)=\cos m\omega x\cos m\omega u+\sin m\omega x\sin m\omega u,$$

si l'on suppose la quantité a positive et supérieure à $n-1$, mais inférieure à n, on tirera de la formule (33) jointe à la formule (10) ou (12) : 1° en admettant que la somme alternée $\circledcirc$ soit déterminée par la formule (10), et que l'on ait en conséquence $\iota_{-m}=\iota_m$,

$$(35)\quad \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\Big[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots\Big]=$$
$$\iota_1\int_0^a\cos\omega u\,f(u)du+\iota_2\int_0^a\cos 2\omega u\,f(u)du+\iota_3\int_0^a\cos 3\omega u\,f(u)du+\ldots;$$

2° en admettant que la somme alternée $\circledcirc$ soit déterminée par la formule (12), et que l'on ait par suite $\iota_{-m}=-\iota_m$,

$$(36)\quad \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\Big[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots\Big]=$$
$$\iota_1\int_0^a\sin\omega u\,f(u)du+\iota_2\int_0^a\sin 2\omega u\,f(u)du+\iota_3\int_0^a\sin 3\omega u\,f(u)du+\ldots$$

Les formules (35) et (36) supposent, comme les formules (11) et (13), que $h, h', h'',\ldots$ représentent les diverses valeurs de h, et $k, k', k'',\ldots$ les diverses valeurs de k, renfermées entre les limites $0, n$. D'ailleurs, en vertu de l'équation (20), on doit, dans les seconds membres des formules (35) et (36), remplacer par zéro le terme général ι_m de la suite

$$\iota_1,\ \iota_2,\ \iota_3,\ldots$$

toutes les fois que le nombre entier m cesse d'être premier à n.

On peut remarquer encore que l'on a, pour des valeurs quelconques de ω,

$$\int_0^a \cos m\omega u\, du = \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \quad \int_0^a \sin m\omega u\, du = \frac{1 - \cos m\omega a}{m\omega}. \tag{37}$$

Or, de ces dernières équations, différenciées l fois par rapport à ω, l'on conclut : 1° pour des valeurs paires de l,

$$\int_0^a u^l \cos m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{m^l} \mathrm{D}_\omega^l \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \quad \int_0^a u^l \sin m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l}{2}}}{m^l} \mathrm{D}_\omega^l \frac{1 - \cos m\omega a}{m\omega}; \tag{38}$$

2° pour des valeurs impaires de l,

$$\int_0^a u^l \cos m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}}}{m^l} \mathrm{D}_\omega^l \frac{1 - \cos m\omega a}{m\omega}, \quad \int_0^a u^l \sin m\omega u\, du = \frac{(-1)^{\frac{l+1}{2}}}{m^l} \mathrm{D}_\omega^l \frac{\sin m\omega a}{m\omega}, \tag{39}$$

la notation D_ω^l indiquant l différenciations relatives à ω. Cela posé, on pourra aisément faire disparaître les signes d'intégration contenus dans les seconds membres des formules (35), (36), toutes les fois que $\mathrm{f}(x)$ représentera une fonction entière de x, composée d'un nombre fini ou même infini de termes Si cette fonction entière est de plus une fonction paire de x, on tirera de la formule (35), jointe à la première des formules (38),

$$\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [\mathrm{f}(h) + \mathrm{f}(h') + \ldots - \mathrm{f}(k) - \mathrm{f}(k') - \ldots] = \tag{40}$$
$$\mathrm{f}(\sqrt{-1}\,\mathrm{D}_\omega)\frac{\sin \omega a}{\omega} + \iota_2 \mathrm{f}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathrm{D}_\omega\right)\frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \iota_3 \mathrm{f}\left(\frac{\sqrt{-1}}{3}\mathrm{D}_\omega\right)\frac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots,$$

ou de la formule (36), jointe à la seconde des formules (38),

$$\frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} [\mathrm{f}(h) + \mathrm{f}(h') + \ldots - \mathrm{f}(k) - \mathrm{f}(k') - \ldots] = \tag{41}$$
$$\mathrm{f}(\sqrt{-1}\,\mathrm{D}_\omega)\frac{1 - \cos \omega a}{\omega} + \iota_2 \mathrm{f}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\mathrm{D}_\omega\right)\frac{1 - \cos 2\omega a}{2\omega} + \iota_3 \mathrm{f}\left(\frac{\sqrt{-1}}{3}\mathrm{D}_\omega\right)\frac{1 - \cos 3\omega a}{3\omega} + \ldots$$

Si au contraire $f(x)$ est une fonction impaire de x, on tirera de la formule (35), jointe à la première des formules (39),

$$(42)\qquad \frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots]=$$
$$\iota_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\frac{1-\cos\omega a}{\omega}+\iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega}+\iota_3 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{3}D\omega\right)\frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega}+\ldots$$

ou de la formule (36), jointe à la seconde des formules (39),

$$(43)\qquad -\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\,[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots]=$$
$$\iota_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\frac{\sin\omega a}{\omega}+\iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\frac{\sin 2\omega a}{2\omega}+\iota_3 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{3}D\omega\right)\frac{\sin 3\omega a}{3\omega}+\ldots$$

Au reste, les formules (40), (41), (42), (43), sont comprises comme cas particuliers dans celles que nous allons établir.

Si, dans le second membre de l'équation (35), on transforme les cosinus en exponentielles imaginaires, on tirera de cette équation, en prenant pour $f(x)$ une fonction entière de x

$$n^{\frac{1}{2}}[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots)=$$
$$\iota_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\int_0^a e^{-\omega u\sqrt{-1}}du+\iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\int_0^a e^{-2\omega u\sqrt{-1}}du+\ldots$$
$$+\iota_1 f(-\sqrt{-1}D\omega)\int_0^a e^{\omega u\sqrt{-1}}du+\iota_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\int_0^a e^{2\omega u\sqrt{-1}}du+\ldots,$$

et par suite

$$(44)\qquad n^{\frac{1}{2}}[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots]=$$
$$\iota_1 f(\sqrt{-1}\,D\omega)\frac{1-e^{-\omega a\sqrt{-1}}}{\omega\sqrt{-1}}+\iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\frac{1-e^{-2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega\sqrt{-1}}+\ldots$$
$$+\iota_1 f(-\sqrt{-1}D\omega)\frac{e^{\omega a\sqrt{-1}}-1}{\omega\sqrt{-1}}+\iota_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2}D\omega\right)\frac{e^{2\omega a\sqrt{-1}}-1}{2\omega\sqrt{-1}}+\ldots$$

On tirera au contraire de l'équation (36)

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} n^{\frac{1}{2}}[f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - f(k') - \ldots] =$$

$$\iota_1 f\left(\sqrt{-1}\, D\omega\right)\int_0^a e^{-\omega u\sqrt{-1}}du + \iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} D\omega\right)\int_0^a e^{-2\omega u\sqrt{-1}}du + \ldots$$

$$-\iota_1 f\left(-\sqrt{-1}\, D\omega\right)\int_0^a e^{\omega u\sqrt{-1}}du - \iota_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2} D\omega\right)\int_0^a e^{2\omega u\sqrt{-1}}du - \ldots,$$

et par suite

$$n^{\frac{1}{2}}[f(h) + f(h') + \ldots - f(k) - (k') - \ldots] = \tag{45}$$

$$\iota_1 f\left(\sqrt{-1}\, D\omega\right)\frac{1 - e^{-\omega a\sqrt{-1}}}{\omega} + \iota_2 f\left(\frac{\sqrt{-1}}{2} D\omega\right)\frac{1 - e^{-2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega} + \ldots$$

$$+ \iota_1 f\left(-\sqrt{-1}\, D\omega\right)\frac{1 - e^{\omega a\sqrt{-1}}}{\omega} + \iota_2 f\left(-\frac{\sqrt{-1}}{2} D\omega\right)\frac{1 - e^{2\omega a\sqrt{-1}}}{2\omega} + \ldots$$

On ne doit pas oublier que les formules (40), (42), (44) correspondent à l'équation (10), et les formules (41), (43), (45) à l'équation (12). Dans ces diverses formules, la quantité a doit être non-seulement positive, mais supérieure à $n-1$, et inférieure à n. On peut même supposer qu'elle atteint la limite n, et, dans cette hypothèse, après avoir effectué les différenciations relatives à ω, on verra le produit ωa se réduire à 2π, et les exponentielles de la forme

$$e^{-m\omega a\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad e^{m\omega a\sqrt{-1}}$$

à l'unité.

Pour montrer une application des formules qui précèdent, concevons que, m étant un nombre entier quelconque, l'on pose

$$f(x) = x^m,$$

et faisons, pour abréger,

$$\Delta_m = h^m + h'^m + \ldots - k^m - k'^m - \ldots \tag{46}$$

On tirera des formules (40) ou (41), pour des valeurs paires de m, 1° en supposant $\omega^2 = n$,

$$(47)\quad (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \Delta_m = D_\omega^m \left[\iota_1 \frac{\sin \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots \right];$$

2° en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(48)\quad (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \Delta_m = D_\omega^m \left[\iota_1 \frac{1-\cos \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega} + \ldots \right].$$

On tirera au contraire des formules (42) et (43), pour des valeurs impaires de m, 1° en supposant $\omega^2 = n$,

$$(49)\quad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \Delta_m = D_\omega^m \left[\iota_1 \frac{1-\cos \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{1-\cos 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{1-\cos 3\omega a}{3\omega} + \ldots \right];$$

2° en supposant $\omega^2 = -n$,

$$(50)\quad (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{2} n\, \Delta_m = D_\omega^m \left[\iota_1 \frac{\sin \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \ldots \right].$$

D'ailleurs, Ω désignant une fonction quelconque de ω, on aura généralement

$$D_\omega^m(\omega^{-1}\Omega) = \Omega D_\omega^m \omega^{-1} + \frac{m}{1} D_\omega \Omega . D_\omega^{m-1} \omega^{-1} + \frac{m(m-1)}{1-2} D_\omega^2 \Omega . D_\omega^{m-2} \omega^{-1} + \ldots,$$

et par suite

$$D_\omega^m(\omega^{-1}\Omega) = (-1)^m \frac{1.2.3\ldots m}{\omega^{m+1}} \left(\Omega - \frac{\omega}{1} D_\omega \Omega + \frac{\omega^2}{1.2} D_\omega^2 \Omega - \ldots \pm \frac{\omega^m}{1.2\ldots m} D_\omega^m \Omega \right).$$

Donc, en désignant par l un nombre entier quelconque, et posant, après les différenciations,

$$a = n, \quad \omega = \frac{2\pi}{n}, \quad a\omega = 2\pi,$$

on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$D_\omega^m \frac{\sin l\omega a}{\omega} = -\, n^{m+1} \left[\frac{2.3\ldots m}{(2\pi)^m} l - \frac{4.5\ldots m}{(2\pi)^{m-2}} l^3 + \ldots \pm \frac{m}{(2\pi)^2} l^{m-1} \right],$$

$$D_\omega^m \frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = n^{m+1} \left[\frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}} l^2 - \frac{5.6\ldots m}{(2\pi)^{m-3}} l^4 + \ldots \pm \frac{1}{2\pi} l^m \right],$$

et, pour des valeurs impaires de m,

$$D_\omega^m \frac{\sin l\omega a}{\omega} = n^{m+1}\left[\frac{2.3\ldots m}{(2\pi)^m} l - \frac{4.5\ldots m}{(2\pi)^{m-2}} l^3 + \ldots \pm \frac{1}{2\pi} l^m\right],$$

$$D_\omega^m \frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = -n^{m+1}\left[\frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}} l^2 - \frac{5.6\ldots m}{(2\pi)^{m-3}} l^4 + \ldots \pm \frac{m}{(2\pi)^2} l^{m-1}\right].$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathfrak{s}_1 = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2} + \frac{\iota_3}{3} + \ldots, \quad \mathfrak{s}_2 = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2^2} + \frac{\iota_3}{3^2} + \ldots, \text{ etc.},$$

et généralement

$$(51) \qquad \mathfrak{s}_m = \iota_1 + \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_3}{3^m} + \frac{\iota_4}{4^m} + \frac{\iota_5}{5^m} + \ldots,$$

on tirera des formules (47) et (49), en supposant $\varpi^2 = n$, 1° pour des valeurs paires de m,

$$(52) \quad \Delta_m = 2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{m}{(2\pi)^2}\mathfrak{s}_2 - \frac{(m-2)(m-1)m}{(2\pi)^4}\mathfrak{s}_m + \ldots \pm \frac{2.3.4\ldots m}{(2\pi)^m}\mathfrak{s}_m\right],$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(53) \quad \Delta_m = 2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{m}{(2\pi)^2}\mathfrak{s}_2 - \frac{(m-2)(m-1)m}{(2\pi)^2}\mathfrak{s}_m + \ldots \pm \frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}\mathfrak{s}_{m-1}\right];$$

mais, en supposant $\varpi^2 = -n$, on tirera des formules (48) et (50), 1° pour des valeurs paires de m,

$$(54) \quad \Delta_m = -2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\pi}\mathfrak{s}_1 - \frac{(m-1)m}{(2\pi)^3}\mathfrak{s}_3 + \ldots \pm \frac{3.4\ldots m}{(2\pi)^{m-1}}\mathfrak{s}_{m-1}\right],$$

2° pour des valeurs impaires de m,

$$(55) \quad \Delta_m = -2n^{m+\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\pi}\mathfrak{s}_1 - \frac{(m-1)m}{(2\pi)^3}\mathfrak{s}_3 + \ldots \pm \frac{2.3.4\ldots m}{(2\pi)^m}\mathfrak{s}_m\right].$$

Ainsi, en supposant $\varpi^2 = n$, on trouvera successivement

$$(56) \qquad \Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\mathfrak{s}_2}{\pi^2} n^{\frac{5}{2}}, \quad \Delta_3 = \frac{3}{2}\frac{\mathfrak{s}_2}{\pi^2} n^{\frac{7}{2}}, \qquad \text{etc.},$$

tandis qu'en supposant $\omega^2 = -n$, on trouvera

$$(57)\quad \Delta_0 = 0,\quad \Delta_1 = -\frac{\mathfrak{I}_1}{\pi} n^{\frac{3}{2}},\quad \Delta_2 = -\frac{\mathfrak{I}_1}{\pi} n^{\frac{5}{2}},\quad \Delta_3 = \left(\frac{3}{2}\frac{\mathfrak{I}_3}{\pi^3} - \frac{\mathfrak{I}_1}{\pi}\right) n^{\frac{7}{2}},\ \text{etc...}$$

Comme on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= h^0 + h'^0 + \ldots - k^0 - k'^0 - \ldots,\\
\Delta_1 &= h + h' + \ldots - k - k' - \ldots,\\
\Delta_2 &= h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots,\\
\Delta_3 &= h^3 + h'^3 + \ldots - k^3 - k'^3 - \ldots,\\
&\text{etc.}\ldots;
\end{aligned}$$

il est clair que les équations (56) ou (57) feront connaître les différences qu'on obtient, quand du nombre des valeurs diverses de h, ou de la somme de ces valeurs, ou de la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc., on retranche le nombre des valeurs de k, ou la somme de ces valeurs, ou la somme de leurs carrés, de leurs cubes, etc... On conclura en particulier de la première des équations (56) ou (57), c'est-à-dire, de la formule

$$\Delta_0 = 0,$$

que le nombre des valeurs de h est toujours, comme nous le savions d'avance, égal au nombre des valeurs de k. On conclura en outre de la seconde des équations (56) que, dans le cas où ω vérifiera la condition

$$\omega^2 = n,$$

la somme des diverses valeurs de h équivaut à la somme des diverses valeurs de k. C'est au reste ce qu'il était facile de prévoir, puisque alors les valeurs de h, étant deux à deux de la forme

$$l,\quad n - l,$$

la somme de ces valeurs doit se réduire, en même temps que la somme des valeurs de k, au produit

$$\frac{1}{2}\frac{N}{2}n = \frac{nN}{4}.$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend $n=5$, on aura $N=4$,

$$\begin{aligned}
&\varpi = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,\\
&h + h' = 1 + 4, \quad k + k' = 2 + 3,\\
&h + h' = k + k' = \frac{4.5}{4} = 5.
\end{aligned}$$

Pareillement, si l'on prend $n = 21 = 3.7$, on aura $N = 2.6 = 12$,

$$\varpi = \rho + \rho^4 + \rho^5 + \rho^{16} + \rho^{17} + \rho^{20} - \rho^2 - \rho^8 - \rho^{10} - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{19},$$

$$\begin{aligned}
&h + h' + \ldots = 1 + 4 + 5 + 16 + 17 + 20,\\
&k + k' + \ldots = 2 + 8 + 10 + 11 + 13 + 19,\\
&h + h' + \ldots = k + k' + \ldots = 3.21 = \frac{12.21}{4}.
\end{aligned}$$

Il importe d'observer que, parmi les valeurs de $\mathfrak{z}_m$, les seules quantités

$$\mathfrak{z}_2,\ \mathfrak{z}_4,\ \mathfrak{z}_6, \ldots$$

entrent dans les seconds membres des formules (56), et les seules quantités

$$\mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_3,\ \mathfrak{z}_5, \ldots$$

dans les seconds membres des formules (57). Il en résulte que les diverses valeurs de Δ_m, c'est-à-dire, les divers termes de la suite

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4, \ldots$$

sont liés entre eux par des équations de condition que l'on obtiendra sans peine en éliminant

$$\mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_4, \ldots$$

entre les formules (56), ou

$$\mathfrak{I}_1,\ \mathfrak{I}_3, \ldots$$

entre les formules (57). Ainsi, en particulier, si l'on suppose $\varpi^2 = n$, on trouvera, en vertu des formules (56),

$$\Delta_3 = \frac{3}{2} n\, \Delta_2; \tag{58}$$

ou, ce qui revient au même,

$$h^3 + h'^3 + \ldots - k^3 - k'^3 - \ldots = \frac{3}{2} n\, (h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots).$$

On trouvera, par exemple, pour $n = 5$,

$$\varpi = \rho + \rho^4 - \rho^2 - \rho^3,$$

$$\Delta_2 = 1 + 4^2 - 2^2 - 3^2 = 4, \quad \Delta_3 = 1 + 4^3 - 2^3 - 3^3 = 30 = 3.5.\frac{4}{2};$$

pour $n = 8$,

$$\varpi = \rho + \rho^7 - \rho^3 - \rho^5,$$

$$\Delta_2 = 1 + 7^2 - 3^2 - 5^2 = 16, \quad \Delta_3 = 1 + 7^3 - 3^3 - 5^3 = 192 = 3.8.\frac{16}{2};$$

pour $n = 12$,

$$\varpi = \rho + \rho^{11} - \rho^5 - \rho^7,$$

$$\Delta_2 = 1 + 11^2 - 5^2 - 7^2 = 48, \quad \Delta_3 = 1 + 11^3 - 5^3 - 7^3 = 864 = 3.12.\frac{48}{2};$$

pour $n = 13$,

$$\varpi = \rho + \rho^3 + \rho^4 + \rho^9 + \rho^{10} + \rho^{12} - \rho^2 - \rho^5 - \rho^6 - \rho^7 - \rho^8 - \rho^{11},$$

$$\Delta_2 = 1 + 3^2 + 4^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 - 2^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 8^2 - 11^2 = 52,$$

$$\Delta_3 = 1 + 3^3 + 3^4 + 9^3 + 10^3 + 12^3 - 2^3 - 5^3 - 6^3 - 7^3 - 8^3 - 11^3 = 1014 = 3.13.$$

pour $n = 17$,

$$\varpi = \rho + \rho^2 + \rho^4 + \rho^8 + \rho^9 + \rho^{13} + \rho^{15} + \rho^{16} - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6 - \rho^7 - \rho^{10} - \rho^{11} - \rho^{12} - \rho^{14},$$

$$\Delta_2 = 1 + 2^2 + 4^2 + 8^2 + 9^2 + 13^2 + 15^2 + 16^2 - 3^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 10^2 - 11^2 - 12^2 - 14^2 = 136,$$

$$\Delta_3 = 1 + 2^3 + 4^3 + 8^3 + 9^3 + 13^3 + 15^3 + 16^3 - 3^3 - 5^2 - 6^3 - 7^3 - 10^3 - 11^3 - 12^3 - 14^3 = 3468 = 3.17.\frac{1}{}$$

pour $n = 21$,

$$+\rho^4+\rho^5+\rho^{16}+\rho^{17}+\rho^{20}-\rho^2-\rho^8-\rho^{10}-\rho^{11}-\rho^{13}-\rho^{19},$$

$$+4^2+5^2+16^2+17^2+20^2-2^2-8^2-10^2-11^2-13^2-19^2=168,$$

$$+4^3+5^3+16^3+17^3+20^3-2^3-8^3-10^3-11^3-13^3-19^3=5292=3.21.\frac{168}{2};$$

etc...

Si l'on suppose, au contraire, $\omega^2 = -n$, on aura, en vertu des formules (57),

$$(59) \qquad \Delta_2 = n\Delta_1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$k^2+k'^2+\ldots-h^2-h'^2-\ldots=n(k+k'+\ldots-h-h'-\ldots).$$

On trouvera, par exemple, pour $n=3$,

$$\omega = \rho - \rho^2$$

$$-\Delta_1 = 2 - 1 = 1, \quad -\Delta_2 = 2^2 - 1 = 3.1;$$

pour $n=4$,

$$\omega = \rho - \rho^3$$

$$-\Delta_1 = 3 - 1 = 2, \quad -\Delta_2 = 3^2 - 1 = 8 = 4.2;$$

pour $n=7$,

$$\omega = \rho + \rho^2 + \rho^4 - \rho^3 - \rho^5 - \rho^6,$$

$$-\Delta_1 = 3 + 5 + 6 - 1 - 2 - 4 = 7,$$

$$-\Delta_2 = 3^2+5^2+6^2-1-2^2-4^2 = 49 = 7.7;$$

pour $n=8$,

$$\omega = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7,$$

$$-\Delta_1 = 5+7-1-3=8, \quad -\Delta_2 = 5^2+7^2-1-3^2=64=8.8;$$

pour $n=11$,

$$\omega = \rho+\rho^3+\rho^4+\rho^5+\rho^9-\rho^2-\rho^6-\rho^7-\rho^8-\rho^{10},$$

$$-\Delta = 2+6+7+8+10-1-3-4-5-9=11,$$

$$-\Delta = 2^2+6^2+7^2+8^2+10^2-1-3^2-4^2-5^2-9^2=121=11.11;$$

pour $n = 15 = 3.5$,

$$\begin{aligned}
\Theta &= \rho + \rho^2 + \rho^4 + \rho^8 - \rho^7 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{14},\\
-\Delta_1 &= 7 + 11 + 13 + 14 - 1 - 2 - 4 - 8 = 30,\\
-\Delta_2 &= 7^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 - 1 - 2^2 - 4^2 - 8^2 = 450 = 15.30;
\end{aligned}$$

pour $n = 19$,

$$\begin{aligned}
\Theta &= \rho + \rho^4 + \rho^5 + \rho^6 + \rho^7 + \rho^9 + \rho^{11} + \rho^{16} + \rho^{17} - \rho^2 - \rho^3 - \rho^8 - \rho^{10} - \rho^{12} - \rho^{13} - \rho^{14} - \rho^{15} - \rho^{18},\\
-\Delta_1 &= 2 + 3 + 8 + 10 + 12 + 13 + 14 + 15 + 18 - 1 - 4 - 5 - 6 - 7 - 9 - 11 - 16 - 17 = 19,\\
-\Delta_2 &= 2^2 + 3^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 18^2 - 1 - 4^2 - 5^2 - 6^2 - 7^2 - 9^2 - 11^2 - 16^2 - 17^2 = 361 =
\end{aligned}$$

pour $n = 20$,

$$\begin{aligned}
\Theta &= \rho + \rho^3 + \rho^7 + \rho^9 - \rho^{11} - \rho^{13} - \rho^{17} - \rho^{19},\\
-\Delta_1 &= 11 + 13 + 17 + 19 - 1 - 3 - 7 - 9 = 40,\\
-\Delta_2 &= 11^2 + 13^2 + 17^2 + 19^2 - 1 - 3^2 - 7^2 - 9^2 = 800 = 20.40;
\end{aligned}$$

etc...

Il est bon d'observer encore que la valeur de ς_m est positive, et même ordinairement renfermée entre des limites qu'il est facile d'obtenir. En effet, cette valeur qui, en vertu de la formule

$$(60) \qquad \iota_1 = 1,$$

peut être réduite à

$$(61) \qquad \varsigma_m = 1 + \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_3}{3^m} + \cdots$$

sera évidemment comprise entre les limites

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} - \ldots$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots \quad 2 - \left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots\right).$$

Or, comme, en prenant $m=2$, on a, en vertu de formules connues,

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\ldots=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}=1,6449\ldots$$

il en résulte que $\mathfrak{z}_2$, et à plus forte raison $\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4, \ldots$ sont positifs, et renfermés entre les limites

$$1,6449\ldots \quad \text{et} \quad 2-1,6449\ldots=0,3551\ldots$$

Comme, d'ailleurs, les nombres de Bernoulli

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{42}, \ldots$$

vérifient les équations

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots=\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{1.2},$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots=\frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4},$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots=\frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6},$$

etc...

il en résulte que les quantités

$$\mathfrak{z}_2, \quad \mathfrak{z}_4, \quad \mathfrak{z}_6, \ldots$$

sont respectivement supérieures aux produits

$$\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{1.2}, \qquad \frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}, \qquad \frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc}\ldots$$

et inférieures aux différences

$$2-\frac{1}{6}\,\frac{2\pi^2}{1.2}, \quad 2-\frac{1}{30}\,\frac{2^3\pi^4}{1.2.3.4}, \quad 2-\frac{1}{42}\,\frac{2^5\pi^6}{1.2.3.4.5.6}, \text{ etc}\ldots$$

Quant à la quantité

(62) $$\mathfrak{z}_1=1+\frac{\iota_2}{2}+\frac{\iota_3}{3}+\frac{\iota_4}{4}+\ldots,$$

on peut seulement affirmer qu'elle sera nulle ou positive. C'est ce qu'on démontrera sans peine, comme l'a fait M. Dirichlet pour le cas où n est impair, à l'aide d'une méthode de transformation qu'Euler a exposée dans le 15[e] chapitre de l'*Introduction à l'analyse des infinis*, et que nous allons rappeler.

Puisque la formule (29) entraîne généralement la formule (30), il est clair que, si l'on nomme

$$\alpha,\ 6,\ \gamma,\ldots$$

ceux des nombres premiers qui ne divisent pas le module n, on aura

$$(63)\quad 1+\frac{\iota_2}{2^m}+\frac{\iota_3}{3^m}+\ldots=\left(1+\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}+\frac{\iota_{\alpha^2}}{\alpha^{2m}}+\ldots\right)\left(1+\frac{\iota_6}{6^m}+\frac{\iota_{6^2}}{6^{2m}}+\ldots\right)\ldots$$
$$=\left(1-\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_6}{6^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\gamma}{\gamma^m}\right)^{-1}\ldots$$

Or, cette dernière formule, subsistant toujours, tant que la série comprise dans le premier membre est convergente, ou, ce qui revient au même, tant que m surpasse l'unité, quelque petite que soit la différence $m-1$, pourra être étendue au cas même où l'on a $m=1$. On aura donc, pour toutes les valeurs entières de m, et même pour $m=1$,

$$(64)\qquad \mathfrak{s}_m=\left(1-\frac{\iota_\alpha}{\alpha^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_6}{6^m}\right)^{-1}\left(1-\frac{\iota_\gamma}{\gamma^m}\right)^{-1}\ldots$$

$\alpha, 6, \gamma,\ldots$ désignant les facteurs premiers qui ne divisent pas m. Or, comme les facteurs, que renferme en nombre infini le second membre de la formule (64), sont tous positifs, il en résulte que la valeur de $\mathfrak{s}_m$ donnée par cette formule ne sera jamais négative. Elle ne pourra donc être que positive ou nulle. On a vu d'ailleurs que les valeurs de $\mathfrak{s}_m$ étaient toujours positives pour des valeurs de m supérieures à l'unité.

Lorsqu'on a obtenu des limites entre lesquelles se trouvent comprises les quantités

$$\varsigma_2,\ \varsigma_3,\ \varsigma_4, \ldots$$

on peut en déduire d'autres limites entre lesquelles se trouvent renfermées ou les différences

$$\Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4, \ldots$$

ou des fonctions linéaires de ces différences. Ainsi, en particulier, dans le cas où l'on a $\varpi^2 = n$, on peut affirmer non-seulement que la valeur de ς_2 est renfermée entre les limites

$$\frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad 2 - \frac{\pi^2}{6},$$

mais encore, en vertu de la formule

$$\Delta_2 = \frac{\varsigma_2}{\pi^2} n^{\frac{5}{2}},$$

que la valeur de la diffférence

$$\Delta_2 = h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots$$

est renfermée entre les limites

$$\frac{1}{6} n^2 \sqrt{n} \quad \text{et} \quad 0{,}035\ldots\ n^2 \sqrt{n}.$$

Donc alors la valeur de Δ_2 est toujours inférieure à $\frac{1}{6} n^2 \sqrt{n}$.

Ainsi, par exemple, on a pour $n = 5$, $\Delta_2 = 4 < \frac{1}{6} 5^2 \sqrt{5}$.

Les formules qui précèdent sont, pour la plupart, déduites de l'équation (33) qu'on peut encore écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} n\,\mathrm{f}(x) = \int_0^a \mathrm{f}(u)\,du &+ 2\cos\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{2\pi u}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + 2\cos\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{3\pi u}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + \ldots \\ &+ 2\sin\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{2\pi u}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + 2\sin\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{4\pi u}{n}\,\mathrm{f}(u)\,du + \ldots \end{aligned}$$

et en vertu de laquelle la fonction $f(x)$ ou $nf(x)$ se trouve développée suivant les cosinus et les sinus des multiples de l'arc

$$\frac{2\pi x}{n}.$$

Or, on peut démontrer que, dans le cas où la quantité a ne surpasse pas la limite $\frac{n}{2}$, les deux parties du développement, savoir, la somme des termes qui renferment les cosinus des arcs

$$0, \quad \frac{2\pi x}{n}, \quad \frac{4\pi x}{n}, \dots$$

et la somme des termes que renferment les sinus, sont égales entre elles, par conséquent égales à la moitié du produit $nf(x)$. On a donc, pour des valeurs de a inférieures ou tout au plus égales à $\frac{1}{2}n$, et pour des valeurs de x renfermées entre les limites $0, a$,

$$(65)\quad \frac{1}{2}nf(x) = \int_0^a f(u)\,du + 2\cos\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{2\pi u}{n} f(u)\,du + 2\cos\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \cos\frac{4\pi u}{n} f(u)\,du \dots$$

$$(66)\quad \frac{1}{2}nf(x) = \qquad 2\sin\frac{2\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{2\pi u}{n} f(u)\,du + 2\sin\frac{4\pi x}{n}\int_0^a \sin\frac{4\pi u}{n} f(u)\,du \dots$$

et en effet, pour obtenir les formules (65), (66), il suffira de remplacer, dans les formules (109), (110), de la page 364 du deuxième volume des *Exercices de mathématiques*,

$$a \text{ par } \frac{n}{2}, \quad x \text{ par } 0, \quad X \text{ par } a.$$

Or, de la formule (65) jointe à l'équation (23) ou de la formule (66) jointe à l'équation (24), on tirera, 1°, en supposant $\varpi^2 = n$,

(67) $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\left[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots\right]=$

$$\iota_1\int_0^a \cos\omega u\, f(u)du + \iota_2\int_0^a \cos 2\omega u\, f(u)du + \iota_3\int_0^a \cos 3\omega u\, f(u)du + \ldots,$$

2°, en supposant $\omega^2 = -n$,

(68) $\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}\left[f(h)+f(h')+\ldots-f(k)-f(k')-\ldots\right]=$

$$\iota_1\int_0^a \sin\omega u\, f(u)du + \iota_2\int_0^a \sin 2\omega u\, f(u)du + \iota_3\int_0^a \sin 3\omega u\, f(u)du + \ldots,$$

pourvu que la valeur de ω soit toujours

$$\omega = \frac{2\pi}{n},$$

et qu'en tenant seulement compte des valeurs de h ou de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, on place a entre la limite $\frac{n}{2}$ et le nombre entier immédiatement inférieur à cette limite. Les équations (67), (68) ne sont évidemment autre chose que les formules (35), (36) étendues au cas où l'on suppose les quantités

$$h,\ h',\ h'',\ldots,\quad k,\ k',\ k'',\ldots$$

inférieures, non plus au nombre n, mais à la limite $\frac{n}{2}$, la dernière a pouvant atteindre cette limite. Or, de ces formules, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage, on déduira encore, dans le cas dont il s'agit, les équations (40), (41), (42), (43), (44), (45); et par suite, si l'on pose dans le même cas

(69) $$\delta_m = h^m + h'^m + \ldots - k^m - k'^m \ldots,$$

c'est-à-dire, si l'on représente par δ_m la partie de Δ_m qui renferme des valeurs de h et de k inférieures à $\frac{1}{2}n$, on trouvera, pour des valeurs paires de m, 1°, en supposant $\Theta^2 = n$,

$$(70)\qquad (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \delta_m = D_\omega^m \left(\iota_1 \frac{\sin \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{\sin 3\omega a}{3\omega} + \dots \right)$$

2° en supposant $\Theta^2 = -n$,

$$(71)\qquad (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \delta_m = D_\omega^m \left(\iota_1 \frac{1 - \cos \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{1 - \cos 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{1 - \cos 3\omega a}{3\omega} + \dots \right)$$

On trouvera au contraire, pour des valeurs impaires de m, 1°, en supposant $\Theta^2 = n$,

$$(72)\qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \delta_m = D_\omega^m \left(\iota_1 \frac{1 - \cos \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{1 - \cos 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{1 - \cos 3\omega a}{3\omega} + \dots \right)$$

2° en supposant $\Theta^2 = -n$,

$$(73)\qquad (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}} \delta_m = D_\omega^m \left(\iota_1 \frac{\sin \omega a}{\omega} + \frac{\iota_2}{2^m} \frac{\sin 2\omega a}{2\omega} + \frac{\iota_3}{3^m} \frac{\sin 3\omega a}{2\omega} + \dots \right)$$

On ne doit pas oublier que, dans ces dernières formules, tout comme dans les équations (67), (68), la quantité a doit être renfermée entre la limite supérieure $\frac{n}{2}$, qu'elle peut atteindre, et le nombre entier $\frac{n-1}{2}$ ou $\frac{n}{2} - 1$ immédiatement inférieur à cette limite.

Concevons en particulier que l'on prenne

$$a = \frac{n}{2};$$

en substituant cette valeur de a dans les expressions de la forme

$$D_\omega^m \frac{\sin l\omega a}{\omega}, \quad D_\omega^m \frac{1 - \cos l\omega a}{\omega},$$

après avoir préalablement effectué les différenciations relatives à ω, l'on trouvera, pour des valeurs paires de m,

$$\frac{\sin l\omega a}{\omega} = (-1)^{l+1}\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{2.3\ldots m}{\pi^m}\,l - \frac{4.5\ldots m}{\pi^{m-2}}\,l^3 + \ldots \pm \frac{m}{\pi^2}\,l^{m-1}\right],$$

$$\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = \left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}} - (-1)^l\left(\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}} - \frac{3.4\ldots m}{\pi^{m-1}}\,l^2 + \ldots \pm \frac{1}{\pi}\,l^m\right)\right];$$

et pour des valeurs impaires de m,

$$\frac{\sin l\omega a}{\omega} = (-1)^{l}\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{2.3\ldots m}{\pi^m}\,l - \frac{4.5\ldots m}{\pi^{m-2}}\,l^2 + \ldots \pm \frac{1}{\pi}\,l^m\right],$$

$$\frac{1-\cos l\omega a}{\omega} = -\left(\frac{n}{2}\right)^{m+1}\left[\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}} - (-1)^l\left(\frac{1.2.3\ldots m}{\pi^{m+1}} - \frac{3.4\ldots m}{\pi^{m-1}}\,l^2 + \ldots \pm \frac{m}{\pi^2}\,l^{m-1}\right)\right].$$

Donc, si l'on pose, pour abréger,

$$I_1 = \iota_1 - \frac{\iota_2}{2} + \frac{\iota_3}{3} - \ldots, \quad I_2 = \iota_1 - \frac{\iota_2}{2^2} + \frac{\iota_3}{3^3} - \ldots, \text{ etc.}\ldots,$$

et généralement

$$(74) \qquad I_m = \iota_1 - \frac{\iota_2}{2^m} + \frac{\iota_3}{3^m} - \frac{\iota_4}{4^m} + \ldots,$$

on tirera des formules (70) et (72), en supposant $\varpi^2 = n$,
1°, pour des valeurs paires de m,

$$\delta_m = -\left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[m\,\frac{I_2}{\pi^2} - (m-2)(m-1)m\,\frac{I_4}{\pi^4} + \ldots \pm 2.3\ldots m\,\frac{I_m}{\pi^m}\right],$$

2°, pour des valeurs impaires de m,

$$\delta_m = -\left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[m\,\frac{I_2}{\pi^2} - (m-2)(m-1)m\,\frac{I_4}{\pi^4} + \ldots \pm 1.2.3\ldots m\,\frac{I_{m+1}+\delta_{m+1}}{\pi^{m+1}}\right];$$

mais en supposant $\varpi^2 = n$, on tirera des formules (71) et (73),
1°, pour des valeurs paires de m,

$$(7) \qquad \delta_m = \left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}}\left[\frac{I_1}{\pi} - (m-1)m\,\frac{I_3}{\pi^3} + \ldots \pm 1.2.3\ldots m\,\frac{I_{m+1}+\delta_{m+1}}{\pi^{m+1}}\right],$$

2°, pour des valeurs impaires de m,

$$(78)\quad \delta_m = \left(\frac{n}{2}\right)^m n^{\frac{1}{2}} \left[\frac{I_1}{\pi} - (m-1)m\frac{I_3}{\pi^3} + \ldots \pm 2.3\ldots m\frac{I_m}{\pi^m}\right].$$

Ainsi, en supposant $\varpi^2 = n$, on trouvera successivement

$$(79)\quad \delta_0 = 0, \qquad \delta_1 = -\frac{1}{2}\frac{I_2 + \Im_2}{\pi^2} n^{\frac{3}{2}},\ \delta_2 = -\frac{1}{2}\frac{I_2}{\pi^2} n^{\frac{5}{2}},\ \text{etc}\ldots$$

tandis qu'en supposant $\varpi^2 = n$, on trouvera

$$(80)\quad \delta_0 = \frac{I_1 + \Im_1}{\pi} n^{\frac{1}{2}},\ \delta_1 = \frac{1}{2}\frac{I_1}{\pi} n^{\frac{3}{2}}, \qquad \delta_2 = \left(\frac{1}{4}\frac{I_1}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{I_3 + \Im_3}{\pi^3}\right) n^{\frac{5}{2}}, \text{etc}\ldots$$

Comme on aura d'ailleurs, en tenant compte seulement des valeurs de h et de k inférieures à $\frac{1}{2}n$,

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= h^0 + h'^0 + \ldots - k^0 - k'^0 - \ldots = i - j,\\
\delta_1 &= h + h' + \ldots - k - k' - \ldots\\
\delta_2 &= h^2 + h'^2 + \ldots - k^2 - k'^2 - \ldots\\
&\text{etc}\ldots,
\end{aligned}$$

il est clair que les équations (79), (80) feront connaître la différence $i - j$, et celles qu'on obtient quand de la somme des valeurs de h inférieures à $\frac{n}{2}$, ou de la somme de leurs carrés,... on retranche la somme des valeurs de k inférieures à $\frac{n}{2}$, ou la somme de leurs carrés.... La première des équations (79), c'est-à-dire, la formule

$$\delta_0 = 0, \quad \text{ou} \quad i - j = 0,$$

s'accorde, comme on devait s'y attendre, avec l'équation (31).

Avant d'aller plus loin, observons que les quantités

$$I_1,\quad I_2,\quad I_3\ldots.$$

où les diverses valeurs de I_m, sont liées aux quantités

$$\mathfrak{z}_1,\quad \mathfrak{z}_2,\quad \mathfrak{z}_3,\ldots,$$

c'est-à-dire, aux diverses valeurs de $\mathfrak{z}_m$, par des équations qu'il est facile d'obtenir. En effet, comme on aura généralement

$$\iota_{2m}=\iota_2\,\iota_m,$$

et par suite

$$\frac{\iota_2}{2^m}\mathfrak{z}_m=\frac{\iota_2}{2^m}+\frac{\iota_4}{4^m}+\frac{\iota_6}{6^m}+\ldots=\frac{1}{2}(\mathfrak{z}_m-I_m),$$

on en conclura

$$(81)\qquad I_m=\left(1-\frac{\iota_2}{2^{m-1}}\right)\mathfrak{z}_m.$$

On aura donc

$$(82)\quad I_1=(1-\iota_2)\mathfrak{z}_1,\quad I_2=\left(1-\frac{\iota_2}{2}\right)\mathfrak{z}_2,\quad I_3=\left(1-\frac{\iota_2}{4}\right)\mathfrak{z}_3,\ \text{etc...}$$

Ajoutons que, ι_2 se réduisant toujours à l'une des trois quantités

$$-1,\quad 0,\quad +1,$$

les valeurs de

$$I_2,\quad I_3,\quad I_4$$

seront, en vertu des formules (82), des quantités positives, tout comme les valeurs de

$$\mathfrak{z}_2,\quad \mathfrak{z}_3,\quad \mathfrak{z}_4,\ldots$$

Quant à la quantité I_1, liée à $\mathfrak{z}_1$ par la formule

$$I_1=(1-\iota_2)\,\mathfrak{z}_1,$$

elle sera ou positive ou nulle, ainsi que $\mathfrak{z}_1$; et pourra même s'évanouir, sans que $\mathfrak{z}_1$ s'évanouisse, avec le facteur $1-\iota_2$, lorsqu'on aura

$$\left[\frac{2}{n}\right] = 1,$$

ce qui suppose n impair et de la forme $8x+1$ ou $8x+7$. Supposons en particulier n de la forme $8x+7$, et composé de facteurs impairs inégaux. On aura

$$\varpi^2 = -n,$$

et comme alors I_1 s'évanouira, ainsi que $1-\iota_2$, la seconde des formules (80) donnera

$$\delta_1 = 0.$$

On trouvera, par exemple, pour $n=7$,

$$\delta_1 = 1+2-3 = 0,$$

pour $n=15$,

$$\delta_1 = 1+2+4-7 = 0, \text{ etc.}\ldots$$

Revenons maintenant aux formules (79) et (80). Si, dans ces formules, on substitue les valeurs de $I_1, I_2, I_3, \ldots$ fournies par les équations (82), on trouvera, en supposant $\varpi^2 = n$,

$$(83)\ \delta_0 = 0, \qquad \delta_1 = -\left(1-\frac{\iota_2}{4}\right)\frac{\vartheta_2}{\pi_2}n^{\frac{3}{2}},\ \delta_2 = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{\iota_2}{2}\right)\frac{\vartheta_2}{\pi_2}n^{\frac{5}{2}}, \text{etc.},$$

$$(84)\ \delta_0 = (2-\iota_2)\frac{\vartheta_1}{\pi}n^{\frac{1}{2}},\ \delta_1 = \frac{1-\iota_2}{2}\frac{\vartheta_2}{\pi}n^{\frac{3}{2}}, \qquad \delta_2 = \left(\frac{2-\iota_2}{8}\frac{\vartheta_1}{\pi} - \frac{8-\iota_2}{8}\frac{\vartheta_3}{\pi_3}\right)n^{\frac{5}{2}},$$

etc...

Lorsqu'à la première des équations (79) ou (83) on joint la première des équations (79) ou (84), on arrive à cette conclusion remarquable, que la différence

$$\delta_0 \quad \text{ou} \quad i-j$$

est toujours nulle ou positive. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. Supposons que, ρ étant une des racines primitives de l'équation

$$x^n = 1,$$

la somme alternée

$$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'}, \ldots$$

vérifie la condition

$$\varpi^2 = \pm n,$$

et que le groupe d'exposants

$$h, h', h'', \ldots$$

renferme l'unité. Si les entiers inférieurs à n, mais premiers à n, sont en nombre égal à i dans le groupe $h, h', h'', \ldots$, et en nombre égal à j dans le groupe, la différence

$$i - j$$

sera toujours nulle ou positive, et ne cessera d'être nulle que lorsqu'on aura

$$\varpi^2 = -n.$$

Les quantités

$$\delta_0, \quad \delta_1, \quad \delta_2, \quad \delta_3, \quad \delta_4, \ldots$$

sont évidemment liées non-seulement entre elles, mais encore avec les quantités

$$\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \quad \Delta_4, \ldots,$$

par des équations de condition qu'on obtiendra sans peine en éliminant

$$\delta_2, \quad \delta_4, \ldots$$

entre les formules (56), (83), ou en éliminant

$$\delta_1, \quad \delta_3, \ldots$$

entre les formules (57) et (84). Ainsi, en particulier, on tirera des formules (56), (83), en supposant $\varpi^2 = n$,

$$(85) \qquad \Delta_2 = \frac{\Delta_3}{\frac{3}{2}n} = \frac{-4n\delta_1}{4-\iota_2} = \frac{-4\delta_2}{2-\iota_2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(86) \qquad \delta_2 = \frac{2-\iota_2}{4-\iota_2} n\delta_1, \quad \Delta_2 = -\frac{4}{2-\iota_2}\delta_2, \quad \Delta_3 = \frac{3}{2} n\Delta_2;$$

et des formules (57), (84), en supposant $\varpi^2 = -n$,

$$(87) \qquad \frac{2\delta_1}{1-\iota_2} = \frac{n\delta_0}{2-\iota_2} = -\Delta_1 = -\frac{\Delta_2}{n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(88) \quad \delta_1 = \frac{1-\iota_2}{2-\iota_2}\frac{n}{2}(i-j), \quad \Delta_1 = -n\frac{i-j}{2-\iota_2}, \quad \Delta_2 = -n^2\frac{i-j}{2-\iota_2}.$$

Dans l'application de chacune des formules (87) et (88), on doit distinguer trois cas correspondants aux trois valeurs

$$-1, \quad 0, \quad 1,$$

que peut acquérir la quantité ι_2. Ainsi, en prenant pour n un nombre impair, on tirera de ces formules, 1° lorsque n sera de la forme $8x+1$,

$$(89) \qquad \delta_2 = \frac{1}{3}n\delta_1, \quad \Delta_2 = -\frac{4}{3}n\delta_1, \quad \Delta_3 = -2n^2\delta_1;$$

2° lorsque n sera de la forme $8x+3$,

$$(90) \quad \delta_1 = n\frac{i-j}{3}, \quad \Delta_1 = -n\frac{i-j}{3}, \quad \Delta_2 = -n^2\frac{i-j}{3};$$

3° lorsque n sera de la forme $8x+5$,

(91) $$\delta_2 = \frac{3}{5}n\delta_1,\quad \Delta_2 = -\frac{4}{5}n\delta_1,\quad \Delta_3 = -\frac{6}{5}n\delta_1;$$

4° lorsque n sera de la forme $8x+7$,

(92) $$\delta_1 = 0,\quad \Delta_1 = -n(i-j),\quad \Delta_2 = -n^2(i-j).$$

Au contraire, en prenant pour n un nombre pair, divisible par 4 ou par 8, on tirera des formules (87) et (88), 1° lorsqu'on aura $\varpi^2 = n$,

(93) $$\delta_2 = \frac{n}{2}\delta_1,\quad \Delta_2 = -n\delta_1,\quad \Delta_3 = -\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

2° lorsqu'on aura $\varpi^2 = -n$,

(94) $$\delta_1 = n\frac{i-j}{4},\quad \Delta_1 = -n\frac{i-j}{2},\quad \Delta_2 = -n^2\frac{i-j}{2}.$$

On vérifiera aisément ces diverses formules dans les cas particuliers, et l'on trouvera, par exemple,

pour $n=17$,

$$\delta_1 = -6,\quad \delta_2 = -34 = \frac{n}{3}\delta_1,\quad \Delta_2 = 136 = -\frac{4n}{3}\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 3468 = -2n^2\delta_1;$$

pour $n=11$,

$$i=4,\quad j=1,\quad i-j=3,\quad \frac{i-j}{3}=1,$$
$$\delta_1 = 11 = n\frac{i-j}{3},\quad \Delta_1 = -11 = n\frac{i-j}{3},\quad \Delta_2 = -121 = -n^2\frac{i-j}{3};$$

pour $n=5$,

$$\delta_1 = -1,\quad \delta_2 = -3 = \frac{3}{5}n\delta_1,\quad \Delta_2 = 4 = -\frac{4}{5}n\delta_1,$$
$$\Delta_3 = 30 = -\frac{6}{5}n^2\delta_1;$$

pour $n=7$,

$$i=1,\quad j=1,\quad i-j=1,$$

$$\delta_1=0,\quad \Delta_1=-7=-n(i-j),\quad \Delta_2=-49=-n^2(i-j).$$

On trouvera pareillement

pour $n=13$,

$$\delta_1=-5,\quad \delta_2=-39=\frac{3}{5}n\delta_1,\quad \Delta_2=52=-\frac{4}{5}n\delta_1,$$

$$\Delta_3=1014=-\frac{6}{5}n^2\delta_1;$$

pour $n=15=3.5$,

$$i=3,\quad j=1,\quad i-j=2,$$

$$\delta_1=0,\quad \Delta=-30=-n(i-j),\quad \Delta_2=-450=-n^2(i-j);$$

pour $n=21=3.7$,

$$\delta_1=-10,\quad \delta_2=-126=\frac{3}{5}n\delta_1,\quad \Delta_2=168=-\frac{4}{5}n\delta_1,$$

$$\Delta_3=5292=-\frac{6}{5}n^2\delta_1.$$

Si l'on attribue à n, non plus des valeurs impaires, mais des valeurs paires, on trouvera

pour $n=4$, $\varpi^2=-4$, $\varpi=\rho-\rho^3$,

$$i=1,\quad j=0,\quad i-j=1,$$

$$\delta_1=1=n\frac{i-j}{4},\quad \Delta_1=-2=-n\frac{i-j}{2},\quad \Delta_2=-8=-n^2\frac{i-j}{2};$$

pour $n=8$, $\varpi^2=8$, $\varpi=\rho+\rho^7-\rho^3-\rho^5$,

$$\delta_1=-2,\quad \delta_2=-8=\frac{n}{2}\delta_1,\quad \Delta_2=16=-n\delta_1,$$

$$\Delta_3=192=-\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

pour $n=8$, $\omega^2=-8$, $\omega=\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7$,

$$i=2,\quad j=0,\quad i-j=2,\quad \frac{i-j}{2}=1,$$

$$\delta_1=4=n^{\frac{i-j}{4}},\quad \Delta_1=-8=-n^{\frac{i-j}{2}},\quad \Delta_2=-64=-n^{2\frac{i-j}{2}};$$

pour $n=12$,

$$\delta_1=-4,\quad \delta_2=-24=\frac{n}{2}\delta_1,\quad \Delta_2=48=-n\delta_1,$$

$$\Delta_3=864=-\frac{3}{2}n^2\delta_1;$$

pour $n=20$,

$$i=4,\quad j=0,\quad i-j=4,\quad \frac{i-j}{2}=2,\quad \frac{i-j}{4}=1,$$

$$\delta_1=20=n^{\frac{i-j}{4}},\quad \Delta_1=-40=-n^{\frac{i-j}{2}},\quad \Delta_2=-800=-n^{2\frac{i-j}{2}}.$$

Les diverses formules établies dans cette note comprennent les formules du même genre trouvées par M. Dirichlet. J'ajouterai que les équations de condition par lesquelles se trouvent liés les uns aux autres les termes des deux suites

$$\Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \Delta_3,\ldots$$
$$\delta_0,\quad \delta_1,\quad \delta_2,\quad \delta_3,\ldots,$$

peuvent être démontrées directement, et d'une manière très-simple, comme je l'ai remarqué dans un mémoire que renferment les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, pour l'année* 1840 (1er semestre, page 444).

NOTE XIII.

SUR LES FORMES QUADRATIQUES DE CERTAINES PUISSANCES DES NOMBRES PREMIERS, OU DU QUADRUPLE DE CES PUISSANCES.

Soient p un nombre premier impair,
n un diviseur de $p-1$,
$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n, mais premiers à n.
N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$,
ρ une racine primitive de l'équation

(1) $$x^n = 1,$$

et supposons les entiers

$$h, k, l, \ldots$$

partagés en deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

de telle manière que la somme alternée

(2) $$\varpi = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots$$

vérifie la condition

(3) $$\varpi^2 = \pm n.$$

Soient encore :

θ une racine primitive de l'équation

(4) $$x^p = 1,$$

t une racine primitive de l'équivalence

(5) $$x^{p-1} \equiv 1, \ (\mathrm{mod.}\ p)$$

et de plus

$$\Theta_h, \Theta_k, \Theta_l, \ldots$$

des expressions imaginaires déterminées par des équations de la forme

(6) $$\Theta_l = \theta + \rho^l \theta^t + \rho^{2l} \theta^{t^2} + \ldots + \rho^{(p-2)l} \theta^{t^{p-2}}.$$

Aux deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots,$$

entre lesquels se partagent les exposants ou indices

$$h, k, l, \ldots$$

correspondent deux groupes

$$\Theta_h, \Theta_{h'}, \Theta_{h''}, \ldots \quad \text{et} \quad \Theta_k, \Theta_{k'}, \Theta_{k''}, \ldots$$

entre lesquels se partagent les expressions imaginaires

$$\Theta_h, \Theta_k, \Theta_l, \ldots;$$

et, si l'on pose

(7) $$\mathrm{I} = \Theta_h \Theta_{h'} \Theta_{h''} \ldots, \quad \mathrm{J} = \Theta_k \Theta_{k'} \Theta_{k''} \ldots,$$

alors, en vertu des principes établis dans la note précédente, les deux binômes

$$\mathrm{I} + \mathrm{J}, \quad \mathrm{I} - \mathrm{J}$$

considérés comme fonctions des racines primitives de l'équation (1) seront, le premier, une fonction symétrique, le second, une fonction alternée de ces racines. Il y a plus, comme la condition (3) suppose que les facteurs premiers et impairs de n sont inégaux, le facteur pair, s'il existe, étant 4 ou 8, la fonction

$$I - J$$

sera, dans l'hypothèse admise, de la forme indiquée par la formule (63) de la note septième; et l'on aura en conséquence

$$(8) \qquad I + J = A, \quad I - J = B\Delta,$$

A,B désignant ou des quantités entières, ou des fonctions qui renfermeront seulement les racines

$$\theta, \theta', \theta'', \ldots$$

de l'équation (4) respectivement multipliées par des coefficients entiers.

Observons maintenant qu'en vertu de la formule (7) de la note III, on aura

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_h \Theta_{h'} \Theta_{h''} \ldots = R_{h,h',h''} \ldots \; \Theta_{h+h'+h''+} \ldots \text{et} \\ \Theta_k \Theta_{k'} \Theta_{k''} \ldots = R_{k,k',k''} \ldots \; \Theta_{k+k'+k''+} \ldots \end{array} \right.$$

$R_{h,\,h',\,h'',\ldots}$ et $R_{k,\,k',\,k'',\ldots}$ désignant deux fonctions entières de la seule variable ρ. D'autre part, si la condition (3) se vérifie sans que n se réduise à l'un des trois nombres

$$3, \quad 4, \quad 8,$$

on aura (voir la note précédente)

$$(10) \quad h + h' + h'' + \ldots \equiv k + k' + k'' + \ldots \equiv 0, \; (\text{mod. } n),$$

et par suite, eu égard à la formule (2) de la note III,

$$(11) \qquad \Theta_{h+h'+h''+\ldots} = \Theta_{k+k'+k''+\ldots} = \Theta_0 = -1.$$

Donc alors les équations (7), (9) donnent simplement

$$(12) \qquad I = -R_{h,\,h',\,h'',\ldots} \quad J = -R_{k,\,k',\,k'',\ldots};$$

et comme, en vertu des formules (12), les fonctions I, J deviendront indépendantes des racines de l'équation (4), ces racines n'entreront pas non plus dans les coefficients

$$\mathrm{A},\ \mathrm{B}$$

qui se réduiront nécessairement à des quantités entières.

Si l'on pose pour abréger

$$(13)\qquad \varpi = \frac{p-1}{n},$$

alors, en désignant par l un quelconque des entiers inférieurs à n, mais premiers à n, on aura, en vertu de la formule (3) de la troisième note,

$$(14)\qquad \Theta_l\Theta_{-l} = (-1)^{\varpi l}p = \Theta_l\Theta_{n-l}.$$

Si le nombre ϖ est pair, la formule (14) donnera simplement

$$(15)\qquad \Theta_l\Theta_{n-l} = p.$$

Si, au contraire, ϖ est impair, n devra être pair, ainsi que $p-1=n\varpi$, et par suite, le nombre l, premier à n, étant impair, la formule (14) donnera

$$(16)\qquad \Theta_l\Theta_{n-l} = -p.$$

Cela posé, on tirera évidemment des formules (7), dans le premier cas,

$$(17)\qquad \mathrm{IJ} = p^{\frac{\mathrm{N}}{2}},$$

et dans le second cas,

$$(18)\qquad \mathrm{IJ} = (-1)^{\frac{\mathrm{N}}{2}}p^{\frac{\mathrm{N}}{2}}.$$

Mais, comme dans le second cas, n étant pair et de l'une des formes

$$4\nu'\nu''\ldots,\quad 8\nu'\nu''\ldots,$$

$\frac{N}{2}$ ne pourrait devenir impair que pour la seule valeur

$$n = 4$$

dont nous faisons ici abstraction, il est clair que la formule (18) se réduira elle-même à l'équation (17).

D'autre part, comme on tire des équations (8)

$$(19) \qquad 2I = A + B\Delta, \quad 2J = A - B\Delta,$$

par conséquent

$$4IJ = A^2 - B\Delta^2,$$

il est clair qu'en ayant égard à l'équation (7) et à la formule (3), on trouvera

$$(20) \qquad 4p^{\frac{N}{2}} = A^2 - B^2\Delta^2 = A^2 \pm nB^2.$$

Pour que la condition (3) se réduise à

$$(21) \qquad \Theta^2 = n$$

il est nécessaire que les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux entre eux, le nombre soit de l'une des formes

$$4x + 1, \quad 4(4x + 3), \quad 8(2x + 1).$$

Mais alors, en vertu du théorème premier de la note IX, l désignant un quelconque des entiers renfermés dans les deux groupes

$$h, h', h'', \ldots \quad \text{et} \quad k, k', k'', \ldots$$

les deux termes

$$l \quad \text{et} \quad n - l$$

appartiendront au même groupe. Donc alors, en vertu des équations (7), jointes à la formule (15) ou (16), on aura

$$(22) \qquad I = J = \pm p^{\frac{N}{4}},$$

savoir,

$$(23) \qquad I = J = p^{\frac{N}{4}},$$

si l'un des deux nombres ϖ, $\frac{N}{4}$ est pair, et

$$(24) \qquad I = J = -p^{\frac{N}{4}},$$

si les nombres ϖ et $\frac{N}{4}$ sont tous deux impairs, ce qui suppose $n = 4\nu$, ν étant un nombre premier de la forme $4x + 3$. Alors aussi l'on tirera des formules (8) et (22)

$$(25) \qquad A = \pm 2p^{\frac{N}{4}}, \quad B = 0.$$

Ces dernières valeurs de A,B satisfont effectivement à la formule (20).

Pour que la condition (3) se réduise à

$$(26) \qquad \omega^2 = -n,$$

il est nécessaire que, les facteurs premiers et impairs du nombre n étant inégaux, ce nombre soit de l'une des formes

$$4x + 3, \quad 4(4x + 1), \quad 8(2x + 1).$$

Nommons alors p^λ la plus haute puissance de μ qui divise simultanément A et B. On aura

$$(27) \qquad A = p^\lambda x, \quad B = p^\lambda y,$$

x, y désignant deux quantités entières non divisibles par p; et, en posant

$$(28) \qquad \mu = \frac{N}{2} - 2\lambda,$$

on verra la formule (20) se réduire à la suivante,

$$(29) \qquad 4p^\mu = x^2 + ny^2.$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les valeurs des exposants λ, μ. On peut y parvenir à l'aide des considérations suivantes.

Comme nous l'avons observé page 375, on a généralement

$$R_{h,k,l,\ldots} = R_{h,k}\, R_{h+k,l,\ldots},$$

en sorte que les formules (12) donneront

$$(30)\qquad \begin{cases} I = -R_{h,h'}\, R_{h+h',h''}\, R_{h+h'+h'',h'''}\ldots, \\ J = -R_{k,k'}\, R_{k+k',k''}\, R_{k+k'+k'',k'''}\ldots \end{cases}$$

Or, dans chacun des facteurs qui composent les seconds membres de ces dernières, on peut immédiatement réduire les deux indices placés au bas de la lettre R à des nombres

$$l, l'$$

représentés par des termes de la suite

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots n-1.$$

On pourra même, en vertu des formules (10) et (12) de la note première, remplacer le facteur

$$R_{l,l'} = \frac{\Theta_l \Theta_{l'}}{\Theta_{l+l'}}$$

par $\pm p$, lorsque la somme des indices l, l' sera le nombre n, et par -1, lorsque l'un des indices s'évanouira. Ce n'est pas tout, lorsque h, h', étant positifs l'un et l'autre, offriront pour somme un nombre différent de n, on aura généralement, en vertu de la formule (13) de la note première,

$$R_{l,l'}\, R_{-l-l'} = p,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(31)\qquad R_{l,l'}\, R_{n-l,n-l'} = p;$$

et, comme des deux sommes,

$$l + l', \quad (n - l) + (n - l') = 2n - (l + l')$$

renfermées entre les limites 0, $2n$, il y en aura toujours une comprise entre les limites $0, n$, l'autre étant comprise entre les limites $n, 2n$, il résulte des équations (14) et (15), jointes à l'équation (17), que l'on aura toujours

$$(32) \qquad \mathrm{I} = p^f \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}}, \quad \mathrm{J} = p^g \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{F}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(33) \qquad \mathrm{IG} = p^f \mathrm{F}, \quad \mathrm{JF} = p^g \mathrm{G},$$

f, g désignant deux nombres entiers propres à vérifier la condition

$$(34) \qquad f + g = \frac{\mathrm{N}}{2},$$

et F, G des produits composés avec des facteurs de la forme

$$\mathrm{R}_{l, l'}$$

dans chacun desquels on pourra supposer les indices l, l' tous deux inférieurs à n, et leur somme $l + l'$ renfermée entre les limites n, $2n$. Si d'ailleurs on substitue dans les formules (33) les valeurs de I, J fournies par les équations (19), on aura identiquement

$$(34) \qquad (\mathrm{A} + \mathrm{B}\omega)\mathrm{G} = 2p^f \mathrm{F}, \quad (\mathrm{A} - \mathrm{B}\omega)\mathrm{F} = 2p^g \mathrm{G},$$

ou, ce qui revient au même, eu égard aux formules (27),

$$(35) \qquad p^\lambda (x + y\omega)\mathrm{G} = 2p^f \mathrm{F}, \quad p^\lambda (x - y\omega)\mathrm{F} = 2p^g \mathrm{G}.$$

On aura donc par suite

$$(36) \quad p^{\lambda - m}(x + y\omega)\mathrm{G} = 2p^{f-m}\mathrm{F}, \quad p^{\lambda - m'}(x - y\omega\mathrm{F} = 2p^{g-m'}\mathrm{G},$$

m, m' étant deux entiers que l'on pourra réduire le premier au plus petit des nombres

$$\lambda,\ f,$$

le second au plus petit des nombres

$$\lambda,\ g,$$

afin que chacun des exposants

$$\lambda - m,\quad f - m,\quad \lambda - m',\quad g - m'$$

soit nul ou positif.

Avant d'aller plus loin, nous ferons une observation importante. Les formules (33), comme toutes celles d'où elles sont déduites, et par suite les formules (36), offrent chacune deux membres représentés par des fonctions entières de ρ qui sont identiquement les mêmes, quand on réduit l'exposant de chaque puissance de ρ à l'un des entiers

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots n-1,$$

ou qui du moins peuvent alors être transformés l'un dans l'autre à l'aide de la seule équation

$$1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{n-1} = 0.$$

Donc après les réductions dont il s'agit la différence entre les deux membres de chacune des formules (36) sera le produit d'un nombre entier par le polynôme

$$(37) \qquad 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{n-1}.$$

D'ailleurs, réduire, dans une fonction entière de ρ, l'exposant de chaque puissance de ρ à l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots n-1,$$

ou, ce qui revient au même, remplacer

$$\begin{array}{llll} \rho^n, & \rho^{2n}, & \rho^{3n}, \ldots & \text{par} \quad \rho^0 = 1, \\ \rho^{n+1}, & \rho^{2n+1}, & \rho^{3n+1}, \ldots & \text{par} \quad \rho, \\ \rho^{n+2}, & \rho^{2n+2}, & \rho^{3n+2}, \ldots & \text{par} \quad \rho^2, \\ \text{etc.}\ldots & & & \\ \rho^{2n-1}, & \rho^{3n-1}, & \rho^{4n-1}, \ldots & \text{par} \quad \rho^{n-1}, \end{array}$$

c'est ajouter aux divers termes de la progression arithmétique

$$\rho^n, \ \rho^{n+1}, \ \rho^{n+2}, \ldots \quad \rho^{2n}, \ \rho^{2n+1}, \ \rho^{2n+2}, \ldots \quad \rho^{3n}, \ \rho^{3n+1}, \ \rho^{3n+2}, \ldots$$

les différences

$$1-\rho^n, \ \rho-\rho^{n+1}, \ \rho^2-\rho^{n+2}, \ldots \quad 1-\rho^{2n}, \ \rho-\rho^{2n+1}, \ \rho^2-\rho^{2n+2}, \ldots$$
$$1-\rho^{3n}, \ \rho-\rho^{3n+1}, \ \rho^2-\rho^{3n+2}, \ldots$$

respectivement égales aux produits

$$1-\rho^n, \ \rho(1-\rho^n), \ \rho^2(1-\rho^n), \ldots \quad 1-\rho^{2n}, \ \rho(1-\rho^{2n}), \ \rho^2(1-\rho^{2n}), \ldots$$
$$1-\rho^{3n}, \ \rho(1-\rho^{3n}), \ \rho^2(1-\rho^{3n}), \ldots$$

qui tous ont pour facteur le binôme

$$1-\rho^n = (1-\rho)(1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{n-1})$$

et par conséquent le polynôme (37). Donc, en définitive, dans chacune des formules (36), la différence entre les deux nombres sera toujours une fonction entière de ρ, qui, avant toute réduction, aura pour facteur le polynôme

$$1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{n-1} = \frac{\rho^n-1}{\rho-1}.$$

Donc, si dans ces formules on remplace la racine primitive ρ de l'équation

$$x^n = 1$$

par une racine primitive r de l'équivalence

$$x^n \equiv 1, \ (\text{mod.} \, p),$$

les deux membres de chacune d'elles offriront pour différence une fonction entière de r qui aura pour facteur le polynôme

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \equiv 0, \ (\text{mod.} \, p);$$

et comme dans cette différence les coefficients des diverses puissances de r seront des entiers, elle devra, ainsi que le polynôme

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}$$

être équivalente à zéro, suivant le module p. Donc, si l'on nomme

$$\delta, \quad \mathfrak{F}, \quad \mathcal{G}$$

ce que deviennent

$$\omega, \quad \mathrm{F}, \quad \mathrm{G}$$

quand on y remplace ρ par r, les formules (36) entraîneront les suivantes

$$(38) \quad p^{\lambda-m}(x + y\delta)\mathcal{G} \equiv 2p^{f-m}\mathfrak{F}, \ p^{\lambda-m'}(x - y\delta)\mathfrak{F} \equiv 2p^{g-m'}\mathcal{G}, \ (\text{mod.} \, p),$$

dans lesquelles on devra, eu égard à l'équation (2), supposer

$$(39) \qquad \delta \equiv r^h + r^{h'} + \ldots - r^k - r^{k'} - \ldots \ (\text{mod.} \, p).$$

D'autre part, l'équation (26) pouvant s'écrire comme il suit

$$(\rho^h + \rho^{h'} + \ldots - \rho^k + \rho^{k'} - \ldots)^2 = -n,$$

on tirera de cette équation, en y remplaçant ρ par r,

$$(r^h + r^{h'} + \ldots - r^k - r^{k'} - \ldots)^2 \equiv -n, \ (\text{mod.} \, p),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(40)\qquad \delta^2 \equiv -n, \ (\text{mod.}\, p).$$

Donc le nombre entier δ sera premier à p; et comme, dans l'équation (29), les quantités x, y ne sont, ni l'une ni l'autre, divisibles par p, on pourra en dire autant de la somme $2n$ et de la différence $2y\delta$ des deux binômes

$$x + y\delta, \quad x - y\delta.$$

Donc de ces deux binômes l'un au moins sera premier à p. Concevons, pour fixer les idées, que ce soit le second $x - y\delta$ qui remplisse cette condition. Comme, en vertu des principes exposés dans la note V (page 474 et suiv.), les deux quantités $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ seront elles-mêmes premières à p, il est clair que dans les deux membres de la seconde des formules (38), les exposants de p, savoir

$$\lambda - m', \quad g - m'$$

ne pourront s'évanouir l'un sans l'autre. Or, c'est précisément ce qui arriverait si, les nombres λ, g étant inégaux, on prenait le plus petit pour valeur de m'. Donc, lorsque $x - y\delta$ est premier à p, la première des formules (38) entraîne la condition

$$\lambda = g.$$

Mais alors, en posant, dans la première des formules (38),

$$m = m' = \lambda = g,$$

on en conclut

$$f - g = 0, \quad \text{ou} \quad f - g > 0,$$

suivant que le binôme

$$x + y\delta$$

est ou n'est pas supposé premier à p. Donc, si le binôme

$$x - y\delta$$

est premier à p, les formules (38) entraîneront la condition

$$\lambda = g < f,$$

le signe $<$ indiquant seulement que g ne peut surpasser f. Pareillement si le binôme

$$x + y\delta$$

était premier à p, les formules (38) entraîneraient la condition

$$\lambda = f < g,$$

le signe $<$ indiquant alors que λ ne peut surpasser g. Ainsi, dans tous les cas, λ devra se réduire au plus petit des deux nombres

$$f, \quad g;$$

et comme, en vertu des formules (28), (34), on aura

$$\mu = f + g - 2\lambda, \tag{41}$$

il est clair que μ devra se réduire à celle des deux différences

$$f - g, \quad g - f$$

qui sera positive, par conséquent à la valeur numérique de la différence $f - g$. Au reste, cette différence elle-même peut être, dans tous les cas, facilement déterminée comme il suit.

Posons pour abréger

$$P = R_{h,h} R_{h',h'} \ldots, \quad \Theta = R_{k,k} R_{k',k'} \ldots, \tag{42}$$

ou, ce qui revient au même,

$$P = \frac{\Theta_h^2 \Theta_{h'}^2 \ldots}{\Theta_{2h} \Theta_{2h'} \ldots}, \quad \Theta = \frac{\Theta_k^2 \, \Theta_{k'}^2 \ldots}{\Theta_{2k} \Theta_{2k'} \ldots}. \tag{43}$$

On en conclura, eu égard aux formules (7) et (30),

(44) $$\frac{P}{Q}=\frac{I^2}{J^2}\,\frac{\Theta_{2k}\Theta_{2k'}\ldots}{\Theta_{2h}\Theta_{2h'}\ldots},$$

(45) $$PQ=p^{\frac{N}{2}}.$$

D'ailleurs, en vertu des théorèmes 3 et 4 de la note IX, on trouvera, 1°, en supposant n de la forme $8x+7$,

$$\Theta_{2h}\Theta_{2h'}\ldots=\Theta_h\Theta_{h'}\ldots=I,\quad \Theta_{2k}\Theta_{2k'}\ldots=\Theta_k\Theta_{k'}\ldots=J,$$

3°, en supposant n de la forme $8x+3$,

$$\Theta_{2h}\Theta_{2h'}\ldots=\Theta_k\Theta_{k'}\ldots=J,\quad \Theta_{2k}\Theta_{2k'}\ldots=\Theta_h\Theta_{h'}\ldots=I;$$

2°, en supposant n divisible par 4 ou par 8,

$$\Theta_{2h}\Theta_{2h'}\ldots=\Theta_{2k}\Theta_{2k'}\ldots$$

Donc les formules (43) et (44) donneront, 1°, si n est de la forme $8x+7$,

(46) $$P=I,\quad Q=J,\quad \frac{P}{Q}=\frac{I}{J},$$

2°, si n est de la forme $8x+3$,

(47) $$P=\frac{I^2}{J},\quad Q=\frac{J^2}{I},\quad \frac{P}{Q}=\frac{I^3}{J^3},$$

3°, si n est divisible par 4 ou par 8,

(48) $$\frac{P}{Q}=\frac{I^2}{J^2}.$$

Concevons maintenant que, parmi les entiers premiers à n, mais inférieurs à $\frac{1}{2}n$, on distingue ceux qui appartiennent au groupe

$$h,\ h',\ h'',\ldots,$$

et dont le nombre sera désigné par i, les autres, dont le nombre sera désigné par j, formant une partie du groupe

$$k,\ k',\ k'',\ldots$$

On aura évidemment

$$i+j=\frac{N}{2}; \tag{49}$$

et, par des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage pour établir les formules (32), on trouvera, eu égard à l'équation (45),

$$P=p^{\iota}\frac{U}{V},\quad Q=p^{j}\frac{U}{V}, \tag{50}$$

U, V, désignant des produits composés de facteurs de la forme

$$R_{l,l'},$$

dans chacun desquels on pourra supposer les indices l, l' tous deux inférieurs à n, et leur somme $l+l'$ renfermée entre les limites n, $2n$. Or, les formules (32) et (50) donneront

$$\frac{I}{J}=p^{f-g}\frac{F^2}{G^2},\quad \frac{P}{Q}=p^{\iota-j}\frac{U^2}{V^2}. \tag{51}$$

D'autre part, si l'on désigne par

$$\iota_2,$$

comme dans la note préeédente, une quantité qui acquière la valeur

$$-1,\quad \text{ou}\quad 1,\quad \text{ou}\quad 0,$$

suivant que l'on aura

$$\left[\frac{2}{n}\right]=-1,\quad \text{ou}\quad \left[\frac{2}{n}\right]=1,\quad \text{ou}\quad n\equiv 0,\ (\text{mod. } 2),$$

les formules (46), (47), (48) donneront

$$\frac{P}{Q}=\frac{I^{\iota}}{J^{\iota}}, \tag{52}$$

la valeur de ε étant

$$\varepsilon = 2 - \iota_2. \tag{53}$$

Cela posé, les formules (51) et (52) donneront

$$p^{\varepsilon(f-g)} \frac{\mathrm{F}^{2\iota}}{\mathrm{G}^{2\iota}} = p^{i-j} \frac{\mathrm{U}^2}{\mathrm{V}^2},$$

ou, ce qui revient au même

$$p^{\varepsilon(f-g)} \mathrm{F}^{2\varepsilon}\mathrm{V}^2 = p^{i-j} \mathrm{G}^{2\varepsilon}\mathrm{U}^2 ; \tag{54}$$

et par suite

$$p^{\varepsilon(f-g)-m} \mathrm{F}^{2\varepsilon}\mathrm{V}^2 = p^{i-j-m} \mathrm{G}^{2\varepsilon}\mathrm{U}^2, \tag{55}$$

m étant un nombre entier quelconque.

Imaginons maintenant que l'on remplace ρ par r dans les deux membres de la formule (55), et soient

$$\mathfrak{u},\quad \mathfrak{v},$$

ce que deviennent alors U, V. Les quantités $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ seront non-seulement entières, mais premières à p aussi bien que $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$; et de même que les équations (36) entraînent les formules (38), de même la formule (55) entraînera la suivante :

$$p^{\varepsilon(f-g)-m} \mathscr{F}^{2\varepsilon}\mathfrak{v}^2 \equiv p^{i-j-m} \mathscr{G}^{2\varepsilon}\mathfrak{u}^2, \ (\mathrm{mod.}\, p). \tag{56}$$

Or, dans la formule (56), comme dans chacune des formules (38), les deux exposants de p ne peuvent s'évanouir l'un sans l'autre; et, puisqu'on peut réduire l'un d'eux à zéro, en prenant pour m le plus petit des nombres

$$\varepsilon(f-g), \quad i-j,$$

il faudra que ces deux nombres soient égaux, et que l'on ait

$$i-j = \varepsilon(f-g), \tag{57}$$

par conséquent

$$(58)\qquad f-g=\frac{i-j}{\varepsilon}.$$

D'ailleurs ε, toujours positif, se réduit à

$$1,\quad 3\quad \text{ou}\quad 2,$$

suivant que n est de la forme

$$4x+3,\quad 4x+1,\quad \text{ou}\quad 4x\,;$$

et, en vertu de ce qui a été dit dans la note précédente, la différence $i-j$, quand elle ne s'évanouit pas, est toujours positive. Donc, la différence $f-g$ ne pourra jamais devenir négative, et l'équation (41) donnera toujours

$$(59)\qquad p=f-g=\frac{i-j}{\varepsilon}.$$

En conséquence, on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. Le degré n de l'équation binôme

$$x^n=1,$$

dont ρ désigne une racine primitive, et la somme alternée

$$\omega=\rho^h+\rho^{h'}+\rho^{h''}+\ldots-\rho^k-\rho^{k'}-\rho^{k''}\ldots$$

étant supposés tels que l'on ait

$$\omega^2=-n;$$

si les exposants de ρ premiers à n, mais inférieurs à $\frac{1}{2}n$, se trouvent en nombre égal à i dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots,$$

et en nombre égal à j dans le groupe

$$k, k', k'', \ldots,$$

on pourra satisfaire, par des valeurs entières de x, y, à l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

pourvu que l'on prenne

$$\mu = i - j,$$

quand n sera de la forme $8x + 7$;

$$\mu = \frac{i-j}{3},$$

quand n, sans être égal à 3, sera de la forme $8x + 3$; et

$$\mu = \frac{i-j}{2},$$

quand n, sans être égal à 4, sera divisible par 4 ou par 8. Si n se réduisait à l'un des nombres 3, 4, alors (en vertu de ce qui a été dit dans la note IV) on aurait simplement

$$\mu = 1.$$

Pour vérifier l'exactitude du théorème qui précède, dans le cas particulier où l'on prend pour n un des nombres 3, 4, il suffit d'observer que l'équation

$$4p = x^2 + ny^2,$$

réduite alors à la forme

$$4p = x^2 + 3y^2,$$

ou à la forme

$$4p = x^2 + 4y^2, \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + y^2,$$

coïncidera, pour $n = 3$, avec la formule (110) de la page 435, quand on posera $x = \text{A}$, $y = \text{B}$, et pour $n = 4$, avec la formule (93) de la page 423, quand on posera $x=2A$, $y=B$.

Si, dans le théorème qui précède, nous n'avons pas fait une mention spéciale du cas où l'on aurait

$$n=8,\quad \varpi^2=-8,\quad \varpi=\rho+\rho^3-\rho^5-\rho^7,$$

et où la condition (10) cesserait d'être vérifiée, c'est qu'en vertu des principes établis dans la note III on peut encore, dans ce cas, résoudre en nombres entiers l'équation (29), en prenant $\mu=1$, et que cette dernière valeur de μ est comprise dans la formule

$$\mu=\frac{i-j}{2}.$$

En effet, dans le cas dont il s'agit, l'équation (29) réduite à

$$4p^\mu=x^2+8y^2,$$

ou, ce qui revient au même, à

$$p^\mu=\left(\frac{x}{2}\right)^2+2y^2,$$

coïncide avec la formule (103) de la page 430, quand on pose

$$\mu=1,\quad x=2A,\quad y=B;$$

et, comme alors aussi l'on trouve

$$i=2,\quad j=0,$$

on en conclut

$$\frac{i-j}{2}=1.$$

Il nous reste à indiquer une méthode à l'aide de laquelle on peut faciliter le calcul des valeurs de x, y qui sont propres à résoudre l'équation (1).

L'exposant μ étant supposé plus grand que zéro, ainsi que $i-j$, la différence $f-g$ sera elle-même supérieure à zéro, et, en vertu des équations

$$\lambda=g,\quad \varepsilon(f-g)=i-j,$$

les formules (38), (56) pourront être réduites aux suivantes :

$$(60)\qquad x+y\delta\equiv 0,\quad x-y\delta\equiv 2\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}},\ (\text{mod. } p),$$

$$(61)\qquad \left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}\right)^{2\varepsilon}\equiv\left(\frac{\varphi}{\upsilon}\right)^{2},\ (\text{mod. } p).$$

Or, les formules (60) donneront

$$(62)\qquad x\equiv -y\delta\equiv\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}},\ (\text{mod. } p),$$

et il est clair que cette dernière équation fournira immédiatement le reste de la division de x et de y par p; ce qui facilitera le calcul des valeurs de x, y, et suffira même à la détermination de ces valeurs, dans tous les cas où elles devront être, abstraction faite des signes, inférieures à $\frac{1}{2}p$. Quant à la détermination des quantités $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ou υ, φ, elle s'effectuera sans difficulté. En effet, en vertu des principes établis dans la note V (pages 474 et suivantes), pour déduire $\mathcal{F}$ de F, et $\mathcal{G}$ de G, il suffira de remplacer ρ par r, dans les divers facteurs de F et de G, ou, ce qui revient au même, de remplacer chaque facteur de la forme

$$R_{l,l'},$$

par une quantité entière équivalente, au signe près, à

$$-\Pi_{n-l,\ n-l'}$$

la valeur de $\Pi_{l,l'}$ étant donnée par la formule

$$(63) \qquad \Pi_{l,l'} = \frac{1.2.3\ldots(l+l')\varpi}{1.2.3\ldots l\varpi.1.2.3\ldots l\varpi}.$$

La formule (62) n'est pas applicable aux cas où n se réduit à l'un des nombres 3, 4, 8, et doit alors être remplacée par celles que nous allons indiquer.

Les valeurs de P, Q, fournies par les équations (42), sont évidemment, ainsi que I, J, des fonctions symétriques, d'une part, des racines primitives

$$\rho^h, \quad \rho^{h'}, \quad \rho^{h''}, \ldots$$

et d'autre part des racines primitives

$$\rho^k, \quad \rho^{k'}, \quad \rho^{k''}, \ldots$$

Donc la somme $P+Q$, sera, comme $I+J$, une fonction symétrique des diverses racines primitives de l'équation (1), et la différence $P-Q$ sera comme $I-J$ une fonction alternée de ces mêmes racines; d'où il résulte qu'on pourra aux équations (8) joindre encore celle-ci

$$(64) \qquad P+Q=\mathfrak{A}, \quad P-Q=\mathfrak{B}\omega,$$

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ désignant des quantités entières. Cela posé, on tirera des formules (45) et (64)

$$2P=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\omega, \quad 2Q=\mathfrak{A}-\mathfrak{B}\omega$$

$$4PQ=\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2\omega^2,$$

$$4p^{\frac{N}{2}} = \mathfrak{A}^2-\mathfrak{B}^2\omega^2;$$

et par suite, si la condition

$$\omega^2 = -n$$

est vérifiée, l'on trouvera

$$(65)\qquad 4p^{\frac{N}{2}} = \mathfrak{A}^2 + n\mathfrak{B}^2.$$

Or, si l'on substitue l'équation (64) et les formules (50) à l'équation (20) et aux formules (32), alors, par des raisonnements semblables à ceux dont nous nous sommes servis pour établir le théorème énoncé plus haut et la formule (62), on prouvera que l'on peut satisfaire à l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

en posant généralement

$$\mu = i - j,$$

et prenant pour x, y certains nombres entiers qui vérifieront la condition

$$(66)\qquad x \equiv -y\delta \equiv \frac{\varphi}{\upsilon}, \pmod{p}.$$

Considérons en particulier le cas où l'on a $n = 3$. On trouvera dans ce cas

$$\omega = \rho - \rho^2$$

$$h = 1, \quad k = 2, \quad i = 1, \quad j = 0, \quad i - j = 1,$$

$$P = R_{1,1}, \quad Q = R_{2,2}$$

$$U = 0, \quad V = R_{2,2}$$

et par suite on pourra prendre

$$\upsilon = 0, \quad \varphi = -\Pi_{1,1}.$$

Donc, p étant un nombre premier de la forme $3x + 1$, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$(67)\qquad 4p = x^2 + 3y^2,$$

en prenant pour x, y des nombres entiers qui vérifient la condition

$$x \equiv -y\delta \equiv -\Pi_{1,1}.$$

Il importe d'observer que, dans cette dernière formule, la valeur de $\Pi_{1,1}$ sera

$$\Pi_{1,1} = \frac{1.2.3\ldots 2\varpi}{(1.2\ldots\varpi)^2} = \frac{(\varpi+1)\ldots 2\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{3},$$

et que d'ailleurs on aura

$$\delta \equiv r - r^2,$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^3 \equiv 1, \ (\mathrm{mod.}\ p),$$

par conséquent

$$r \equiv t^{\varpi}, \ (\mathrm{mod.}\ p),$$

t étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, (\mathrm{mod.}\ p).$$

Cela posé, en ayant égard à la formule

$$\delta^2 = -3$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{\delta}{3},$$

on trouvera

$$(68) \qquad x \equiv -\Pi_{1,1}, \quad y \equiv -\frac{1}{3}\Pi_{1,1}\delta, \ (\mathrm{mod.}\ p).$$

D'autre part, comme on aura, en vertu de l'équation (67),

$$x^2 < 4p, \quad y^2 < \frac{4p}{3},$$

les valeurs numériques de x, y seront respectivement inférieures aux nombres

$$2p^{\frac{1}{2}}, \quad 2\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

dont le second au moins restera inférieur à $\frac{1}{2}p$, pour une valeur de p égale ou supérieure à 7; le premier remplissant lui-même cette condition dès que l'on supposera p supérieur à 16, par conséquent à 7 et à 13. Donc les formules (68), ou au moins la seconde d'entre elles, fourniront immédiatement la résolution en nombres entiers de l'équation (67). On trouvera, par exemple, pour $p=7$,

$$\varpi = \frac{p-1}{3} = 2, \quad \Pi_{1,1} = \frac{3.4}{1-2} = 6;$$

et comme 3 étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^6 \equiv 1, \text{ (mod. } 7),$$

on pourra prendre

$$r \equiv 3^2 = 2, \text{ (mod. } 7),$$

par conséquent

$$\delta \equiv r - r^2 \equiv 2 - 4 \equiv -2, \text{ (mod. } 7),$$

les formules (68) donneront

$$x \equiv -6 \equiv 1, \quad y \equiv 4 \equiv -3, \text{ (mod. } 7).$$

On a effectivement

$$4.7 = 1^2 + 3.3^2.$$

Prenons encore $p = 13$. On trouvera

$$\varpi = 4, \quad \Pi_{1,2} = \frac{5.6.7.8}{1.2.3.4} = 70;$$

et comme 3 étant une racine primitive de l'équivalence

$$x'^{2}\equiv 1, \pmod{13},$$

on pourra prendre

$$r\equiv 3^{4}\equiv 3,\quad \delta\equiv r-r^{2}\equiv 3-9\equiv -6, \pmod{13},$$

les formules (68) donneront

$$x\equiv -70\equiv -5,\quad y\equiv 10\equiv -3, \pmod{13}.$$

On a effectivement

$$4.7=5^{2}+3.3^{2}.$$

La valeur numérique de x remplit déjà, comme on le voit, pour les valeurs 7 et 13 du nombre p, la condition d'être inférieure à $\frac{1}{2}p$. Donc, d'après ce qui a été dit ci-dessus, cette condition sera toujours remplie, et pour résoudre en nombres entiers l'équation (67), il suffira, dans tous les cas, de recourir à la première des équations (68). On trouvera, par exemple, pour $p=19$

$$\varpi=6,\quad \Pi_{1,1}=\frac{7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6}\equiv 7.11.12\equiv 12, \pmod{19}$$

$$x\equiv 12\equiv -7, \pmod{19}$$

$$x=7.$$

On a effectivement

$$4.19=7^{2}+3.3^{2}.$$

Dans les exemples précédents, la valeur de y est constamment divisible par 3. On peut démontrer qu'il en sera toujours ainsi (voir les numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, pour l'année* 1840).

Les formules (68), jointes à la remarque que nous venons de faire, comprennent l'un des théorèmes énoncés par M. Jacobi en 1827, dans un mémoire qui a pour titre *De residuis cubicis commentatio numerosa* (voir le *Journal de M. Crelle*, de 1827).

Au reste, après avoir résolu l'équation (67) à l'aide des formules (68), on pourra toujours obtenir immédiatement deux autres solutions de la même équation, en ayant recours à la formule

$$4p = x^2 + 3y^2 = \left(\frac{x+3y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{x-3y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

On trouvera par exemple

$$4.7 = 1 + 3.3^2 = 5^2 + 3.1^2 = 4^2 + 3.2^2,$$
$$4.13 = 5^2 + 3.3^2 = 7^2 + 3.1^2 = 2^2 + 3.4^2,$$
etc...

Considérons maintenant le cas où l'on a $n = 4$. On trouvera dans ce cas

$$\varpi = \rho - \rho^3$$
$$h = 1, \quad k = 3, \quad i = 1, \quad j = 0; \quad i - j = 1$$
$$P = R_{1,1}, \quad Q = R_{3,3},$$
$$U = R_{1,1}, \quad V = R_{3,3};$$

et par suite on pourra prendre

$$\upsilon = 1, \quad \vartheta = -\Pi_{1,1}.$$

Donc, p étant un nombre premier de la forme $4x + 1$, on pourra toujours satisfaire à l'équation

$$(69) \qquad 4p = x^2 + 4y^2,$$

en prenant pour x, y des nombres entiers qui vérifient la condition

$$x \equiv -y\delta \equiv -\Pi_{1,1}.$$

Dans cette dernière formule, la valeur de $\Pi_{1,1}$ sera

$$\Pi_{1,1} = \frac{1.2.3\ldots2\varpi}{(1.2\ldots\varpi)^2} = \frac{(\varpi+1)\ldots2\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{4},$$

et l'on aura d'ailleurs

$$\delta = r - r^3$$

r étant une racine primitive de l'équation

$$x^4 \equiv 1, \text{ (mod. } p),$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$r = t^{\varpi},$$

t étant ce qu'on nomme une racine primitive du nombre p, c'est-à-dire, une racine primitive de l'équation

$$x^{p-1} \equiv 1, \text{ (mod. } p).$$

Cela posé, en ayant égard à la formule

$$\delta^2 \equiv -4, \text{ (mod. } p),$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta} = -\frac{\delta}{4},$$

on trouvera

(70) $$x \equiv -\Pi_{1,1}, \quad y \equiv -\frac{1}{4}\Pi_{1,1}\,\delta, \text{ (mod. } p).$$

D'ailleurs, pour que l'équation (69) soit vérifiée, il est nécessaire que x soit un nombre pair; et alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, dans cette même équation, l'on obtient la suivante

(71) $$p = x^2 + y^2,$$

à laquelle on devra satisfaire par des valeurs de x, y propres à vérifier les formules

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,1}, \quad y \equiv -\frac{1}{4}\Pi_{1,1}\,\delta. \tag{72}$$

D'autre part, comme, en vertu de l'équation (71), les quantités x, y devront offrir des carrés inférieurs à p, et des valeurs numériques inférieures à $p^{\frac{1}{2}}$, par conséquent à

$$\frac{p}{2} = p^{\frac{1}{2}}\frac{p^{\frac{1}{2}}}{2},$$

attendu que p, au moins égal à 5, vérifiera la condition $p^{\frac{1}{2}} > 2$; il est clair qu'à l'aide des formules (72), ou seulement de la première de ces formules, on pourra déterminer complétement les valeurs entières de x, y qui vérifieront la formule (11). On trouvera par exemple, pour $p = 5$,

$$\varpi = \frac{p-1}{4} = 1, \quad \Pi_{1,1} = 2,$$
$$x \equiv -1, \text{(mod. 5)}$$
$$x = -1.$$

On a en effet

$$5 = 1^2 + 2^2.$$

Prenons encore $p = 13$, on trouvera

$$\varpi = 3, \quad \Pi_{1,1} = \frac{4.5.6}{1-2-3} = 20, \text{(mod. 13)}$$
$$x \equiv -10 \equiv 3, \text{(mod. 13)}$$
$$x \equiv 3.$$

On a en effet

$$13 = 3^2 + 2^2.$$

Prenons encore $p=17$; on trouvera

$$\varpi=4,\quad \Pi_{1,1}=\frac{5.6.7.8}{1.2.3.4}=5.2.7=70,\equiv 2,\ (\text{mod. } 17)$$
$$x\equiv -1,\ (\text{mod. } 17)$$
$$x=-1.$$

On a en effet

$$17=1^2+4^2.$$

Prenons enfin $p=29$. On trouvera

$$\varpi=7,\quad \Pi_{1,1}=\frac{8.9.10.11.12.13.14}{1.2.3.4.5.6.7}.$$

D'ailleurs, il ne sera pas nécessaire de calculer la valeur exacte de $\Pi_{1,1}$, et l'on pourra se borner à déterminer, par l'une des méthodes exposées dans la note V, une quantité équivalente à $\Pi_{1,1}$, suivant le module 29. Cette quantité sera immédiatement fournie par le tableau de la page 490, et se réduira au nombre 10, renfermé dans les deux colonnes horizontale et verticale dont les premières cases offrent le nombre 7. On aura donc

$$\Pi_{1,1}\equiv 10,\ (\text{mod. } 29)$$
$$x\equiv -5,\ (\text{mod. } 29)$$
$$x=5.$$

On trouve en effet

$$29=5^2+2^2.$$

La première des formules (73) fournit précisément le beau théorème énoncé par M. Gauss, et relatif à la résolution de l'équation (71) en nombres entiers.

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on suppose, comme on vient de le faire,

$$p=4\varpi+1,$$

l'équation connue

$$1.2.3\ldots(p-1)\equiv -1,\ (\text{mod. } p),$$

donne

$$(1.2.3\ldots 2\varpi)^2 = -1.$$

Donc alors on vérifie la formule

$$\delta^2 = -4,$$

en prenant

$$\delta = 2(1.2.3\ldots 2\varpi);$$

et la seconde des formules (72) peut être réduite à

$$y \equiv -\frac{1.2.3\ldots 2\varpi}{2}\,\Pi_{1,1}.$$

Ainsi, par exemple, on trouvera pour $p=5$,

$$y \equiv -\Pi_{1,1} \equiv -2,\ (\text{mod. } 5),$$

par conséquent

$$y = -2;$$

pour $p=13$,

$$y \equiv -3.4.5\ldots 6\Pi_{1,1} \equiv 4\Pi_{1,1} \equiv 80 \equiv 2,\ (\text{mod. } 13),$$
$$y = 2, \qquad \text{etc.}\ldots$$

Considérons maintenant le cas où l'on a $n=8$,

$$\omega = \rho + \rho^3 - \rho^5 - \rho^7.$$

Dans ce cas, on ne peut plus se servir ni de la formule (61), ni de la formule (66). Mais les équations (7) donnent

$$I = \Theta_1\Theta_3 = R_{1,3}\Theta_4, \quad J = \Theta_5\Theta_7 = R_{5,7}\Theta_4,$$

et les coefficients de Θ_4 dans ces formules, savoir :

$$R_{1,3}, \quad R_{5,7},$$

représentent des fonctions symétriques des racines primitives

$$\rho, \rho^3 \quad \text{ou} \quad \rho^5, \rho^7.$$

Par suite la somme

$$R_{1,3} + R_{5,7},$$

et la différence

$$R_{1,3} - R_{5,7}$$

seront de la forme

$$R_{1,3} + R_{5,7} = A, \quad R_{1,3} - R_{5,7} = B\varpi,$$

A, B désignant des quantités entières; et, comme on aura d'autre part

$$R_{1,3} R_{5,7} = p,$$

on trouvera définitivement

$$4p = A^2 - B^2\varpi^2,$$

puis, en ayant égard à la formule

$$\varpi^2 = -8,$$

on en conclura

$$4p = A^2 + 8B^2.$$

Dans cette dernière équation, A sera nécessairement pair, et en posant

$$A = 2x, \quad B = y,$$

on la verra se réduire à

$$(73) \qquad p = x^2 + 2y^2.$$

Ajoutons que si l'on remplace ρ par r dans les deux formules

$$R_{1,3} + R_{5,7} = 2x, \quad R_{1,3} - R_{5,7} = y\varpi,$$

on devra y remplacer aussi ϖ par δ; et comme alors $R_{1,3}$ se trouvera remplacé par zéro, et $R_{5,7}$ par

$$-\Pi_{1,3},$$

on aura définitivement

$$2x \equiv -y\delta \equiv -\Pi_{1,3}.$$

Donc, en ayant égard à la formule

$$\delta^2 \equiv -8, \text{ (mod. } p),$$

de laquelle on tire

$$\frac{1}{\delta} \equiv -\frac{\delta}{8}, \text{ (mod. } p),$$

on trouvera

$$(74) \qquad x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,3}, \quad y \equiv -\frac{1}{8}\Pi_{1,3}\delta, \text{ (mod. } p),$$

la valeur de $\Pi_{1,3}$ étant donnée par l'équation

$$\Pi_{1,3} = \frac{1.2.3\ldots4\varpi}{(1.2\ldots\varpi)(1.2\ldots3\varpi)} = \frac{(3\varpi+1)\ldots4\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

et la valeur de ϖ étant

$$\varpi = \frac{p-1}{8}.$$

Quant à la valeur de δ, elle sera

$$\delta \equiv r + r^3 - r^5 - r^7, \text{ (mod. } p),$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^8 \equiv 1, \text{ (mod. } p),$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$r \equiv t^{\varpi}, \text{ (mod. } p),$$

t étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \text{ (mod. } p).$$

Les formules (74) suffiront à la détermination complète des valeurs de x, y qui vérifieront l'équation (73), attendu que ces valeurs devront être, l'une et l'autre, inférieures, abstraction faite des signes, à $p^{\frac{1}{2}}$, et à plus forte raison à $\frac{1}{2}p$. On pourra même se borner à déterminer la valeur de x, à l'aide de la première des formules (74). On trouvera, par exemple, pour $p = 17$,

$$\varpi = 2, \quad \mathrm{II}_{1,3} = \frac{7.8}{1.2} = 28,$$
$$x = -14 \equiv 3, \ (\mathrm{mod.}\ 17),$$
$$x = 3.$$

On aura effectivement

$$17 = \omega^2 + 2.2^2.$$

On trouvera pareillement, pour $p = 41$,

$$\varpi = \rho, \quad \mathrm{II}_{1,3} = \frac{16.17.18.19.20}{1.2.3.4.5} = 16.17.3.19 \equiv -6, (\mathrm{mod.} 41),$$
$$x \equiv -3, \ (\mathrm{mod.}\ 41),$$
$$x = 3.$$

On a effectivement

$$41 = 3^2 + 2.4^2,$$
etc...

La première des formules (74) fournit un théorème donné par M. Jacobi, en 1838, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie de Berlin.*

Revenons maintenant au cas général où n désigne un entier qui vérifie la condition

$$\omega^2 = -n,$$

sans toutefois se réduire à l'un des trois nombres

$$2, 4, 8.$$

Alors les valeurs entières de x, y, propres à résoudre l'équation

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

vérifieront la formule (62); et, comme on aura d'ailleurs

$$\delta^2 \equiv -n, \text{ (mod. } p),$$

par conséquent

$$\frac{1}{\delta} \equiv -\frac{\delta}{n}, \text{ (mod. } p),$$

on trouvera

(75) $$x \equiv \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \quad y \equiv \frac{\delta}{n}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \text{ (mod. } p).$$

Avant d'aller plus loin, il est bon d'observer que, dans la formule

$$4p^{\mu} = x^2 + ny^2,$$

le second membre devra être pair tout comme le premier, et qu'en conséquence les deux termes

$$x^2, \; ny^2$$

seront tous deux pairs ou tous deux impairs. Donc, si n est impair, les deux carrés

$$x^2, y^2$$

seront en même temps pairs ou impairs. D'ailleurs, si les carrés x^2, y^2 sont tous deux impairs, chacun divisé par 8, donnera 1 pour reste, et par suite la formule

$$x^2 + ny^2 = 4p^{\mu}$$

donnera

$$1 + n \equiv 4p^{\mu} \equiv 4, \text{ (mod. } 8),$$

ou, ce qui revient au même,

(76) $$n \equiv 3, \text{ (mod. 8)}.$$

Donc, si n, supposé impair, et de la forme $4x+3$ afin que l'on ait $\varpi^2 = -n$, ne vérifie pas la condition (76), c'est-à-dire, en d'autres termes, si l'on a

(77) $$n \equiv 7, \text{ (mod. 8)},$$

x^2, y^2 seront pairs l'un et l'autre. Alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, et $2y$ au lieu de y, on obtiendra, au lieu de l'équation (29), la suivante

(78) $$p^\mu = x^2 + ny^2,$$

à laquelle on satisfera par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

(79) $$x \equiv \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \quad y \equiv \frac{\delta}{2n}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \text{ (mod. } p).$$

Enfin, si n est un nombre pair, divisible par 4 ou par 8, il est clair que, dans l'équation

$$4p^\mu = x^2 + ny^2,$$

x lui-même devra être pair. Alors, en écrivant $2x$ au lieu de x, on verra cette équation se réduire à la suivante

(80) $$p^\mu = x^2 + \frac{n}{4}y^2,$$

et l'on pourra satisfaire à cette dernière par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

(81) $$x \equiv \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \quad y \equiv \frac{\delta}{n}\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}, \text{ (mod. } p).$$

Pour montrer quelques applications des formules qui précèdent, prenons d'abord pour n les nombres premiers qui, étant de la forme $4x+3$, et supérieurs à 3, restent inférieurs à 100. Parmi ces nombres premiers, les uns, savoir,

$$11,\ 19,\ 43,\ 59,\ 67,\ 83$$

seront de la forme $8x+3$, les autres, savoir,

$$7,\ 23,\ 31,\ 47,\ 71,\ 79$$

seront de la forme $8x+7$; et pour chacun d'eux on obtiendra facilement les valeurs des résidus quadratiques

$$h,\ h',\ h'',\ldots$$

en cherchant, dans les tables construites par M. Jacobi, ceux des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ldots n-1$$

qui offrent des indices pairs suivant le module n. Ainsi, par exemple, comme, pour $n=7$, les indices des nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

sont dans ces mêmes tables

$$0,\ 2,\ 1,\ 4,\ 5,\ 3,$$

on trouvera pour $n=7$

$$h=1,\quad h'=2,\quad h''=4,$$
$$\varpi=\rho+\rho^2+\rho^4-\rho^3-\rho^5-\rho^6.$$

En opérant de la même manière pour les diverses valeurs de n, on reconnaîtra que les quantités $h,\ h',\ h'',\ldots$ inférieures ou supérieures à $\frac{n}{2}$, le nombre i ou j des unes ou des autres, et la différence $i-j$ sont respectivement, pour

$$n=7,\ \begin{cases}1,2\\4\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=2\\j=1\end{matrix}\right\},\ i-j$$

$$n=11,\ \begin{cases}1,3,4,5\\9\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=4\\j=1\end{matrix}\right\},\ i-j$$

$$n=19,\ \begin{cases}1,4,5,6,7,9\\11,16,17\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=6\\j=3\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=23,\ \begin{cases}1,2,3,4,6,8,9\\12,13,16,18\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=7\\j=4\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=31,\ \begin{cases}1,2,4,5,7,8,9,10,14\\16,18,19,20,25,28\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=9\\j=6\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=43,\ \begin{cases}1,4,6,9,10,11,13,14,15,16,17,21\\23,24,25,31,35,36,38,40,41\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=12\\j=9\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=47,\ \begin{cases}1,2,3,4,6,7,8,9,12,14,16,17,18,21\\24,25,27,28,32,34,36,37,42\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=14\\j=9\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=59,\ \begin{cases}1,3,4,5,7,9,12,15,16,17,19,20,21,22,25,26,27,28,29\\35,36,41,45,46,48,49,51,53,57\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=19\\j=10\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=67,\ \begin{cases}1,4,6,9,10,14,15,16,17,19,21,22,23,24,25,26,29,33\\35,36,37,39,40,47,49,54,55,56,59,60,62,64,65\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=18\\j=15\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=71,\ \begin{cases}1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,19,20,24,25,26,27,29,30,32\\36,37,38,40,43,45,48,49,50,54,57,58,60,64\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=21\\j=14\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=79,\ \begin{cases}1,2,4,5,8,9,10,11,13,16,18,19,20,21,22,23,25,26,31,32,36,38\\40,42,44,45,46,49,50,51,52,55,62,64,65,67,72,74,76\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=22\\j=17\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

$$n=83,\ \begin{cases}1,3,4,7,9,10,11,12,16,17,21,23,25,26,27,28,29,30,31,33,36,37,38,40,41\\44,48,49,51,59,61,63,64,65,68,69,70,75,77,78,81\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}i=25\\j=16\end{matrix}\right\},\ i-j=$$

Donc les valeurs de

$$\mu=i-j$$

qui permettront toujours de résoudre en nombres entiers l'équation

$$p^{\mu}=x^2+ny^2,$$

seront respectivement,

$$\text{pour } n = 7,\ 23,\ 31,\ 47,\ 71,\ 79,$$
$$\mu = 1,\ \ 3,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 7,\ \ 5;$$

et les valeurs de

$$\mu = \frac{i-j}{3},$$

qui permettront toujours de résoudre en nombres entiers l'équation

$$4p^\mu = x^2 + ny^2,$$

seront respectivement,

$$\text{pour } n = 11,\ 19,\ 43,\ 59,\ 67,\ 83,$$
$$\mu = 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 1,\ \ 3.$$

De plus, on aura, pour $n = 7$,

$$\mathrm{I} = \Theta_1\Theta_2\Theta_4 = p\,\frac{\Theta_1\Theta_2}{\Theta_3}, \quad \mathrm{J} = \Theta_3\Theta_5\Theta_6 = p\,\frac{\Theta_5\Theta_6}{\Theta_{11}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{I} = p\mathrm{R}_{1,2} = p^2\,\frac{1}{\mathrm{R}_{6,5}}, \quad \mathrm{J} = p\mathrm{R}_{6,5}$$
$$f = 2, \quad g = 1, \quad f - g = 1 = \frac{i-j}{3} = \mu,$$
$$\mathrm{F} = 1, \quad \mathrm{G} = \mathrm{R}_{6,5};$$

et par suite on pourra prendre

$$\mathfrak{f} = 1, \quad \mathfrak{g} = -\Pi_{1,2}.$$

Donc, en vertu des formules (79), on pourra satisfaire à l'équation

$$p = x^2 + 7y^2, \tag{82}$$

par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$x \equiv -\frac{1}{2}\Pi_{1,2}, \quad y \equiv -\frac{\delta}{14}\Pi_{1,2}, \ (\text{mod. } p), \tag{83}$$

la valeur de $\Pi_{1,2}$ étant donnée par la formule

$$\Pi_{1,2} = \frac{1.2.3\ldots 3\varpi}{(1.2\ldots\varpi)(1.2\ldots 2\varpi)} = \frac{(2\varpi+1)\ldots 3\varpi}{1.2\ldots\varpi},$$

dans laquelle on aura

$$\varpi = \frac{p-1}{7},$$

et la valeur de δ par la formule

$$\delta = r + r^2 + r^4 - r^3 - r^5 - r^6,$$

dans laquelle r sera une racine primitive de l'équation

$$x^7 \equiv 1, \ (\text{mod. } p),$$

en sorte qu'on pourra supposer

$$r = t^{\varpi},$$

t étant une racine primitive de p, c'est-à-dire, une racine primitive de l'équivalence

$$x^{p-1} \equiv 1, \ (\text{mod. } p).$$

On trouvera, par exemple, pour $p = 29$,

$$\varpi = 4, \quad \Pi_{1,2} = \frac{1.2.3\ldots 12}{(1.2.3.4)(1.2.3\ldots 8)} = \frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} = 9.5.11 \equiv 2, \ (\text{mod. } 29),$$

$$x \equiv -1, (\text{mod. } 29)$$

$$x = 1.$$

On a en effet

$$29 = 1 + 7.2^2.$$

Au reste, la quantité 2, qui, dans cet exemple, est équivalente à $\Pi_{1,2}$, suivant le module 29, se trouve immédiatement fournie par le tableau de la page 490, et se réduit, comme on devait s'y attendre, à celle que renferment à la fois les deux colonnes horizontale et verticale dont les premières cases contiennent les deux nombres

$$\varpi = 4, \quad 2\varpi = 8.$$

M. Jacobi, dans son mémoire de 1827, avait déjà indiqué les formules (83) comme pouvant servir à la résolution de l'équation (82). Pour arriver à ces formules et à d'autres semblables, il avait suivi une marche analogue à celle, par laquelle M. Gauss lui-même a établi la première des formules (72), et il avait eu recours, nous a-t-il dit, à des considérations qui ne diffèrent pas de celles que j'ai exposées dans le *Bulletin des sciences de* 1829, c'est-à-dire, à la considération des fonctions ci-dessus désignées par Θ_h, Θ_k, Θ_l, ...

Si, au lieu de supposer $n = 7$, on prend successivement pour n les nombres premiers

$$11, \quad 19, \quad 43, \quad 67,$$

pour lesquels on a aussi $\mu = 1$, il suffira de recourir aux formules (75), ou du moins à la seconde d'entre elles, pour déterminer complétement les valeurs de x, y propres à vérifier l'équation

$$4p = x^2 + ny^2.$$

D'ailleurs, on trouvera, pour $n = 11$,

$$\mathrm{I} = -\mathrm{R}_{1,3,4,5,9} = -\mathrm{R}_{1,3}\,\mathrm{R}_{1+3,4}\,\mathrm{R}_{1+3+4,5}\,\mathrm{R}_{1+3+4+5,9},$$
$$\mathrm{J} = -\mathrm{R}_{10,8,7,6,2} = -\mathrm{R}_{10,8}\,\mathrm{R}_{10+8,7}\,\mathrm{R}_{10+8+7,6}\,\mathrm{R}_{10+8+7+6,2};$$

par conséquent

$$\mathrm{I} = p\mathrm{R}_{1,3}\,\mathrm{R}_{4,4}\,\mathrm{R}_{8,5} = p^3\,\frac{\mathrm{R}_{8,5}}{\mathrm{R}_{10,8}\,\mathrm{R}_{7,7}},$$
$$\mathrm{J} = p\mathrm{R}_{10,8}\,\mathrm{R}_{7,7}\,\mathrm{R}_{3,6} = p^2\,\frac{\mathrm{R}_{10,8}\,\mathrm{R}_{7,7}}{\mathrm{R}_{8,5}},$$

$$f=3,\quad g=2,\quad f-g=1=\frac{i-j}{3}=\mu,$$
$$F=R_{8,5}\quad G=R_{10,8}R_{7,7},$$

et l'on pourra prendre

$$\mathfrak{f}=-\Pi_{3,6},\quad \mathfrak{g}=\Pi_{1,3}\Pi_{4,4}.$$

Donc, en vertu des formules (75), lorsque p divisé par 11 donnera pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$(84)\qquad 4p=x^2+11y^2$$

par des valeurs de x, y propres à vérifier les conditions

$$(85)\qquad x\equiv-\frac{\Pi_{1,3}\Pi_{4,4}}{\Pi_{2,6}},\quad y\equiv-\frac{\delta}{11}\frac{\Pi_{1,3}\Pi_{4,4}}{\Pi_{2,6}},$$

les valeurs de $\Pi_{1,3}, \Pi_{4,4}, \Pi_{2,6}$ étant données par les formules

$$\Pi_{1,3}=\frac{(3\varpi+1)\ldots4\varpi}{1.2\ldots\varpi},\quad \Pi_{4,4}=\frac{(4\varpi+1)\ldots8\varpi}{1.2\ldots4\varpi},\quad \Pi_{2,6}=\frac{(6\varpi+1)\ldots8\varpi}{1.2\ldots2\varpi},$$

dans lesquelles on aura

$$\varpi=\frac{p-1}{11}.$$

Si, par exemple, on suppose $p=23$, on trouvera

$$\varpi=2,\ \Pi_{1,3}=\frac{7.8}{1.2},\ \Pi_{4,4}=\frac{9.10.11.12.13.14.15.16}{1.2.3.4.5.6.7.8},\ \Pi_{2,6}=\frac{13.14.15.16}{1.2.3.4},$$
$$\Pi_{1,3}=28\equiv5,\quad \Pi_{4,4}\equiv9.10.11.13\equiv-10,\quad \Pi_{2,6}\equiv13.14.10\equiv3,\quad (\mathrm{mod.}\ 23)$$
$$x\equiv-\frac{50}{3}\equiv-\frac{27}{3}\equiv-9,\ (\mathrm{mod.}\ 23).$$

Le carré de x^2 devant d'ailleurs être inférieur à $4.23=92$, on ne peut supposer que

$$x=-9.$$

On pourrait opérer de la même manière pour les trois valeurs de n représentées par

$$19,\ 43,\ 67.$$

Mais il est bon d'observer que chacune d'elles, divisée par 3, donne 1 pour reste. Or, quand cette condition est remplie, ou, ce qui revient au même, quand, n étant premier, $n-1$ est divisible par 3, on peut ajouter, trois à trois, les nombres renfermés dans chacun des groupes

$$h,\ h',\ h'' \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'',\ldots$$

de manière à obtenir des sommes divisibles par n. En effet, soit s une racine primitive de l'équivalence

$$x^{n-1} \equiv 1, (\text{mod. } n).$$

Les nombres renfermés dans le groupe

$$k,\ k',\ k'' \ldots$$

seront équivalents, suivant le module n, aux divers termes de la progression géométrique

$$1,\ s^2,\ s^4, \ldots s^{n-3},$$

et les nombres renfermés dans le groupe

$$k,\ k',\ k'',\ldots,$$

aux divers termes de la progression géométrique

$$s,\ s^3, \ldots s^{n-2}.$$

Comme on trouvera d'ailleurs, en supposant $n-1$ divisible par 3,

$$1 + s^{\frac{n-1}{3}} + s^{2\frac{n-1}{3}} = \frac{s^{n-1}-1}{s^{\frac{n-1}{3}}-1} \equiv 0, (\text{mod. } n),$$

il est clair que, dans cette hypothèse, on aura

$$h + h' + h'' \equiv 0, \text{ (mod. } n),$$

si l'on prend

$$h \equiv s^m, \quad h' = s^{\frac{n-1}{3}+m}, \quad h'' = s^{2\frac{n-1}{3}+m},$$

m étant un nombre pair, et

$$k + k' + k'' \equiv 0, \text{ (mod. } n),$$

si l'on prend

$$k \equiv s^m, \quad k' \equiv s^{\frac{n-1}{3}+m}, \quad k'' \equiv s^{2\frac{n-1}{3}+m},$$

m étant un nombre impair. Par suite, chacune des fonctions représentées précédemment par I, J pourra être censée résulter de la multiplication de divers produits de la forme

$$\Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{l''}$$

dans chacun desquels on aura

$$l + l' + l'' \equiv 0, \text{ (mod. } n).$$

Or, on trouvera sous cette condition

$$\Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{l''} = \Theta_l \Theta_{l'} \Theta_{-l-l'} = p\,\frac{\Theta_l \Theta_{l'}}{\Theta_{l+l'}} = p R_{l,l'},$$

l, l' pouvant être deux quelconques des trois nombres

$$l, \; l', \; l'',$$

par exemple, les deux plus petits, lorsqu'on aura

$$l + l' + l'' = n,$$

et les deux plus grands lorsqu'on aura

$$l + l' + l'' = 2n.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, chacune des fonctions

$$I, J$$

pourra être censée résulter de la multiplication de $\frac{n-1}{6}$ facteurs de la forme

$$p\mathrm{R}_{l,l'},$$

ce qui permettra de calculer facilement les valeurs de $\mathfrak{I}, \mathfrak{G}$.

Concevons, pour fixer les idées, que l'on ait $n=19$. Alors, si l'on prend $s=10$, les nombres qui, étant inférieurs à 19, seront équivalents, suivant le module 19, aux quantités

$$\begin{array}{cccccc} 1, & s, & s^2, & s^3, & s^4, & s^5, \\ s^6, & s^7, & s^8, & s^9, & s^{10}, & s^{11}, \\ s^{12}, & s^{13}, & s^{14}, & s^{15}, & s^{16}, & s^{17}, \end{array}$$

c'est-à-dire, les nombres correspondants aux indices

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, \\ 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, \\ 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, \end{array}$$

seront respectivement ceux qui se trouveront contenus dans les trois premières lignes horizontales du tableau

$$(86)\qquad \left\{\begin{array}{cccccc} 1, & 10, & 5, & 12, & 6, & 3, \\ 11, & 15, & 17, & 18, & 9, & 14, \\ 7, & 13, & 16, & 8, & 4, & 2, \\ \hline 19, & 38, & 38, & 38, & 19, & 19; \end{array}\right.$$

les trois nombres renfermés dans une même colonne verticale pouvant être censés représenter trois valeurs correspondantes de l, l', l'', dont la somme

$$l+l'+l'',$$

toujours égale, soit à $n=19$, soit à $2n=38$, se trouve placée au-dessous de ces trois nombres, dans la quatrième ligne horizontale. Donc, n étant égal à 19, I pourra être censé résulter de la multiplication des trois produits

$$\Theta_1\,\Theta_{11}\Theta_7=p\mathrm{R}_{1,7},\quad \Theta_5\,\Theta_{17}\Theta_{16}=p\mathrm{R}_{16,17},\quad \Theta_6\,\Theta_9\,\Theta_4=p\mathrm{R}_{4,6},$$

et J de la multiplication des trois produits

$$\Theta_{10}\Theta_{15}\Theta_{13}=p\mathrm{R}_{13,15},\quad \Theta_{12}\Theta_{18}\Theta_8=p\mathrm{R}_{12,18},\quad \Theta_3\,\Theta_{14}\Theta_2=p\mathrm{R}_{2,3},$$

et l'on aura

$$\mathrm{I}=p^3\,\mathrm{R}_{1,7}\,\mathrm{R}_{16,17}\,\mathrm{R}_{4,6}=p^5\,\frac{\mathrm{R}_{16,17}}{\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15}},$$

$$\mathrm{J}=p^3\mathrm{R}_{13,15}\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{2,3}=p^4\,\frac{\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15}}{\mathrm{R}_{16,17}},$$

$$f=5,\quad g=4,\quad f-g=1=\frac{i-j}{3}=\mu;$$

$$\mathrm{F}=\mathrm{R}_{16,17},\quad \mathrm{G}=\mathrm{R}_{12,18}\mathrm{R}_{13,15},$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$\mathcal{F}=-\Pi_{2,3},\quad \mathcal{G}=\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}.$$

Donc, en vertu des formules (75), lorsque p, divisé par 19, donnera pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$(87)\qquad 4p=x^2+19y^2,$$

par des valeurs entières de x,y, qui vérifieront les conditions

$$(88)\qquad x\equiv-\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}},\quad y\equiv-\frac{\delta}{19}\,\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}},\ (\mathrm{mod.}\ p).$$

On peut remarquer qu'en vertu des formules (88), la quantité x est équivalente, au signe près, suivant le module p, au rapport

$$\frac{\Pi_{1,7}\Pi_{4,6}}{\Pi_{2,3}},$$

dont le numérateur et le dénominateur ont pour facteurs les trois valeurs de

$$\Pi_{l,l'},$$

correspondantes aux trois colonnes verticales du tableau (86) qui offrent des valeurs de l, l', l'' dont la somme est $n = 19$; chaque valeur de

$$\Pi_{l,l'},$$

devant être considérée comme facteur du numérateur ou du dénominateur, suivant qu'elle correspond à une colonne verticale de rang impair, ou de rang pair. Or, il est facile de prouver que cela devait arriver ainsi. En effet, soient l, l', l'' trois nombres renfermés dans l'une des colonnes verticales, au bas desquelles se trouve placée la somme $n = 19$. Si la colonne dont il s'agit est de rang impair, ces trois nombres correspondront à des indices pairs, et par suite

$$p\mathrm{R}_{l,l'} = \frac{p^2}{\mathrm{R}_{n-l,\,n-l'}}$$

sera l'un des facteurs de I. Si au contraire la colonne dont il s'agit est de rang pair, une autre colonne de rang impair, mais au bas de laquelle on lira la somme $2n = 38$, renfermera les trois nombres

$$n - l, \quad n - l', \quad n - l'',$$

et par suite

$$p\mathrm{R}_{n-l,\,n-l'}$$

sera l'un des facteurs de I. Donc, dans le premier cas, $\mathrm{R}_{n-l,\,n-l'}$ sera un facteur de G, et $-\Pi_{l,l'}$ un facteur de $\mathcal{G}$, tandis que, dans le second cas, $\mathrm{R}_{n-l,\,n-l'}$ sera un facteur de F, et $-\Pi_{l,l'}$ un facteur de $\mathcal{F}$. On peut ajouter qu'à toute colonne de rang impair, terminée par la somme $2n = 38$, correspondra une colonne de rang pair, terminée par la somme $n = 19$. Donc, pour obtenir tous les facteurs de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, il suffira de considérer les colonnes terminées par la somme $n = 19$; et chacune de ces colonnes fournira un facteur de la forme

$$-\Pi_{l,l}$$

soit au numérateur, soit au dénominateur du rapport $\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{F}}$, suivant qu'elle sera de rang impair ou de rang pair.

La remarque que nous venons de faire, donne le moyen d'appliquer facilement les formules (75) aux cas où n se réduit à l'un des nombres 43, 67; et d'abord, si l'on suppose $n = 43$, $s = 28$, alors, en vertu des tables construites par M. Jacobi, les nombres inférieurs à $n - 1$, et équivalents aux quantités

$$1,\ s,\ s^2, \ldots s^{n-1},$$

c'est-à-dire, les nombres correspondants aux indices

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9, 10, 11, 12, 13, \\ 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, \\ 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, \end{array}$$

seront ceux que renferment les trois premières lignes horizontales du tableau

$$(89)\qquad \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrrrrrr} 1, & 28, & 10, & 22, & 14, & 5, & 11, & 7, & 24, & 27, & 25, & 12, & 35, & 34, \\ 6, & 39, & 17, & 3, & 41, & 30, & 23, & 42, & 15, & 33, & 21, & 29, & 38, & 32, \\ 36, & 19, & 16, & 18, & 31, & 8, & 9, & 37, & 4, & 26, & 40, & 2, & 13, & 20, \\ \hline 43, & 86, & 43, & 43, & 86, & 43, & 43, & 86, & 43, & 86, & 86, & 43, & 86, & 86, \\ \hline \end{array} \right.$$

les trois nombres renfermés dans une même colonne verticale pouvant être censés représenter trois valeurs correspondantes de

$$l,\ l',\ l'',$$

dont la somme $n=43$, ou $2n=86$ se trouve placée, dans la quatrième ligne horizontale, au-dessous de ces trois nombres. Cela posé, les valeurs de

$$\Pi_{l,l'},$$

correspondantes à des colonnes terminées inférieurement par la somme 43, seront

$$\Pi_{1,6},\ \Pi_{10,16},\ \Pi_{3,18},\ \Pi_{5,8},\ \Pi_{9,11},\ \Pi_{4,15},\ \Pi_{2,12};$$

et parmi ces valeurs, quatre, savoir

$$\Pi_{1,6},\ \Pi_{10,16},\ \Pi_{9,11},\ \Pi_{4,15},$$

correspondront à la première, à la troisième, à la septième, à la neuvième colonne verticale, c'est-à-dire, à des colonnes verticales de rang impair, tandis que les trois autres, savoir

$$\Pi_{3,18},\ \Pi_{5,8},\ \Pi_{2,12},$$

correspondront à la quatrième, à la sixième, à la douzième colonne verticale, c'est-à-dire, à des colonnes verticales de rang pair. Donc, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, si le nombre premier p, divisé par 43, donne pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$4p = x^2 + 43y^2, \tag{90}$$

par des valeurs entières de x, y qui vérifieront les conditions

$$\left\{\begin{aligned} x &\equiv -\frac{\Pi_{1,6}\,\Pi_{10,16}\,\Pi_{9,11}\,\Pi_{4,15}}{\Pi_{3,18}\,\Pi_{5,8}\,\Pi_{2,12}}, \\ y &\equiv -\frac{\delta}{43}\frac{\Pi_{1,6}\,\Pi_{10,16}\,\Pi_{9,11}\,\Pi_{4,15}}{\Pi_{3,18}\,\Pi_{5,8}\,\Pi_{2,12}}, \end{aligned}\right. \pmod{p}. \tag{91}$$

94.

Supposons, en second lieu, $n=67$, $s=n$. Alors, au lieu du tableau (89), on obtiendra le suivant

$$(92)\left\{\begin{array}{l}
1,\ 12,\ 10,\ \ 53,\ 33,\ \ 61,\ \ 62,\ \ 7,\ 17,\ \ 3,\ \ 36,\ \ 30,\ \ 25,\ \ 32,\ 49,\ \ 52,\ 21,\ 51,\ \ 9,\ \ 41,\ \ 2 \\
29,\ 13,\ 22,\ \ 63,\ 19,\ \ 27,\ \ 56,\ \ 2,\ 24,\ 20,\ \ 39,\ \ 66,\ \ 55,\ \ 57,\ 14,\ \ 34,\ \ 6,\ \ 5,\ \ 60,\ \ 50,\ \ 6 \\
37,\ 42,\ 35,\ \ 18,\ 15,\ \ 46,\ \ 16,\ 58,\ 26,\ 44,\ \ 59,\ \ 38,\ \ 54,\ \ 45,\ \ 4,\ \ 48,\ 40,\ 11,\ \ 65,\ \ 43,\ \ 4 \\
\hline
67,\ 67,\ 67,\ 134,\ 67,\ 134,\ 134,\ 67,\ 67,\ 67,\ 134,\ 134,\ 134,\ 134,\ 67,\ 134,\ 67,\ 67,\ 134,\ 134,\ 13 \\
\hline
\end{array}\right.$$

Or, les valeurs de $\Pi_{l,l'}$ correspondantes aux colonnes verticales qui, dans ce tableau, se trouvent terminées inférieurement par la somme $n=63$, sont respectivement, pour les colonnes de rang impair

$$\Pi_{1,29},\quad \Pi_{10,22},\quad \Pi_{15,19},\quad \Pi_{17,24},\quad \Pi_{4,14},\quad \Pi_{6,21},$$

et pour les colonnes de rang pair

$$\Pi_{12,13},\quad \Pi_{2,7},\quad \Pi_{3,20},\quad \Pi_{5,11},\quad \Pi_{8,28}.$$

Donc, si le nombre premier p, divisé par 67, donne pour reste l'unité, on pourra satisfaire à l'équation

$$(93)\qquad 4p = x^2 + 67y^2$$

par des valeurs entières de x, y qui vérifieront les conditions

$$(94)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &\equiv -\frac{\Pi_{1,29}\,\Pi_{10,22}\,\Pi_{15,19}\,\Pi_{17,24}\,\Pi_{4,14}\,\Pi_{6,21}}{\Pi_{12,13}\,\Pi_{2,7}\,\Pi_{3,20}\,\Pi_{5,11}\,\Pi_{8,18}}, \\
y &\equiv -\frac{\delta}{67}\,\frac{\Pi_{1,29}\,\Pi_{10,22}\,\Pi_{15,19}\,\Pi_{17,24}\,\Pi_{4,14}\,\Pi_{6,21}}{\Pi_{12,13}\,\Pi_{2,7}\,\Pi_{3,20}\,\Pi_{5,11}\,\Pi_{8,18}},
\end{aligned}\right. \qquad (\text{mod.}\ p).$$

Si maintenant on prend pour n, non plus un nombre premier, mais un nombre composé, pour lequel on ait

$$\Theta^2 = -n,$$

on trouvera, au-dessous de la limite 100, trois nombres de la forme $8x+3$, auxquels les formules (75) seront applicables, savoir les trois nombres

$$35=5.7,\quad 51=3.17,\quad 91=7.13,$$

et cinq nombres de la forme $8x+7$, auxquels les formules (79) seront applicables, savoir :

$$15=3.5,\ 39=3.13,\ 55=5.11,\ 87=3.19,\ 95=5.19.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $n=15=3.5$, on trouvera

$$\varpi=\rho+\rho^2+\rho^4+\rho^8-\rho^7-\rho^{11}-\rho^{13}-\rho^{14},$$
$$\mathrm{I}=\Theta_1\Theta_2\Theta_4\Theta_8=-R_{1,2}\ R_{1+2,4}\ R_{1+2+4,8}\ =pR_{1,2}\ R_{3,4}$$
$$\mathrm{J}=\Theta_{14}\Theta_{13}\Theta_{11}\Theta_7=-R_{14,13}R_{14+13,11}R_{14+13+11,7}=pR_{14,13}R_{12,11}$$

ou, ce qui revient au même

$$\mathrm{I}=p^3\frac{1}{R_{14,13}\ R_{12,11}},\quad \mathrm{J}=pR_{14,13}R_{12,11},$$

par conséquent

$$i=3,\ \ j=1,\ \ f=3,\ \ g=1,\ \ f-g=i-j=2,$$
$$\mathrm{F}=1,\quad \mathrm{G}=R_{14,13}R_{12,11};$$

en sorte qu'on pourra prendre

$$\mathfrak{F}=1,\quad \mathfrak{G}=\Pi_{1,2}\Pi_{3,4}.$$

Donc, si le nombre premier p, divisé par 15, donne 1 pour reste, on pourra satisfaire à l'équation

$$(95)\qquad p^2=x^2+15y^2$$

par des valeurs entières de x, y, qui vérifieront les conditions

$$(96)\qquad x\equiv-\frac{1}{2}\Pi_{1,2}\Pi_{3,4},\quad y\equiv-\frac{\delta}{30}\Pi_{1,2}\Pi_{3,4},\ (\mathrm{mod.}\,p).$$

Or comme, en vertu de l'équation (95), les valeurs numériques de x, y seront inférieures à p, il est clair que les formules (96), ou au moins la seconde de ces formules, fourniront le moyen de déterminer complétement les valeurs de x, y.

Supposons, par exemple, $p = 31$: on aura

$$\varpi = 2, \quad \Pi_{1,2} = \frac{5.6}{1.2} = 3.5, \quad \Pi_{3,4} = \frac{9.10.11.12.13.14}{1.2.3.4.5.6} = 3.7.11.13,$$

et

$$\delta \equiv r + r^2 + r^4 + r^8 - r^7 - r^{11} - r^{13} - r^{14},$$

r étant une racine primitive de l'équivalence

$$x^{15} \equiv 1, \text{ (mod. 31)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta \equiv t^2 + t^4 + t^8 + t^{16} - t^{14} - t^{22} - t^{26} - t^{28},$$

t étant racine primitive de 31. Cela posé, les tables de M. Jacobi donneront

$$\delta \equiv 10 + 7 + 18 + 14 - 20 - 19 - 9 - 28 \equiv -4, \text{(mod. 31)},$$

et l'on tirera des formules (96)

$$x \equiv -\frac{33.35.39}{2} \equiv -\frac{2.4.8}{2} \equiv -1, \quad y \equiv -2\delta x \equiv -8, \text{(mod. 31)}.$$

Donc, puisque la valeur numérique de y devra être inférieure à p et même à $\frac{p}{\sqrt{15}}$, on aura

$$y = -8.$$

On trouvera effectivement

$$31^2 = 1^2 + 15.8^2.$$

Si n cesse d'être impair, alors, pour vérifier la condition

$$\varpi^2 = -n,$$

il devra être de l'une des formes

$$4(4x+1), \quad 8(2x+1),$$

les facteurs impairs étant inégaux. On pourra, par exemple, prendre pour $\frac{n}{4}$ un des nombres

$$5, 13, 17, 21, 29, 33, 37, 41, \ldots$$

ou pour $\frac{n}{8}$ un des nombres

$$3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots,$$

c'est-à-dire, que l'on pourra prendre pour n un terme quelconque de l'une des deux suites

$$20, 52, 68, 88, 116, 132, 148, 164, \ldots$$
$$24, 40, 56, 88, 104, 120, 136, 152, \ldots$$

Si, pour fixer les idées, on attribue successivement à $\frac{n}{4}$ les valeurs représentées par les nombres premiers

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, \ldots,$$

on pourra déterminer facilement les valeurs des nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

par conséquent celles des trois quantités

$$i, \quad j, \quad \mu = \frac{i-j}{2},$$

à l'aide des principes établis à la page 594; et l'on trouvera successivement, pour valeurs de i, les nombres

$$4,\ 8,\ 12,\ 20,\ 20,\ 28,\ldots;$$

pour valeurs de j, les nombres

$$0,\ 4,\ 4,\ 8,\ 16,\ 12,\ldots,$$

et pour valeurs de μ, les nombres

$$2,\ 2,\ 4,\ 6,\ 2,\ 8,\ldots$$

D'ailleurs, en vertu des formules (81), on aura :

pour $\frac{n}{4}=5$, $n=20$,

$$x\equiv-\frac{1}{2}\Pi_{1,9}\Pi_{3,7}\equiv\pm\frac{1}{2}\Pi_{1,9}^2,\quad y\equiv\frac{\delta}{10}x,\ (\text{mod. } p);$$

pour $\frac{n}{4}=13$, $n=52$,

$$x\equiv-\frac{1}{2}\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}}\frac{\Pi_{11,15}\Pi_{7,19}}{\Pi_{5,21}}\equiv\pm\frac{1}{2}\left(\frac{\Pi_{1,25}\Pi_{9,17}}{\Pi_{3,23}}\right)^2,\quad y\equiv\frac{\delta}{26}x,(\text{mod.}\,p),$$

etc...

En terminant cette note, nous ferons observer que si l'on veut obtenir directement, dans tous les cas, non plus seulement des quantités équivalentes aux quantités entières x, y, qui vérifient l'équation

$$4p^\mu=x^2+ny^2,$$

mais les valeurs mêmes de x et de y, il suffira de recourir aux équations (35), desquelles on tirera, eu égard aux formules $\lambda=g$, $\varpi^2=-n$,

$$x+y\varpi=2p^{f-g}\frac{F}{G},\quad x-y\varpi=2\frac{G}{F},$$

et par conséquent

$$(97) \qquad x = \frac{G}{F} + p^{f-g}\frac{F}{G}, \quad y = \frac{\textcircled{D}}{n}\left[\frac{G}{F} - p^{f-g}\frac{F}{G}\right].$$

Ces dernières valeurs de y pourront toujours être calculées ainsi que les facteurs de la forme

$$R_{l,l'}$$

compris dans F et dans G, à l'aide des principes établis dans la note V. On pourra d'ailleurs, si l'on veut, déduire des formules (97) les valeurs exactes de x, y, en remplaçant dans les seconds membres le signe $=$ par le signe $\equiv$, et la racine primitive de l'équation

$$x^n = 1,$$

par une racine primitive r de l'équivalence

$$x^n \equiv 1, \quad (\text{mod. } p^m),$$

m étant un nombre entier assez considérable pour qu'il ne reste aucune incertitude sur la valeur de x ou de y. Dans le cas particulier où l'on a $\mu = 1$ ou $\mu = 2$, on peut déterminer complétement y, en supposant $m = 1$. D'ailleurs, cette dernière supposition réduit les équivalences, qui doivent remplacer les équations (97), aux formules (75).

NOTE XIV.

OBSERVATIONS RELATIVES AUX FORMES QUADRATIQUES SOUS LESQUELLES SE PRÉSENTENT CERTAINES PUISSANCES DES NOMBRES PREMIERS, ET RÉDUCTION DES EXPOSANTS DE CES PUISSANCES.

Soient, comme dans la note précédente :

p un nombre premier impair ;
n un diviseur de $p-1$;
$h, k, l, \ldots$ les entiers inférieurs à n mais premiers à n ;
N le nombre des entiers $h, k, l, \ldots$;
ρ l'une des racines primitives de l'équation

$$(1) \qquad x^n = 1,$$

et

$$(2) \qquad \omega = \rho^h + \rho^{h'} + \rho^{h''} + \ldots - \rho^k - \rho^{k'} - \rho^{k''} - \ldots$$

une somme alternée de ces racines, les entiers $h, k, l, \ldots$ étant ainsi partagés en deux groupes

$$h,\ h',\ h'', \ldots \quad \text{et} \quad k,\ k',\ k'', \ldots$$

dont le premier sera censé comprendre l'unité. Enfin supposons que, parmi les entiers

$$h,\ k,\ l, \ldots$$

ceux qui sont inférieurs à $\frac{1}{2}n$, se trouvent, en nombre égal à i, dans le groupe $h, h', h'', \ldots$ et en nombre égal à j, dans le groupe $k, k', k'', \ldots$ Pour que le module n vérifie la condition

(3) $$\varpi^2 = -n,$$

il faudra que ce module soit de l'une des formes

$$4x+3, \quad 4(4x+1), \quad 8(2x+1),$$

et qu'en outre les facteurs impairs de n soient inégaux. Alors, en vertu du théorème établi dans la note précédente, on pourra toujours satisfaire, par des valeurs entières de x, y, à l'équation

(4) $$4p^\mu = x^2 + ny^2,$$

dans laquelle on devra poser généralement

$$\mu = i - j, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{i-j}{2}, \quad \text{ou} \quad \mu = \frac{i-j}{2},$$

suivant que l'on aura

$n \equiv 7$, (mod. 8), ou $n \equiv 3$, (mod. 8), ou $n \equiv 0$, (mod. 4).

On doit toutefois observer qu'il y a deux exceptions à faire à cette règle, et que l'on aura, 1°, pour $n = 3$

$$\mu = i - j = 1, \quad \text{au lieu de} \quad \mu = \frac{i-j}{3},$$

2°, pour $n = 4$

$$\mu = i - j = 1, \quad \text{au lieu de} \quad \mu = \frac{i-j}{2}.$$

Ajoutons que l'on pourra réduire l'équation (4), si n divisé par 8 donne 7 pour reste, à la formule

(5) $$p^\mu = x^2 + ny^2,$$

et, si n est divisible par 4 ou par 8, à la formule

$$(6) \qquad p^{\mu} = x^2 + \frac{n}{4}y^2.$$

En calculant, dans la note précédente, les valeurs de l'exposant μ correspondantes à des valeurs données du module n, nous avons toujours obtenu des valeurs impaires de μ, quand n était un nombre premier, et des valeurs paires de μ, quand n était un nombre composé, supérieur à 4. On peut affirmer qu'il en sera toujours ainsi. En effet, si nous prenons d'abord pour n un nombre impair, ce nombre sera de la forme $4x + 3$, et l'exposant μ représenté par la valeur numérique de la différence

$$i - j$$

ou par le tiers de cette valeur numérique, sera pair ou impair avec elle, suivant que la somme

$$i + j = \frac{N}{2}$$

sera elle-même paire ou impaire. Comme on aura d'ailleurs, si n est un nombre premier,

$$N = n - 1,$$

et, si n est le produit de plusieurs nombres premiers impairs $\nu, \nu', \ldots$

$$N = (\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots;$$

il est clair que μ sera impair avec $\frac{n-1}{2}$, si n est un nombre premier de la forme $4x + 3$, et pair avec le rapport

$$\frac{(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots}{2},$$

si n est un nombre composé de la même forme $4x + 3$. Dans l'un et l'autre cas, d'après ce qui a été dit dans la note IX,

$$h, h', h'', \ldots$$

seront ceux des entiers inférieurs à n et premiers à n, qui vérifieront la condition

$$\left[\frac{h}{n}\right] = 1.$$

Supposons maintenant que l'on prenne pour n, non plus un nombre impair de la forme $4x + 3$, mais un nombre pair divisible par 4. Ce nombre devra être de la forme

$$4\nu\nu'\nu'' \ldots,$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs premier impairs, inégaux entre eux, et dont le produit soit de la forme $4x + 1$. Alors aussi les nombres

$$h, h', h'', \ldots$$

seront ceux des entiers inférieurs à n, et premiers à n, qui vérifieront, ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right] = 1, \qquad h \equiv 1, (\text{mod. } 4),$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{4}n}\right] = -1, \quad h \equiv -1, (\text{mod. } 4).$$

On peut en conclurre que, dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

les nombres entiers inférieurs à $\frac{n}{2}$ seront deux à deux de la forme

$$h, \quad \frac{n}{2} - h.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, i sera pair, et, comme l'équation

$$N = 2(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots$$

entraînera la suivante

$$i + j = \frac{N}{2} = (\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots$$

on peut affirmer encore, 1°, que $i + j$ sera pair et même divisible par 4; 2°, que j sera pair avec i et $i + j$; 3°, que la somme

$$\frac{i}{2} + \frac{j}{2}$$

sera paire elle-même, et qu'on pourra en dire autant de la différence

$$\frac{i}{2} - \frac{j}{2} = \frac{i - j}{2} = \mu.$$

Supposons enfin que l'on prenne pour n un nombre divisible par 8. Ce nombre devra être de la forme

$$8\nu\nu'\nu''\ldots$$

$\nu, \nu', \nu'', \ldots$ étant des facteurs impairs inégaux; et les entiers

$$h, h', h'', \ldots$$

seront, 1°, si $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x + 1$, ceux qui vérifieront les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \quad h \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 3, (\text{mod. } 1),$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = -1, \quad h \equiv 5 \quad \text{ou} \quad 7, \pmod{8};$$

2°, si $\frac{n}{8}$ est de la forme $4x+3$, ceux qui vérifieront les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = 1, \qquad h \equiv 1 \quad \text{ou} \quad 7, \pmod{8},$$

ou les deux conditions

$$\left[\frac{h}{\frac{1}{8}n}\right] = -1, \quad h \equiv 3 \quad \text{ou} \quad 5, \pmod{8}.$$

On en conclut encore que, dans le groupe

$$h, h', h'', \ldots$$

les nombres inférieurs à $\frac{n}{2}$ seront, deux à deux, de la forme

$$h, \quad \frac{n}{2} - h.$$

Donc i sera pair, et, comme on aura

$$N = 4(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots,$$

$$i + j = \frac{N}{2} = 2(\nu - 1)(\nu' - 1)\ldots$$

la somme $i+j$ sera non-seulement paire, mais divisible par 4. Donc, par suite

$$j \quad \text{et} \quad \frac{i}{2} + \frac{j}{2}$$

seront pairs, et l'on pourra en dire autant de la différence

$$\frac{i}{2} - \frac{j}{2} = \frac{i-j}{2} = \mu.$$

Ainsi, en résumé, l'exposant μ sera, dans l'équation (4), (5), ou (6), un nombre impair, ou un nombre pair, suivant que le module $n > 4$ sera un nombre premier, ou un nombre composé. D'ailleurs, dans le dernier cas, on peut, à l'aide d'une méthode souvent employée par les géomètres, réduire, comme on va le voir, la valeur numérique de l'exposant μ.

Prenons d'abord pour n un nombre composé de la forme $8x + 7$. Alors l'équation (4) pourra être remplacée par la formule (5), dans laquelle μ sera un nombre pair; et, comme par suite p^μ sera un carré impair, c'est-à-dire, de la forme $8x + 1$, x^2 devra être un carré de la même forme, et y^2 un carré pair. Cela posé, les deux facteurs

$$p^{\frac{\mu}{2}} - x, \quad p^{\frac{\mu}{2}} + x,$$

dont la somme sera $2p^{\frac{\mu}{2}}$, et le produit $p^\mu - x^2 = ny^2$, auront évidemment pour plus grand commun diviseur le nombre 2; et, pour satisfaire à l'équation (5), on devra supposer

$$p^{\frac{\mu}{2}} - x = 2\alpha u^2, \quad p^{\frac{\mu}{2}} + x = 2\beta v^2,$$

par conséquent

$$p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + \beta v^2, \tag{7}$$

α, β, u, v désignant des nombres entiers qui vérifieront les conditions

$$\alpha\beta = n, \tag{8}$$

$$2uv = y. \tag{9}$$

Il y a plus : comme le produit $\alpha\beta = n$ sera diviseur de $p - 1$, on aura

$$\left[\frac{p}{\alpha}\right] = 1, \quad \left[\frac{p}{\beta}\right] = 1,$$

et par suite la formule (7) entraînera les conditions

$$\left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = 1, \quad \left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = 1, \tag{10}$$

auxquelles les facteurs $\alpha, 6$ devront encore satisfaire. Enfin, comme on l'a dit dans la note IX, la loi de réciprocité, comprise dans la formule

$$\left[\frac{6}{\alpha}\right] = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{6-1}{2}}\left[\frac{\alpha}{6}\right], \tag{11}$$

est applicable au cas où l'on représente par $\alpha, 6$, non pas seulement deux nombres premiers supérieurs à 2, mais encore deux nombres impairs quelconques; et, comme, n étant de la forme $4x + 3$, l'un des facteurs $\alpha, 6$ devra être de la forme $4x + 1$, il est clair que, dans l'hypothèse admise, la première des conditions (10) entraînera la seconde, et réciproquement. Donc, *lorsque* n *sera un nombre composé de la forme* $8x + 7$, *l'équation* (5) *entraînera la formule* (7), *dans laquelle* $\alpha, 6$ *devront vérifier les conditions*

$$\alpha 6 = n, \quad \left[\frac{6}{\alpha}\right] = 1. \tag{12}$$

Supposons, pour fixer les idées, $n = 15 = 3.5$. On trouvera pour $h, h', \ldots$ les nombres

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,$$

dont trois sont inférieurs et un seul supérieur à $7\frac{1}{2}$. On aura donc

$$i = 3, \quad j = 1, \quad \mu = \frac{i-j}{2} = 2,$$

et l'équation (5), réduite à

$$p^2 = x^2 + 15y^2,$$

entraînera la formule

$$p = \alpha u^2 + 6v^2,$$

$\alpha, 6$ étant des entiers assujettis à vérifier les deux conditions

$$\alpha 6 = 15, \quad \left[\frac{6}{\alpha}\right] = 1.$$

Or, de ces deux conditions, la première sera vérifiée si l'on prend pour α, β les nombres 1 et 15 ou 3 et 5. Mais, comme on a

$$\left[\frac{5}{3}\right] = -1,$$

la seconde condition nous oblige à rejeter les nombres 3 et 5, en prenant pour α, β les nombres 1 et 15. Donc, p étant un nombre premier de la forme $15x + 1$, ou, ce qui revient au même, de la forme $30x + 1$, la considération des facteurs primitifs de p fournira la solution, en nombres entiers, de l'équation

$$p = u^2 + 15v^2.$$

Supposons, par exemple, $p = 31$. On trouvera d'abord [voir la note précédente] $x = -1$,

$$31^2 = 1^2 + 15.8^2;$$

puis on en conclura

$$(31 + 1)(31 - 1) = 4.15u^2v^2,$$

le produit uv devant vérifier la condition

$$u^2v^2 = 4^2;$$

et, comme des deux nombres

$$31 - x = 31 + 1 = 32, \quad 31 + x = 31 - 1 = 30,$$

c'est le second qui se trouve divisible par 15, on aura, dans le cas présent

$$\alpha = 1, \quad \beta = 15,$$

$$31 + 1 = 2u^2, \quad 31 - 1 = 2.15v^2.$$

On vérifiera effectivement les deux dernières équations, en prenant

$$u^2 = 4^2, \quad v^2 = 1;$$

et par conséquent, il suffira d'attribuer à u, v les valeurs numériques 4 et 1 pour résoudre en nombres entiers l'équation

$$31 = u^2 + 15v^2.$$

Prenons maintenant pour n un nombre composé de la forme $8x + 3$. Alors on pourra vérifier en nombres entiers l'équation (4). De plus, les deux facteurs

$$2p^{\frac{\mu}{2}} - x, \quad 2p^{\frac{\mu}{2}} + x,$$

dont la somme sera $4p^{\frac{\mu}{2}}$ et le produit $4p^{\mu} - x^2 = ny^2$, resteront premiers entre eux, si x^2, y^2 sont des carrés impairs. Donc alors, pour satisfaire à l'équation (4), on devra supposer

$$2p^{\frac{\mu}{2}} - x = \alpha u^2, \quad 2p^{\frac{\mu}{2}} + x = 6v^2,$$

et par suite

(13) $$4p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 6v^2,$$

$\alpha, 6, u, v$ étant des nombres entiers qui vérifient les formules

$$\alpha 6 = n, \quad uv = y,$$

avec les conditions (10). Si, dans le cas que nous considérons, x^2, y^2 étaient des carrés pairs, on pourrait, comme dans le cas précédent, réduire l'équation (4) à l'équation (5), et l'on arriverait à la formule (7), qui peut être censée comprise dans la formule (13), de laquelle on la déduit, en remplaçant u par $2u$ et v par $2v$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Lorsque n est un nombre composé de la forme $8x + 3$, l'équation (4) entraîne la formule (13), dans laquelle α, 6 doivent vérifier les conditions (12).

Prenons maintenant pour n un nombre composé, divisible par 4, mais non par 8. Alors on pourra satisfaire en nombres entiers à l'équation (6), si $\frac{n}{4}$ est de la forme $4x+1$; et, par des raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, on prouvera que l'équation (6) entraîne l'une des deux formules

$$(14)\qquad p^{\frac{\mu}{2}}=\alpha u^2+6v^2,\qquad\qquad (15)\qquad 2p^{\frac{\mu}{2}}=\alpha u^2+6v^2,$$

$\alpha, 6$ désignant des nombres impairs assujettis à vérifier la condition

$$(16)\qquad \alpha 6=\frac{n}{4}$$

et u, v des quantités entières qui vérifieront l'une des conditions

$$2uv=y,\quad uv=y.$$

D'ailleurs, le produit

$$\alpha 6=\frac{n}{4}$$

étant de la forme $4x+1$,

$$\alpha, 6$$

seront tous deux de cette forme, ou tous deux de la forme $4x+3$; et, comme l'équation (14) entraînera les formules (10), en vertu desquelles la formule (11) donnera

$$(17)\qquad (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{6-1}{2}}=1,$$

il est clair que, dans l'équation (14), $\alpha, 6$ ne pourront être tous deux de la forme $4x+3$. Ils y seront donc l'un et l'autre de la forme $4x+1$. Quant aux valeurs de $\alpha, 6$, renfermées dans l'équation (15), elles devront vérifier les formules

(18) $$\left[\frac{6}{\alpha}\right]=\left[\frac{2}{\alpha}\right],\quad \left[\frac{\alpha}{6}\right]=\left[\frac{2}{6}\right],$$

desquelles on tirera, en les combinant avec les formules (10) et (16)

(19) $$\left[\frac{2}{\frac{1}{4}n}\right]=(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{6-1}{2}};$$

et, comme u^2, v^2 devront être impairs dans l'équation (15), cette équation donnera encore

(20) $$2\equiv\alpha+6,\ (\mathrm{mod.}\ 8).$$

Or, en vertu des formules (19), (20), les entiers

$$\alpha, 6$$

devront être tous deux de la forme $8x+1$, ou tous deux de la forme $8x+5$, si $\frac{n}{4}$ est de la forme $8x+1$; et l'un de la forme $8x+3$, l'autre de la forme $8x+7$, si $\frac{n}{4}$ est de la forme $8x+5$. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsque n *est un nombre composé divisible par* 4 *et non par* 8, *l'équation* (6) *entraîne ou les équations* (14) *et* (16), *ou les équations* (15) *et* (16); $\alpha, 6$ *étant deux nombres impairs qui devront être tous deux de la forme* $8x+1$, *ou tous deux de la forme* $8x+5$, *si* $\frac{n}{4}$ *est de la forme* $8x+1$, *et l'un de la forme* $8x+3$, *l'autre de la forme* $8x+7$, *si* $\frac{n}{4}$ *est de la forme* $8x+5$. *Ajoutons que* $\alpha, 6$ *devront encore satisfaire, si l'équation* (14) *se vérifie, à l'une des équa-*

tions (10), *et, si l'équation* (15) *se vérifie, à l'une des équations* (18).

En appliquant, au cas où n est divisible par 8, des raisonnements semblables à ceux dont nous venons de faire usage, on obtiendra la proposition suivante.

Lorsque n *est un nombre composé, divisible par* 8, *l'équation* (6) *entraîne la formule*

$$(21) \qquad p^{\frac{\mu}{2}} = \alpha u^2 + 2\beta v^2,$$

α, β *étant deux nombres impairs assujettis à vérifier la condition*

$$(22) \qquad \alpha\beta = \frac{n}{8},$$

avec les deux suivantes

$$(23) \qquad \left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = 1, \quad \left[\frac{\beta}{\alpha}\right] = \left[\frac{2}{\alpha}\right],$$

desquelles on tire, eu égard à la formule (11),

$$(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}\frac{\beta-1}{2}} = \left[\frac{2}{\alpha}\right] = (-1)^{\frac{1}{2}\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha+1}{2}},$$

et par conséquent

$$\frac{\alpha-1}{2}\cdot\frac{\beta-1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\alpha-1}{2}\frac{\alpha+1}{2}, \text{ (mod. 2)},$$

ou, ce qui revient au même

$$(24) \qquad (\alpha-1)(\alpha-2\beta+3) \equiv 0, \text{ (mod. 16)}.$$

En vertu des diverses propositions que nous venons d'établir, l'exposant μ de la puissance de p renfermée dans l'équation (4), (5) ou (6), peut être réduit, lorsque n est un nombre composé, à l'exposant $\frac{\mu}{2}$. Ce dernier exposant, s'il est pair, pourra souvent lui-même être réduit à $\frac{\mu}{4}$; et cette nouvelle réduction sera particulièrement applicable aux formules (7), (13), (14), (21), si, dans ces formules α se réduit à l'unité.

Pour vérifier cette dernière observation sur un exemple, supposons

$$n = 68 = 4 \cdot 17.$$

Alors, parmi les entiers inférieurs à 17, et premiers à 68, ceux qui feront partie du premier groupe, savoir

$$1, 3, 7, 9, 11, 13$$

seront au nombre de 6, et ceux qui feront partie du second groupe, savoir

$$5, 15$$

seront au nombre de deux. On aura donc par suite

$$\frac{i}{2} = 6, \quad \frac{j}{2} = 2, \quad \mu = \frac{i-j}{2} = 6 - 2 = 4,$$

et l'on pourra, en supposant que p, divisé par 68, donne l'unité pour reste, résoudre en nombres entiers l'équation

$$p^4 = x^2 + 17y^2.$$

Or, celle-ci entraînera l'une des formules

$$p^2 = u^2 + 17v^2, \quad 2p^2 = u^2 + 17v^2,$$

dont la première à son tour entraînera l'une des suivantes

$$p = s^2 + 17t^2, \quad 2p = s^2 + 17t^2,$$

s, t désignant encore des nombres entiers. Effectivement l'on sait que tout nombre premier de la forme $68x+1$ peut être représenté par l'une des formules

$$y^2+2yz+18z^2=(y+z)^2+17z^2,\quad 2y^2+2yz+yz^2=\frac{(2y+z)^2+17z^2}{2}.$$

POST-SCRIPTUM.

La note placée au bas de la page 454, et relative à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers, se réduit à cette observation très-simple, que la démonstration empruntée par M. Legendre à M. Jacobi ne paraît pas avoir été publiée par l'un ou l'autre de ces deux géomètres avant 1830. Je suis loin de vouloir en conclure que cette démonstration n'ait pu être découverte par M. Jacobi à une époque antérieure. Dans le mémoire de 1827, intitulé : *De residuis cubicis commentatio numerosa*, M. Jacobi, avant d'énoncer les théorèmes relatifs à la résolution des équations indéterminées $4p=x^2+27y^2$, $p=x^2+7y^2$, dit expressément : *in fontem uberrimum incidi, e quo inter alia et demanare sequentia theoremata vidi.* La source féconde dont M. Jacobi parle dans ce passage est, comme lui-même me l'a déclaré depuis (voir dans le *Bulletin des sciences de M. de Ferussac*, le mémoire de septembre 1829), la considération des propriétés dont jouissent les racines de l'équation auxiliaire, qui sert à la résolution d'une équation binôme, c'est-à-dire, en d'autres termes, les fonctions ci-dessus désignées par Θ_h, Θ_k ... Quelques-unes de ces propriétés avaient déjà conduit M. Gauss aux importants résultats que contiennent les dernières pages de ses *Disquisitiones arithmeticæ*, et à son théorème sur la résolution de l'équation $p=x^2+y^2$. Ainsi, les recherches de M. Jacobi sur les formes quadratiques des nombres premiers, et l'on doit en dire autant des miennes, peuvent être considérées comme offrant de nouveaux développements de la belle théorie exposée par M. Gauss. J'ajouterai que, les propriétés des fonctions de la forme Θ_h étant supposées connues, il devient très-facile d'obtenir la démonstration ci-dessus rappelée. Il est donc tout naturel, qu'à une époque renfermée entre 1827 et 1830, M. Jacobi ait trouvé cette démonstration, et l'ait communiquée verbalement ou par écrit à M. Legendre. Mais quelle est la date précise de cette communication? C'est un point sur lequel je n'ai aucuns renseignements, et m'en rapporterai au témoignage de l'illustre géomètre de Kœnigsberg.

MÉMOIRE

SUR L'EXISTENCE

D'UNE CONDITION PHYSIQUE

QUI ASSIGNE

A L'ATMOSPHÈRE TERRESTRE

UNE LIMITE SUPÉRIEURE D'ÉLÉVATION QU'ELLE NE PEUT DÉPASSER.

PAR M. BIOT.

Lu à l'Académie des sciences, le 28 janvier 1839.

PREMIÈRE PARTIE.

A une époque où les sciences d'observation réunissent si activement leurs efforts, pour déterminer tous les éléments de la physique du globe, il peut paraître surprenant que l'on n'ait encore aucune notion précise sur la hauteur de l'atmosphère terrestre, et qu'il n'existe même pas jusqu'ici de méthode directe, soit théorique, soit expérimentale, par laquelle on puisse espérer de l'évaluer. Mais, si l'on considère le petit nombre de données immédiatement observables que l'on peut employer à cette recherche, et leur spécialité essentiellement bornée aux seules couches aériennes dans lesquelles nous pouvons porter nos instruments, on conçoit qu'il doit être difficile d'en tirer des caractères assez généraux pour s'étendre, avec une suffisante certitude, aux régions élevées et inaccessibles de l'atmosphère, dont nous ne pouvons juger que par induction. Aussi, à défaut d'expériences immédiates pour caractériser leur état physique, a-t-on cherché à constater, au moins, le fait de leur existence et de l'élévation à laquelle elles s'étendent, en l'inférant de caractères indirects, tirés des réflexions et des réfractions qu'elles doivent exercer sur la lumière en vertu de leur matérialité. Mais ces propriétés mêmes ne se manifestant à nous que dans des phénomènes composés, auxquels concourt l'atmosphère entière, il est encore très-difficile de discerner nettement la part, nécessairement très-faible, pour laquelle y contribuent les dernières couches d'air qui sont à la fois les plus élevées et les plus rares. Quoique la condition mathématique que je me propose de faire connaître dans ce Mémoire repose sur des considérations différentes de celles-là, je crois cependant utile de rappeler d'abord les indications qu'elles fournissent. Car, si les résultats qu'on en a déduits ont été jusqu'ici insuffisants et peu rigoureux, leur principe, judicieusement appliqué, semble avoir plus de portée qu'on ne le suppose généralement.

Le pouvoir réflecteur des couches aériennes se montre pendant le jour, par l'illumination qu'elles jettent dans tous les lieux où quelque portion de l'atmosphère est visible, quoique les rayons solaires n'y pénètrent pas directement. Il se montre encore dans la clarté sensible que les régions atmosphériques, illuminées par le soleil, continuent de nous envoyer, quelque temps après que cet astre est descendu sous l'horizon, ou lorsqu'il ne l'a pas encore atteint. Le soir, cette clarté s'appelle *le Crépuscule*, le matin *l'Aurore*. Elle est d'autant plus vive que le soleil est plus près du plan de l'horizon ; et elle ne cesse d'être observable que lorsqu'il est abaissé d'environ 17 à 18 degrés au-dessous de ce plan. Pour définir ses limites optiques, étudions-la le soir, par une nuit sereine, après que le soleil a disparu pour nous à l'horizon occidental. Si l'on conçoit alors un cône de rayons lumineux venant du soleil, tangentiellement à la surface terrestre, et qu'on le prolonge à travers toute l'atmosphère supposée sphérique, en tenant compte des réfractions qu'il y subit, il y tracera en sortant, un cercle qui séparera les régions aériennes, directement illuminées, de celles qui ne le sont pas. Ce cercle-limite, ayant son centre sur l'axe du cône solaire, s'élèvera sur l'horizon oriental à mesure que le soleil sera plus profondément descendu du côté opposé, et il tournera ainsi autour du centre de la terre, avec un mouvement angulaire égal à celui de cet astre. Mais un observateur placé sur la surface terrestre n'en découvrira jamais que la très-petite portion d'arc qui s'élève au-dessus de son horizon apparent; et, par une illusion de perspective, ce petit arc, projeté visuellement sur la sphère céleste, lui paraîtra sensiblement une portion de grand cercle. En outre, la limite observable du phénomène ne devra pas lui sembler aussi nette que le suppose cette description géométrique. Car la portion illuminée de l'atmosphère jettera nécessairement quelque lumière sur la portion qui ne reçoit pas directement les rayons du soleil. Elle deviendra pour celle-ci un corps éclairant, d'une intensité de radiation infiniment moindre que l'astre, mais qui devra sans doute lui donner encore une lueur sensible, surtout pour une pupille qui se sera dilatée à mesure qu'elle recevra moins de lumière. Cette illumination secondaire s'appelle *le second crépuscule*. La portion de l'atmosphère qui la reçoit est bornée par les trajectoires lumineuses qui, partant de tous les points du dernier cercle directement illuminé, se propagent tangentiellement à la surface terrestre, du côté opposé au soleil, à travers toute l'atmosphère obscure; de sorte que ce second espace crépusculaire est encore limité, à la surface de l'atmosphère, par un cercle, ayant son centre sur l'axe du cône solaire actuel comme le premier, et tournant, comme lui, angulairement avec le soleil. On peut géométriquement concevoir ce second espace crépusculaire comme le générateur d'un troisième, éclairé plus faiblement encore, terminé circulairement de la même manière, et ainsi de suite indéfiniment.

Les caractères généraux de circularité, et de mouvement angulaire, qu'indiquent ces considérations optiques, se retrouvent en effet dans les phénomènes réels. Le point de l'horizon que le soleil vient d'abandonner le soir, paraît entouré d'une auréole lumineuse dont l'intensité va en décroissant à partir de ce point; et, lorsque le ciel est pur, les bords extrêmes de cette zone se détachant du reste du ciel, y marquent une limite nettement discernable de lumière et d'obscurité. Cette limite se nomme là *courbe crépusculaire*. On la voit monter progressivement au-dessus de l'horizon oriental, atteindre le zénith, et descendre vers l'horizon occidental à mesure que le soleil s'abaisse plus profondément sous ce plan. Enfin elle se couche elle-même, puis disparaît à la suite de cet astre lorsqu'il a atteint la profondeur de 17 ou 18 degrés : elle offre alors l'apparence optique d'un grand cercle, dont le plan coïncide avec l'horizon.

Peu d'astronomes ont pris le soin d'en observer et d'en noter ainsi toutes les phases ; sans doute parce qu'ils n'en sentaient pas l'importance pour leurs études habituelles. Mais, parmi ceux qui l'ont vue et décrite, il en est un dont le témoignage suffit pour constater la possibilité de l'observer avec précision : c'est Lacaille. Voici comment il s'exprime à ce sujet, dans le récit de son voyage au cap de Bonne-Espérance (1) :

« Les 16 et 17 avril 1751, étant en mer et en calme, par « un ciel extrêmement clair et serein, où je distinguais Vénus « à l'horizon de la mer, comme une étoile de la seconde « grandeur, je vis la lumière crépusculaire terminée en arc « de cercle, aussi régulièrement que possible. Ayant réglé ma « montre à l'heure vraie, au coucher du soleil, je vis cet arc « confondu avec l'horizon ; et je calculai, par l'heure où je « fis cette observation, que le soleil était (alors) abaissé, « le 16 avril, de 16° 38′ ; le 17, de 17° 13′. »

Mais, si ce témoignage formel de Lacaille lève toute incertitude sur la netteté du phénomène, et sur la possibilité de l'observer distinctement, dans des circonstances atmosphériques favorables, il en laisse une très-grande sur son interprétation physique. Car il reste à savoir si la courbe lumineuse dont on constate l'existence, le mouvement angulaire et la disparition, appartient à la limite géométrique

(1) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1751, page 454.

du premier espace crépusculaire ou du second, ou du troisième, ou à quelque partie intermédiaire de l'un d'eux.

Parmi les astronomes et les géomètres qui se sont occupés de ce phénomène, Lambert est, je crois, le seul qui ait remarqué l'alternative précédente, et indiqué les moyens de la décider (1). Pour en montrer l'étendue, comme il l'a fait lui-même, mais avec des données probablement plus exactes, j'ai calculé, par ses formules, la hauteur des dernières couches d'air réfléchissantes qui résulterait des observations de Lacaille, en attribuant la courbe lumineuse observée à la limite du premier espace crépusculaire, du second, du troisième, et employant le pouvoir réfringent aujourd'hui connu de l'air atmosphérique, ainsi que la réfraction horizontale donnée par nos tables, pour une pression de $0^{m},76$ et une température de 20° centésimaux. Voici quels ont été les résultats :

	Hauteur des dernières couches d'air réfléchissantes en mètres.
Par la limite du premier espace crépusculaire......	58916 mètres.
du second........................	10797
du troisième......................	6392

Cette dernière hauteur étant moindre que celle à laquelle est parvenu M. Gay-Lussac, ne saurait être admise. La seconde paraît encore bien faible, si l'on considère qu'à l'élévation de 7000 mètres, d'après les observations de M. Gay-Lussac, la densité de l'air n'était réduite qu'à la moitié environ de sa valeur à la surface du sol. La véritable hauteur finale est donc vrai-

(1) *Photométrie* de Lambert, partie V, chap. III, page 440.

semblablement intermédiaire entre celle-ci et la première; de sorte que la courbe crépusculaire, lorsqu'on l'observe à l'horizon, appartiendrait à quelque partie du second espace crépusculaire. C'est aussi l'opinion de Lambert, et il l'appuie sur des considérations photométriques qui paraissent évidentes.

Car, dit-il, la couche d'air directement illuminée, qui termine le premier espace crépusculaire, est, dans cette limite, infiniment mince. Lorsqu'elle atteint l'horizon occidental, la faible lueur qu'elle rayonne en vertu de sa minceur, arrive à l'œil de l'observateur à travers la portion du second espace qui reçoit du premier le plus de rayons réfléchis, et à travers la plus longue dimension de cet espace, qui s'étend alors dans tout l'horizon. Celui-ci doit donc offrir encore à cet instant un éclat sensible, auquel la courbe crépusculaire persistante doit s'attribuer; et ainsi elle appartient, non à la première limite, mais à quelque partie du second espace, lorsqu'elle se couche et disparaît dans l'horizon.

Alors, par des considérations analogues, Lambert cherche à prouver que ce mélange de lumière n'aura plus lieu, au moins d'une manière sensible, lorsqu'on observera la courbe crépusculaire avant qu'elle se couche, et quand elle est encore à quelques degrés de hauteur au-dessus de l'horizon occidental. A l'appui de cette remarque, il rapporte une série d'observations faites ainsi par lui-même, à Augsbourg, le soir du 19 novembre 1759; et, en attribuant les nombres observés à la limite géométrique du premier espace crépusculaire, il trouve pour la hauteur des dernières particules d'air réfléchissantes, 29115 mètres; ce qui est presque la moyenne entre les deux premières évaluations déduites tout à l'heure des observations de Lacaille. Or, en effet, d'après les calculs de Lambert, la courbe crépusculaire, lorsqu'elle se couche, appartiendrait à peu près à la zone moyenne du second espace crépusculaire, non à la limite du premier. J'ai vérifié l'exactitude de ses calculs, après les avoir réduits en formules générales qui font nettement reconnaître la nature, ainsi que l'influence, des divers éléments physiques sur lesquels il les a fondés. J'ai cru bien faire d'insérer ces formules en note, à la fin de mon Mémoire, parce que l'exposition de Lambert est assez obscure, et que son livre, aujourd'hui très-rare, est accompagné de figures dont les lettres ne sont pas toujours exactement placées comme le texte l'exige, ce qui augmente la difficulté d'en bien comprendre le sens.

Ces résultats, déjà bien remarquables sans doute, si on les compare aux idées exagérées qu'on avait sur la hauteur de l'atmosphère à l'époque où écrivait Lambert, il les appuie, je dirais volontiers il les confirme, par une considération dont l'emploi me paraît devoir être d'une grande importance, si on l'appliquait à des observations telles qu'on pourrait les faire aujourd'hui. C'est que la hauteur des couches d'air auxquelles appartient réellement la courbe crépusculaire, se manifeste dans le mouvement angulaire vertical de cette courbe, beaucoup plus sensiblement encore que dans les mesures absolues de sa hauteur, correspondantes aux diverses dépressions du soleil. Car, selon son calcul, si l'on adoptait la hauteur trop forte donnée par la première limite, la courbe crépusculaire, dans les saisons où sa march angulaire est la plus rapide, emploierait près d'une heure pour monter de l'horizon oriental jusqu'au zénith, tandis que ses observations lui donnent seulement 38′ 30″; et au contraire, il ne lui faudrait que 14′ pour parcourir la même phase, si on la supposait appartenir à la seconde limite de hauteur, qui est trop faible. De si grandes différences n'échapperaient certainement pas à des observations soigneusement faites et suivies pendant quelque temps. Or, comme la hauteur assignée ainsi aux couches aériennes réfléchissantes, serait évidemment plus faible que celle des dernières couches les plus rares, on aurait ainsi une limite inférieure de la hauteur de l'atmosphère, ce que l'on ne voit jusqu'ici aucun autre moyen d'obtenir.

Cette recherche pourra être admirablement secondée par les effets de polarisation qui s'opèrent dans les couches atmosphériques, en vertu de leur densité inégale, et de leur radiation réciproque, effets dont M. Arago a découvert l'existence et les conditions déterminatrices, qu'il a rapportées aux causes que je viens d'indiquer.

Pour en montrer l'application à l'étude des phénomènes crépusculaires, je considère avec lui le soleil, au moment où il vient de se coucher à l'horizon occidental. Si un observateur, placé à la surface terrestre, analyse alors la lumière envoyée à son œil par les molécules aériennes comprises dans le vertical de l'astre, il trouvera que, depuis l'horizon occidental, jusqu'à une petite hauteur apparente, cette lumière ne paraît pas sensiblement polarisée. Mais, à une hauteur plus grande, elle commence à offrir des caractères de polarisation dans le sens vertical. L'intensité de ces caractères s'accroît graduellement jusqu'à une certaine distance angulaire du soleil, après quoi elle diminue progressivement jusqu'à une certaine distance plus grande, où elle devient tout à fait insensible ; et, au delà de ce terme, elle recommence à croître jusqu'à l'horizon oriental. Mais alors la polarisation est dirigée suivant un sens rectangulaire au précédent, conséquemment horizontal, dans le cas que nous considérons. Or, M. Arago a découvert que, lorsqu'un rayon de lumière naturelle tombe sur un corps quelconque, la portion qui est renvoyée par radiation, dans tous les sens autour du point d'incidence, est toujours partiellement polarisée parallèlement à la surface du corps, comme si elle y eût pénétré à quelque profondeur, et qu'elle fût sortie en subissant une suite de réfractions à travers des couches parallèles. En appliquant ceci aux effets de polarisation atmosphérique, qu'on observe dans le vertical du soleil, on voit que, depuis cet astre jusqu'au point neutre, la polarisation a les caractères de la réflexion ; tandis qu'au delà elle a les caractères de la réfraction. C'est aussi l'énoncé donné par M. Arago.

Des phénomènes exactement pareils, et soumis aux mêmes lois de succession, doivent nécessairement avoir lieu dans tous les plans menés par les centres du soleil et de la terre. Mais il s'en produit aussi hors de ces plans, avec des lois de direction et d'intensité plus complexes, de sorte qu'ils deviennent ainsi visibles dans tous les azimuts, autour de chaque observateur. M. Arago a prouvé que ces derniers phénomènes, et sans doute aussi en partie les premiers, résultent des radiations et des réflexions réciproques opérées entre les molécules aériennes. Car, en observant, au moment du coucher du soleil, la lumière envoyée par une zone verticale d'air opposée à cet astre, et plongée dans l'ombre d'un édifice qui la privait de ses rayons directs, il y a encore reconnu les signes d'une polarisation perpendiculaire au plan vertical, laquelle ne pouvait évidemment appartenir qu'à la lumière jetée sur cette masse obscure d'air, par les parties latérales directement illuminées. Or, une pareille radiation doit s'exercer entre les particules d'air qui composent chaque espace crépusculaire éclairé directement ou secondairement; et elle doit aussi s'exercer de l'un à l'autre. Les effets de polarisation qui accompagnent ces radiations et ces réflexions réciproques, ne peuvent donc manquer d'y exister. Aussi les voit-on se manifester encore longtemps après le coucher du soleil, jusqu'à de grandes hauteurs apparentes, et à de grandes distances du vertical de cet astre, comme M. Arago l'a constaté, et comme je l'ai souvent vérifié moi-même, tant avec son appareil à images colorées, qu'avec l'appareil à réfractions croisées de M. Savart, qui indique les directions de polarisation si nettement et si facilement (1).

---

(1) Hier soir, 27 janvier 1839, le ciel étant serein, j'ai encore répété ces observations au coucher du soleil, sur la terrasse du Collége de France, avec l'appareil de M. Savart. Selon la *Connaissance des temps*, le coucher avait lieu pour Paris à $4^h47'$, t. m. Or, à $5^h,30'$ t. m., conséquemment $43'$ après la disparition du soleil, le contour entier de l'horizon présentait encore des signes évidents de polarisation, jusque dans l'azimut opposé à cet astre, où ils étaient les plus faibles, quoique encore bien sensibles. Les bandes colorées se voyaient jusque dans la masse d'air inférieure où Paris se trouvait plongé, et qui était bien certainement alors dans l'ombre de la terre, ce qui confirme l'observation de M. Arago. A $5^h30'$ je quittai, et je revins à $5^h45'$. Mais tout avait disparu, et je ne revis aucune trace de polarisation dans aucune partie du ciel.

Addition à la Note précédente.

A propos de cette disparition, M. Arago a dit que, d'après ses obser-

Ces phénomènes devront donc servir à caractériser les parties de l'atmosphère d'où les radiations émanent, quand leurs lois géométriques seront fixées par l'observation, et rattachées à leur mouvement angulaire central. Et peut-être, alors, y trouvera-t-on des signes propres à définir les limites des divers espaces crépusculaires, ainsi que le point réel de ces espaces auquel appartient la courbe lumineuse, dont on observe le mouvement angulaire et la disparition à l'horizon; ce qui permettrait d'en conclure avec sûreté une limite inférieure de l'élévation des couches par lesquelles cette courbe est réfléchie ou rayonnée vers l'œil.

Après avoir discuté les indications que l'on peut obtenir

---

vations, les lois habituelles et régulières du phénomène sont accidentellement troublées par l'intervention soudaine de nuages formés hors du plan de la vision, et généralement par des modifications survenues dans les couches lointaines, ce qui est en effet une conséquence de leur concours simultané pour déterminer le sens de la polarisation résultante qui s'observe. Il en conclut que de semblables causes ont pu faire disparaître le phénomène dans l'observation du 27 janvier. Or, ce qui prouve la justesse de cette remarque, c'est que le 28 et le 30, le ciel s'étant maintenu plus longtemps serein, j'ai vu les bandes polarisées encore subsistantes et très-sensibles, le 28, une heure entière, et le 30, $1^h 17'$ après le coucher du soleil, presque sur le contour entier de l'horizon. M. Arago m'a communiqué, en outre, et m'a autorisé à insérer ici, une donnée importante pour l'étude de ce phénomène. C'est que, selon des observations qu'il a faites, la présence de la neige, et en général l'état de la surface du sol, concourent par les radiations et les réflexions propres qui en proviennent, à la distribution des plans suivant lesquels la polarisation dominante en chaque point de l'atmosphère paraît dirigée. Aussi, dans les observations faites après le coucher du soleil, voit-on des bandes polarisées qui sont produites par la seule radiation des corps terrestres.

sur la hauteur de l'atmosphère par l'étude des phénomènes de réflexion qui s'y produisent, examinons celles que l'on pourrait déduire des réfractions qu'elle exerce, réfractions dont la quantité totale s'obtient, indépendamment de toute théorie, en comparant le lieu apparent des astres à leur lieu réel, calculé d'après la rotation constante et uniforme de la masse terrestre.

Remarquons d'abord que, pour cette recherche, les réfractions observées depuis le zénith jusque vers 74° de distance zénithale ne peuvent nous être d'aucun secours. Car, d'après le peu de force réfringente de l'air, et le peu de courbure des couches atmosphériques, la réfraction propre à chaque distance zénithale comprise entre ces limites, est sensiblement la même dans tous les modes de superposition que l'on peut attribuer aux couches réfringentes, au-dessus de l'inférieure dont la densité s'observe. De sorte que cette densité étant donnée, avec le poids total des couches supérieures qui est indiqué par le baromètre, la hauteur totale où elles peuvent s'étendre n'a aucune influence appréciable sur le résultat.

Les réfractions observées à de grandes distances du zénith sont donc les seules dans lesquelles la hauteur de l'atmosphère peut se faire sentir. Or, dès qu'on n'attribue pas à cette hauteur des valeurs qui seraient évidemment trop petites pour être admises, toutes les valeurs plus grandes n'ont encore qu'une influence très-faible sur ces réfractions. M. Ivory a démontré, par une analyse très-savante, qu'on peut concevoir une infinité de systèmes atmosphériques satisfaisant aux conditions inférieures de densité, de pression, et même au décroissement moyen de la température observé près de la surface terrestre, lesquels, avec des hauteurs successivement variées depuis 41000^{m} jusqu'à l'infini, ne donneraient entre ces extrêmes qu'une différence de 17″,2 sur la réfraction horizontale même. J'ai montré la cause physique de ce résultat, pour toutes les constitutions possibles de l'atmosphère, dans un Mémoire sur les Réfractions astronomiques, inséré aux Additions de la *Connaissance des temps* de 1839. Il tient à ce que, dans l'état habituel de l'atmosphère, les trajectoires lumineuses s'inclinent graduellement sur leur rayon vecteur à mesure qu'on les considère dans des couches plus hautes. De sorte qu'à une élévation peu considérable, la trajectoire même, qui arrive horizontale à la surface terrestre, se trouve assez oblique sur ce rayon pour qu'on puisse lui appliquer le mode d'approximation propre aux trajectoires voisines du zénith; et dès lors tout le reste de la réfraction, opéré par les couches supérieures, a toujours la même valeur entre des limites d'erreur insensibles, quels que soient la hauteur totale et le mode de superposition qu'on leur attribue. Donc, par inverse, cette hauteur totale n'est pas suffisamment empreinte dans les valeurs de la réfraction, même horizontale, qu'on observe; et ainsi on ne peut plus l'en inférer, ni même en déduire une évaluation qui la limite.

Enfin, à défaut de toute autre méthode pour déterminer cet élément, on a cherché à lui fixer au moins, pour valeur extrême, la distance du centre de la terre où la gravité égalerait la force centrifuge résultante du mouvement de rotation. Mais, pour les couches équatoriales mêmes où cette distance serait la plus petite, elle surpasserait encore cinq fois le rayon terrestre. Or, d'après toutes les indications physiques, ce résultat est si excessivement exagéré, qu'on n'en peut faire aucun usage, même comme limite d'évaluation.

SECONDE PARTIE.

Ayant exposé, dans ce qui précède, les diverses considérations sur lesquelles on s'est jusqu'ici appuyé pour avoir sinon une évaluation exacte, du moins une indication approximative de l'élévation à laquelle l'atmosphère terrestre peut s'étendre, je vais montrer qu'en combinant les observations météorologiques faites à de grandes hauteurs, avec les lois du décroissement de la chaleur en ligne verticale, on obtient une condition mathématique, qui en donne une limite supérieure; laquelle se trouve moindre que 46000^m quand on y introduit les éléments physiques jusqu'à présent observés.

La détermination d'une telle limite se déduit de ce fait, qu'à l'équateur, et sur le parallèle de Paris, seules régions de la terre pour lesquelles on possède des séries d'observations météorologiques faites sur de longues colonnes verticales d'air, dans des circonstances qui permettent de les ramener à la simultanéité, le décroissement des températures, dépouillé de ses irrégularités locales ou accidentelles, s'accélère à mesure que l'on s'éloigne de la surface terrestre. C'est-à-dire, que le nombre moyen de mètres dont il faut s'élever pour que le thermomètre baisse d'un degré, diminue à mesure que la hauteur devient plus grande.

Comme l'existence de cette accélération, quelle que soit sa loi, est la seule donnée physique dont j'aie besoin, je dois avant tout rapporter les preuves qui l'établissent.

Elle avait été remarquée par M. Gay-Lussac, sur la marche même des nombres rapportés de son voyage aérien, en négligeant leurs irrégularités accidentelles (1). Une discussion approfondie a prouvé la vérité de cet aperçu, en montrant que les seize plus hautes stations de M. Gay-Lussac donnent, entre les densités et les pressions, une relation exactement rectiligne (2). Car une telle relation ayant lieu, l'intervalle de hauteur qui correspond à une diminution de 1° dans la température, décroît constamment à mesure qu'on s'élève ; et si l'on faisait abstraction de la vapeur aqueuse, il serait, dans chaque couche aérienne, presque exactement proportionnel à la densité. Des observations faites par M. de Humboldt, dans son ascension au Chimboraço, étant calculées de la même manière, ont donné pareillement une relation rectiligne entre les pressions et les densités des plus hautes stations (3). Seulement l'inclinaison de la droite sur l'axe des pressions a été tant soit peu différente de celle de Paris, comme on pouvait l'attendre de la dissemblance des lieux et des circonstances physiques. Mais il en résulte toujours que le décroissement des températures s'accélerait avec la hauteur, et même un peu plus rapidement qu'à Paris. Quoiqu'il me parût bien difficile d'attribuer cette concordance à un hasard de nombres, j'ai cherché à la constater par de nouvelles preuves ; et M. Boussingault m'a fourni les moyens d'en présenter, qui la confirment encore.

Il m'a communiqué trois séries d'observations météorolo-

---

(1) *Annales de chimie*, tome LII, pages 84 et 85.

(2) *Mémoire sur la constitution de l'atmosphère*, inséré dans les *Additions à la Connaissance des temps de* 1841, page 23.

(3) *Ibid.*, page 97.

giques, faites dans ses ascensions sur le Chimboraço et sur l'Antisana, jusqu'à des hauteurs de 5,900 et de 5,400 mètres au-dessus du niveau de la mer Pacifique. La série du Chimboraço comprend huit stations élevées, commençant à la hauteur de 2,700 mètres ; les séries de l'Antisana en comprennent chacune neuf, commençant à 2,500 mètres : elles offrent donc de nombreuses épreuves pour déterminer la relation des densités aux pressions, à de grandes hauteurs. Comme les colonnes barométriques n'éprouvent presque, sous l'équateur, d'autres variations que celles qui dépendent de leur période diurne qui est habituellement régulière, on les a ramenées à la même heure du jour, par conséquent à la condition de simultanéité, en leur appliquant les valeurs locales de ces variations, déterminées expérimentalement aux diverses hauteurs par M. Boussingault lui-même ; et il a choisi pour cette époque commune neuf heures du matin, parce que c'est l'instant où la colonne barométrique diffère le moins de sa valeur moyenne pendant toute l'année. Toutes ces déterminations ont été prises avec beaucoup de soin et avec d'excellents instruments, qui avaient été réglés par comparaison immédiate sur ceux de l'Observatoire de Paris.

Mais elles sont surtout précieuses par une particularité qui leur est spéciale. On sait que M. Boussingault a remarqué, et a constaté par de nombreuses épreuves, que, sous l'équateur, on obtient la température moyenne annuelle de l'air dans chaque lieu donné, en tenant le thermomètre plongé pendant quelque temps dans un trou de sonde, percé à une petite profondeur en un point du sol habituellement abrité des rayons du soleil. Cette opération a été faite dans presque toutes les stations élevées des deux montagnes; de sorte que l'on a ainsi deux séries des températures moyennes de l'air, dépouillées des irrégularités accidentelles, et affectées seulement de celles qui peuvent dépendre de la petite influence constante des localités. Or, ceci donne deux grands avantages. Car, d'abord, en comparant les hauteurs absolues des stations, calculées par les températures moyennes et par les températures accidentelles, on doit les trouver égales si les éléments statiques qui les accompagnent ont été combinés exactement. Puis, les températures moyennes ayant été déterminées par contact, elles sont exemptes des incertitudes occasionnées, dans les indications du thermomètre libre, par l'influence inconnue que le rayonnement des corps qui l'entourent exerce sur lui. Ainsi, la comparaison des résultats obtenus par ces deux genres d'observations, peut, à défaut de méthode plus directe, montrer jusqu'à quel point les effets de cette influence sont à craindre pour la mesure barométrique des hauteurs; ce que l'on n'avait pas encore pu faire. J'ai effectué cette comparaison avec les plus grands soins, et les derniers détails, sur les séries de l'Antisana, où elle pouvait être complète dans toutes les stations élevées. Mais, pour l'ascension du Chimboraço, je n'ai employé que la série des températures moyennes, parce que, au moment où M. Boussingault atteignit le sommet de cette montagne, le soleil échauffait avec une telle force l'étroit espace où il pouvait se tenir, que la température locale de l'air s'y trouvait ainsi élevée accidentellement à 7°, 8 audessus de zéro; ce qui était non-seulement bien plus que le terme régulier où elle aurait dû être, mais beaucoup plus qu'il n'avait lui-même obtenu 300 mètres plus bas. Le calcul d'une série compliquée de pareils accidents m'a paru inutile pour la recherche de précision que j'avais en vue. Et même, dans la série des températures moyennes du Chimboraço, j'ai dû déterminer celle de la dernière station par la loi de continuité déduite des stations inférieures. Car les circonstances d'échauffement accidentel que je viens d'indiquer y avaient mis la neige en fusion, de manière que la détermination par le sondage était impossible. Mais les huit stations élevées de l'Antisana, où les deux séries des températures, moyenne et accidentelle, ont été complètes, suffisent pour établir en toute assurance l'utile comparaison que je viens d'indiquer. Et l'accord singulier de leurs résultats, pour toutes ces stations, montre que l'influence du rayonnement sur le thermomètre libre est beaucoup plus faible qu'on n'aurait pu le craindre, du moins en l'appréciant par ses conséquences sur la mesure barométrique des hauteurs. Car, on ne trouve pour ces huit stations, entre les deux séries, qu'une différence commune d'élévation de 10 à 12 mètres, laquelle dépend du raccordement de la plus basse d'entre elles avec le niveau de la mer Pacifique; raccordement pour lequel on n'a pas d'observations intermédiaires; de sorte qu'il faut l'effectuer par une parabole qui, partant de la densité inférieure, se rattache aux stations supérieures par les conditions de continuité que j'ai employées pour les observations de M. de Humboldt. Or, qu'un tel mode de connexion, établi entre les conditions statiques de l'air pour un si grand intervalle, donne seulement une différence absolue de hauteur de 10 à 12 mètres, quand on le conclut de données si dissemblables, c'est, je crois, ce que l'on aurait difficilement espéré; et ce point franchi, la différence ultérieure entre les hauteurs relatives des stations calculées par les deux séries, moyenne ou accidentelle, est absolument insensible.

Mais un pareil accord ne s'obtient qu'en employant, avec la plus minutieuse exactitude, toutes les corrections physiques, qui établissent complétement l'état statique de l'air, dans les diverses parties de la colonne dont on veut mesurer la hauteur par le poids. Il faut donc, pour justifier la confiance qu'il me semble que ces résultats méritent, que j'explique comme je les ai calculés.

La méthode est la même dont j'ai fait usage, dans mon Mémoire sur la constitution de l'atmosphère, pour calculer les observations de M. Gay-Lussac et de M. de Humboldt. Ayant d'abord réduit les colonnes barométriques à la température commune de la glace fondante, je les ramène toutes à la gravité inférieure, en calculant la correction que chacune nécessite, d'après l'élévation relative de la station, conclue approximativement de la formule barométrique ordinaire. En divisant toutes ces colonnes ainsi réduites, par la colonne inférieure, j'obtiens les pressions successives, en parties de la pression inférieure prise pour unité.

Je cherche ensuite les densités correspondantes à ces pressions. Cela exige l'emploi des températures observées de l'air. Mais, si on les introduisait affectées de leurs irrégularités accidentelles, il faudrait, pour en déduire des lois régulières, refaire plus tard un second calcul, d'après la moyenne des résultats immédiats que l'on obtiendrait. Pour éviter ce détour, ou plutôt pour l'abréger, je construis d'abord graphiquement les températures observées, en prenant les pressions pour abscisses; et à travers les points qu'elles donnent, je fais passer une courbe continue, qui en égalise approximativement les écarts. J'ai ainsi une série de températures régularisées, qui ne doit jamais indiquer que de très-petites corrections, si la série observée est elle-même assez peu accidentée pour qu'on puisse l'appliquer utilement à une recherche aussi délicate que celle que nous avons en vue. Ces températures rectifiées me servent pour calculer les densités, qui s'obtiennent ainsi, du premier coup, plus régulières qu'avec les valeurs brutes. Néanmoins l'influence des petites corrections introduites y est toujours très-faible, parce que les températures n'entrent dans l'expression des densités, qu'affectées du coefficient de la dilatation des gaz, qui est lui-même une très-petite fraction égale seulement à $\frac{3}{800}$. Enfin, ceci n'est qu'une préparation pour arriver plus tard à une comparaison rigoureuse des températures définitivement calculées avec les températures observées immédiatement, afin de juger si les premières reproduisent celles-ci avec une suffisante fidélité, dans les limites d'écarts que de pareilles observations comportent; de sorte qu'il ne reste réellement rien dans les résultats de la rectification préparatoire qu'on leur a fait subir.

Mais le calcul exact des densités ne peut se faire sans connaître la tension actuelle de la vapeur aqueuse dans les diverses stations; et malheureusement l'hygromètre qui les indiquerait y est rarement observé. Alors, pour introduire au moins une évaluation moyenne de cet élément, j'emploie la loi approximative de décroissement des tensions que j'ai déduite des observations de M. Gay-Lussac, et qui, partant de la tension actuellement existante dans la couche inférieure, affaiblit graduellement la quantité de vapeur à mesure que la hauteur augmente, de manière à la rendre insensible dans les couches d'air, où la pression serait réduite à 0,38, l'inférieure étant 1 ; ce qui dépasse notablement la plus grande hauteur à laquelle M. Gay-Lussac est parvenu. Pour appliquer ceci aux régions équatoriales, il faut remarquer que l'action calorifique constante du soleil y fait continuellement surgir, de la surface de la terre et des mers, un courant d'air ascendant, lequel supprime le principal obstacle qui s'oppose à la diffusion de la vapeur aqueuse. J'admets donc qu'à la surface des mers de ces régions, la tension a toute la valeur que comporte la température de l'air, laquelle est évaluée par M. Boussingault à 26° cent., au niveau de la mer Pacifique, à Guayaquil, base inférieure de toutes ses stations. Cela donne cette tension égale à $24^{\text{mm}},888$ de mercure à 0°; et ensuite, par le mode supposé de décroissement, on peut calculer la valeur de cet élément, dans toutes les stations supérieures, dont la hauteur est assez approximativement connue par la formule barométrique ordinaire pour servir à cette application. Le calcul des densités peut alors s'effectuer exactement ; et comme la correction dépendante de la présence de la vapeur y est toujours extrêmement faible, tout porte à croire que les valeurs décroissantes des tensions, sur lesquelles on la calcule, sont, en moyenne, très-suffisamment exactes pour l'usage qu'on en fait.

Les densités ainsi obtenues sont rapportées à la densité inférieure, comme à leur unité propre, de même qu'on l'a fait pour les pressions. On a donc les valeurs coexistantes de ces deux éléments dans tous les points de la colonne aérienne où les stations ont été établies.

Lorsque je calculai, pour la première fois, les résultats de l'ascension de M. Gay-Lussac, je déterminai d'abord les pressions et les densités pour tous les points d'observation, comme je viens de le dire; puis, voulant connaître leurs relations véritables, indépendamment des hypothèses par lesquelles on avait cherché à les lier jusqu'alors, j'en construisis une représentation graphique, en prenant les pressions pour abscisses, et les densités pour ordonnées. La forme presque rectiligne du lieu qui les unissait se manifesta alors avec une entière évidence; et, pour les seize stations supérieures surtout, elle était si exacte, que, malgré la grandeur de l'échelle dont je m'étais servi, on ne pouvait y apercevoir aucune courbure sensible. Le calcul numérique établi sur cette indication la confirma bientôt avec une complète rigueur; et, pour la première fois, on put affirmer que, dans cette grande expérience du moins, la relation finale des densités aux pressions était rectiligne. De là, par une déduction physique rigoureuse, il résultait que le décroissement des températures allait en s'accélérant avec la hauteur, suivant une progression assignable, dont les termes approchaient d'autant plus d'être proportionnels aux densités que la quantité de vapeur mêlée à l'air devenait moindre. Car l'intervention statique de cet élément influe sur l'expression exacte du décroissement réel des températures; et celui-ci s'apprécierait mal, si l'on en faisait abstraction.

En appliquant plus tard le même mode de calcul et de discussion, aux observations faites par M. de Humboldt dans son ascension au Chimboraço, la relation des pressions aux densités se trouva pareillement rectiligne pour toutes les stations élevées. Seulement l'inclinaison de la droite finale sur l'axe des pressions était tant soit peu plus grande qu'à Paris, ce qui indiquait un décroissement des températures un peu plus rapide. Du reste, pour cette ascension, comme pour celle de

M. Gay-Lussac, les résultats déduits du lieu rectiligne n'avaient, avec les observations, que des différences si petites, et variées avec tant d'irrégularité dans leurs signes, qu'il n'y avait pas de motifs suffisants pour préférer les uns aux autres. C'est là l'épreuve définitive qui permet de substituer les relations continues du calcul aux accidents des observations; et je l'ai appliquée plus minutieusement encore aux trois séries de M. Boussingault.

Elles m'ont toutes trois donné pareillement un lieu rectiligne, pour la relation des densités aux pressions, dans toutes les stations élevées au-dessus du plateau des Andes; et cela a eu lieu avec les températures moyennes, comme avec les températures accidentelles. L'inclinaison des droites sur l'axe des pressions s'est seulement trouvée tant soit peu différente dans les trois séries, en se rapprochant toutefois beaucoup de celle de M. de Humboldt, et s'accordant ainsi avec elle pour indiquer un décroissement final des températures un peu plus accéléré que dans l'ascension de Paris. Cette accélération, à de grandes hauteurs, se trouve donc indiquée de nouveau par ces observations, tout à fait indépendamment de celles qui l'avaient fait d'abord reconnaître. Ainsi, je crois pouvoir l'admettre comme constatée. Mais ceci l'établit seulement jusqu'aux plus grandes hauteurs que ces hardis observateurs ont pu atteindre, et qu'il n'y a guère d'espérance de voir dépasser.

Sans doute le principe de la diffusion des gaz ne permet pas de croire que la relation alors observée s'arrête brusquement au terme où ils sont parvenus, et elle doit se prolonger beaucoup plus haut. Toutefois, on n'oserait étendre indéfiniment cette analogie; et ainsi il nous reste à chercher si les théories physiques ne pourraient pas nous en fournir quelque indice ultérieur.

Dans une addition à son ouvrage sur la *Théorie de la chaleur*, M. Poisson a considéré le décroissement des températures, dans une atmosphère sphérique en équilibre, où la chaleur se propagerait uniquement par communication immédiate, en faisant abstraction du rayonnement propre des particules aériennes, et de leur faculté absorbante; deux circonstances qui, sans doute, contribuent à l'état réel de notre atmosphère, mais dont les influences sur les températures résultantes sont de sens opposé. Le problème limité ainsi, étant appliqué à une atmosphère très-mince relativement au rayon de la sphère qu'elle recouvre, donne, pour la propagation de la chaleur en ligne verticale, les mêmes conditions que dans une barre rectiligne, douée d'une conductibilité variable en ses différents points, lesquels ici répondent aux diverses hauteurs; et la rapidité du décroissement des températures dépend de la valeur que l'on attribue au facteur qui exprime la conductibilité en fonction de la densité. En considérant que ce facteur résulte ici d'une action de masse à masse, puisque la chaleur y est supposée transmise par communication immédiate entre les couches aériennes contiguës, M. Poisson, qui voulait seulement donner un exemple fictif de ce genre de calcul, l'a fait proportionnel au carré de la densité. Mais, sans lui assigner ainsi une forme particulière, on peut du moins, d'après le mode d'action réciproque dont il dérive, admettre généralement qu'il croît avec la densité, et décroît avec elle; car, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que l'intervention additionnelle du rayonnement réciproque et de l'absorption fût capable d'intervertir absolument cette relation, ce que la nature et l'opposition des deux causes négligées rend peu supposable; l'expérience prouvant d'ailleurs que cette inversion n'a pas lieu dans les portions accessibles de l'atmosphère. Or, ce coefficient devant ainsi croître avec la densité, il en résulte aussitôt que le décroissement vertical des températures s'accélère généralement à mesure que la hauteur augmente, comme nous observons que cela arrive dans les couches accessibles de l'atmosphère, ce qui n'exclut pas qu'il puisse être modifié dans ses valeurs numériques suivant des lois ultérieures que nous ignorons.

Heureusement la connaissance de ces lois n'est pas nécessaire pour la recherche qui nous occupe. Le fait seul de la persistance de l'accélération y suffit. En l'admettant, je prends l'atmosphère terrestre au point où s'est élevé M. Gay-Lussac, et je considère toutes les couches supérieures comme étant sensiblement exemptes de vapeur aqueuse; ce qui est en effet leur condition réelle, que nécessiterait le seul abaissement de leur température. Alors, à tout ce reste, depuis la couche supérieure de M. Gay-Lussac, je substitue idéalement une atmosphère fictive, ayant à cette hauteur la même densité, la même pression, le même degré de chaleur et le même décroissement local de température que l'atmosphère véritable, mais assujettie ultérieurement à la condition mathématique que le décroissement s'y maintienne ensuite constant, et tel que M. Gay-Lussac l'a observé. Une telle condition, jointe aux lois de l'équilibre, la définit complétement; et, d'après les éléments physiques de la couche où elle commence, sa hauteur totale, jointe à celle de cette couche, serait de 47346^{m},5 au-dessus du niveau des mers.

Ceci est un résultat certain de calcul. Maintenant, comparant cette atmosphère fictive douée d'un décroissement constant de températures, avec le reste de l'atmosphère réelle où ce décroissement doit continuer à s'accélérer, je prouve par des théorèmes démontrés dans mon Mémoire sur la constitution de l'atmosphère, que la hauteur totale de celle-ci doit être nécessairement inférieure à celle de l'atmosphère fictive, c'est-à-dire à $47346^{m},5$; parce que, pour qu'il en fût autrement, il faudrait que, dans la portion de l'atmosphère réelle, supérieure à la dernière station de M. Gay-Lussac, il existât des décroissements de température plus lents que celui qu'il a observé à cette station, ce qui serait contraire à la condition d'un décroissement ultérieurement accéléré. Le même calcul appliqué aux séries d'observations faites à l'équateur, par MM. de Humbolt et Boussingault, donne des limites d'élévation encore plus restreintes, parce que le décroissement des températures qu'elles indiquent, pour de grandes hauteurs, est sensiblement plus rapide qu'à Paris. Toutes ces séries donnent des limites plus basses que 43000^{m}. L'objet de la détermination n'étant pas une quantité absolue, on conçoit que des éléments différents doivent fournir différentes approximations.

Je dois même faire remarquer que le mode de démonstration dont j'ai fait usage est peut-être plus exactement applicable aux régions équatoriales qu'il ne le serait à de hautes latitudes. En effet, puisqu'on y considère les colonnes verticales comme étant en équilibre, et l'atmosphère locale comme constituée sphériquement, cela exclut implicitement l'intervention de causes lointaines, qui agiraient sur le haut de l'atmosphère, en y versant de nouvelles couches d'air, dont le poids et la température propre modifieraient l'état d'équilibre des couches inférieures, et altéreraient les températures résultantes de leur seule communication. Or des phénomènes de ce genre ont certainement lieu dans l'atmosphère terrestre, par le déversement continuel du courant ascendant équatorial vers les deux pôles. Qu'un tel courant supérieur existe, on n'en peut douter. Il transporte quelquefois sur l'île de la Barbade des cendres du volcan de Saint-Vincent, contrairement à la direction énergique et constante de l'alizé inférieur. On le retrouve sur le sommet du pic de Ténériffe soufflant constamment du sud-ouest, et descendu ainsi déjà près de la surface terrestre. Il se fait sentir à cette surface même, sur le parallèle de l'Angleterre, par la prédominance des vents d'ouest, laquelle y est tellement marquée que, d'après un relevé des passages faits en six ans par les paquebots à voiles, employés à un service régulier de communication mensuelle entre Liverpool et New-York, la durée moyenne du voyage d'Europe en Amérique en allant vers l'est, a été trouvée de quarante-trois jours, tandis que le retour moyen d'Amérique en Europe, de l'ouest vers l'est, est seulement de vingt-trois. L'accès de cet air équatorial serait peut-être encore plus sensible dans les régions voisines des pôles terrestres, si on cherchait à l'y observer; et, quoiqu'il ait dû considérablement se refroidir en se dilatant dans son ascension vers les sommités de l'atmosphère, il pourrait se faire qu'en descendant sur les contrées glaciales il y apportât des couches plus chaudes que ne le comporterait leur température propre, et que les indications du thermomètre sur les divers points d'une même verticale s'y ressentissent habituellement de cette opposition. Or, des phénomènes tout pareils à ceux-là ont été en effet observés, cette année même, dans la station de Bossekop, près du cap Nord, comme je le vois dans une lettre de M. Bravais, où, en m'adressant une série de mesures barométriques, faites en neuf points d'une même verticale, avec les conditions nécessaires pour les ramener à la simultanéité, il remarque l'existence habituelle d'une brise inférieure froide venant du sud-est, et d'un courant supérieur chaud venant de l'ouest, lequel, par l'excès de sa température, réchauffe constamment de haut en bas la couche qui repose sur le sol; de sorte que celle-ci étant, par exemple, le 19 mars dernier, à 14° au-dessous de zéro, on trouve d'abord, en s'élevant au-dessus d'elle, la température croissante jusqu'à la hauteur où le courant supérieur règne; après quoi, en s'élevant davantage, elle recommence à décroître très-lentement. L'accélération du décroissement qui a été constatée, à l'équateur et sur le parallèle de Paris, n'est donc pas encore jusqu'ici prouvée expérimentalement pour ces hautes latitudes; et ainsi l'on ne pourrait pas y employer le mode de raisonnement dont j'ai fait usage. Mais son application aux régions équatoriales est exempte de cette difficulté, puisque l'existence même du courant ascendant exclut tout accès latéral d'air étranger dans les couches supérieures; et ainsi l'accélération qu'on y observe dans le décroissement des températures à mesure qu'on s'élève, ne peut pas en être troublée. On voit, par la discussion précédente, que, pour pousser plus loin les recherches sur la constitution, même moyenne, de notre atmosphère, il devient nécessaire d'avoir égard à ce double courant inférieur et supérieur qui en mêle continuellement toutes les parties dans le sens des méridiens; et ainsi il ne suffit plus de la considérer comme étant dans l'état d'équilibre, mais comme soumise à un mouvement perpétuel de fluctuation, produit par l'action calorifique du soleil combinée avec la vitesse de rotation diurne. Mais le problème ainsi envisagé, avec toute sa complication réelle, offre des difficultés mathématiques et physiques si considérables, qu'il ne sera peut-être pas abordé d'ici à longtemps.

Avant de passer aux démonstrations analytiques sur lesquelles je me suis appuyé dans ce qui précède, j'ajouterai quelques indications sur les tableaux qui accompagnent ce mémoire, et sur le but qu'on s'est proposé en les formant.

Les observations barométriques pour être complètes doivent déterminer trois éléments physiques, la pression, la température, et la tension actuelle de la vapeur aqueuse. Ces trois données sont indispensables pour pouvoir calculer la densité actuelle de l'air dans chaque station. Lorsque l'on veut déterminer la longueur d'une colonne verticale d'air, d'après son poids, en quoi consiste le problème de la mesure des hauteurs par le baromètre, il faut l'avoir étudiée ainsi en un assez grand nombre de points, pour connaître la relation des pressions aux densités dans ses diverses parties, afin de savoir comment le poids total est réparti entre elles. Ces déterminations sont sujettes à plusieurs causes d'incertitude dont il est essentiel de discuter l'influence.

La mesure de la colonne de mercure pour être exacte doit être corrigée de l'effet de la capillarité, soit d'après la comparaison immédiate avec un baromètre étalon exempt de cet effet, soit par un calcul fondé sur les dimensions du ménisque qui termine chacune de ses extrémités. On a, aujourd'hui, égard à cette correction au moyen de tables numériques déduites de la théorie capillaire. Comme elle est constante pour chaque baromètre, tant que son tube et sa cuvette ne changent pas, les plus courtes colonnes en sont proportionnellement les plus affectées; de sorte que si on l'omettait, le rapport réel des pressions ne serait plus exprimé par le rapport de longueur des colonnes observées, même en supposant celles-ci réduites à une même température et à une même intensité de la gravité, comme on doit le faire toujours.

La réduction à une même température se calcule d'après la température propre de chaque colonne, indiquée par un petit thermomètre enchâssé dans l'enveloppe métallique du tube où le mercure est contenu. Mais ce fluide n'est sans doute affecté comme le thermomètre qu'après un séjour commun, plus ou moins prolongé, dans l'air qui les environne. Il faudrait connaître le temps nécessaire pour que cette communauté de température soit complète; et dans les voyages sur les montagnes, surtout dans les ascensions aérostatiques, on n'a pas toujours la possibilité d'attendre qu'elle soit rigoureusement établie.

La mesure de la température propre de l'air est encore plus incertaine. On la détermine par les indications d'un thermomètre très-sensible que l'on suspend dans l'air, à l'abri des rayons solaires directs, et de leur réflexion spéculaire par les corps qui en sont fortement illuminés. Mais, malgré ces précautions, le thermomètre est inévitablement exposé au rayonnement de tous les objets matériels qui l'environnent, et dont la température propre peut, doit même être en général, actuellement différente de celle de l'air ambiant. L'influence de ce rayonnement l'affectera surtout si l'air est calme; et aussi, est-il très-utile pour l'atténuer, de faire tourner rapidement le thermomètre par un mouvement de fronde, pour multiplier le contact des particules d'air sur sa boule, jusqu'à ce qu'il arrive à un degré fixe que l'on observe, comme devant se rapprocher davantage de la température propre de ces particules. Cette opération appliquée à des thermomètres fort sensibles, peut donner, même dans un air libre, des différences de plus d'un degré. Il serait donc à désirer qu'elle ne fût jamais omise. Il est essentiel aussi de constater souvent les points extrêmes de la division, qui sont sujets à se déplacer, dans les alternatives d'expansion et de contraction que le verre éprouve, et après lesquelles la boule du thermomètre ne revient pas instantanément aux mêmes dimensions de capacité.

La tension actuelle de la vapeur aqueuse se détermine par l'hygromètre à cheveu de Saussure, ou par le degré de refroidissement que l'évaporation imprime à un thermomètre mouillé. Le premier de ces instruments est difficile à conserver en parfait état, dans de longs voyages, où il est souvent exposé à des mouvements trop brusques pour sa délicatesse; et d'ailleurs on n'a pas jusqu'ici de tables numériques, ni même d'expériences physiques, d'après lesquelles on puisse conclure avec rigueur, pour toutes les températures, la tension actuelle de la vapeur aqueuse correspondante aux degrés de sa division. L'emploi du thermomètre mouillé, suggéré par Leslie, étudié par M. Gay-Lussac au moyen d'expériences directes (1), a été, en Angleterre et en Allemagne, l'objet de

---

(1) *Annales de chimie et de physique*, tome XXI, page 82. Voyez aussi les recherches du même savant sur l'hygromètre à cheveu, insérées dans mon *Traité de physique*, tome II, page 199.

beaucoup de recherches, d'après lesquelles on a calculé des tables numériques exprimant les rapports de la tension actuelle avec le degré de refroidissement observé. Les auteurs de ces derniers travaux ont dû sans doute prendre de grands soins pour déduire avec sûreté ces rapports d'un phénomène aussi complexe que l'évaporation dans une masse d'air calme ou agitée; mais n'ayant pas eu l'occasion d'éprouver par moi-même les résultats de cette méthode indirecte, je ne puis apprécier la certitude de son application aux cas si variés que les circonstances atmosphériques présentent.

En supposant toutes les déterminations précédentes obtenues avec exactitude, pour divers points d'une colonne verticale d'air, il faut en déduire sa constitution physique et statique, avec assez de continuité pour pouvoir la définir dans toutes ses parties, sinon rigoureusement, du moins avec une approximation suffisante au but qu'on peut se proposer. Si ce but est seulement de calculer la longueur totale de la colonne, l'approximation la plus naturelle consistera à supposer la relation des pressions aux densités, rectiligne entre chaque couple de stations consécutives, et d'en conclure les différences successives de leurs hauteurs, depuis la base de la colonne jusqu'à son sommet. Toutefois on n'aura ainsi que les résultats bruts des éléments observés, affectés de toutes les erreurs d'observation, et des perturbations accidentelles qui peuvent avoir existé dans les couches aériennes, aux instants où l'on observait. De telles perturbations, par exemple, pourront avoir été produites par l'irruption d'une couche d'air, relativement chaude ou froide, que le caprice des vents transportait horizontalement à une certaine élévation; ou par un courant oblique, soit ascendant, soit descendant, excité le long des flancs d'une montagne. Il faudra bien, sans doute, prendre cette circonstance telle qu'elle existe, et employer les éléments accidentels qu'elle donne, pour obtenir le poids réel de l'épaisseur d'air où elle a lieu, quoique les conditions d'équilibre qui servent à calculer cette épaisseur d'après le poids, ne se trouvent pas alors satisfaites; car on ne sait pas les suppléer. Mais si l'on cherche à connaître l'état régulier de superposition des couches aériennes, ce que j'ai eu surtout en vue dans ce mémoire, il faudra bien, pour l'obtenir, corriger ces accidents aussi approximativement qu'on peut le faire, par la condition de continuité qui caractérise un état de stratification permanent. C'est ce que j'ai voulu réaliser sur les observations de M. Boussingault, en cherchant pour chaque colonne aérienne, une relation des densités aux pressions, qui, avec une continuité mathématique, reproduisît pour les diverses pressions observées, une suite de températures, autour desquelles les températures observées oscillassent, avec de très-petits écarts de signes contraires, sans aucune continuité marquée, et qui, en somme, se compensassent aussi approximativement que possible. Ce résultat a été obtenu dans les trois tableaux joints à ce Mémoire, en appliquant aux stations élevées de chaque série, la relation rectiligne des densités aux pressions, qui liait si exactement les seize stations supérieures de M. Gay-Lussac, lesquelles étant prises dans une masse d'air tout à fait libre, avec une exactitude d'observation inimitable, devaient naturellement être, moins que toutes autres, affectées d'erreurs ou de perturbations accidentelles. Les températures rigoureusement déduites du lieu rectiligne pour les trois séries de M. Boussingault, étant comparées comme je l'ai fait aux températures réellement observées, offrent, toujours avec celles-ci, des différences non-seulement irrégulières dans leurs signes, et assez petites pour pouvoir être légitimement attribuées aux accidents de localité et d'observation, mais encore le signe de plusieurs d'entre elles, et des plus sensibles, est parfaitement explicable par les circonstances physiques ou géologiques des stations auxquelles elles se rapportent. Je dois faire remarquer à ce sujet que les observations faites sur le sommet glacé de l'Antisana, pour lesquelles l'écart du lieu rectiligne est un peu plus notable que pour toutes les autres, n'ont pas été employées dans sa détermination à cause des circonstances spéciales qui les affectaient. Car d'abord, pour la série de l'air libre, il tombait au moment de l'observation une neige excessivement fine, dont la formation a pu développer un excès accidentel de chaleur qui rend la température observée suspecte; et en effet, la loi de continuité déduite des stations inférieures, l'indique comme étant de 2°, 3 trop élevée pour la pression. La température moyenne, déterminée au même sommet, n'a pas été employée non plus dans la détermination du lieu rectiligne de la série où elle est comprise. D'abord, parce que le sommet d'une montagne intertropicale est, en général, relativement plus échauffé par le soleil que ses flancs, ce qui doit l'écarter en excès de la loi de continuité que ceux-ci indiquent. Secondement, la calotte de glace dans laquelle l'observation a été faite, doit, à cause de la neige permanente qui la recouvre, être intérieurement préservée du rayonnement nocturne, plus que les flancs nus des rocs, ce qui peut lui donner une température relativement moins froide que ne le comporte son élévation. Troisièmement, le sondage de la masse de glace a été opéré par le travail d'un outil de fer qui, porté jusque-là par le voyageur, avait vraisemblablement une température propre analogue à celle du baromètre, laquelle était de 7°, 8; et tant par cette cause que par le travail du forage, la température intérieure du trou dans lequel on a plongé le thermomètre, a pu recevoir quelque addition étrangère de température. Quatrièmement enfin, l'air extérieur lui-même, qui était seulement à 0°, a pu s'insinuer aussi, plus ou moins, dans les insterstices des morceaux de glace par lesquels le trou a été rempli, et prévenir son abaissement complet de température. Toutes ces causes étant de nature à agir dans le même sens, m'ont paru devoir soustraire cette observation à la loi de continuité commune aux stations inférieures, et je ne l'ai pas fait concourir à la détermination du lieu rectiligne qui liait leurs résultats. Aussi la continuation de ce lieu jusqu'au sommet du glacier a-t-elle indiqué pour la pression observée une température de 3° plus basse que celle qui avait été obtenue par le sondage. Mais elle est la seule, dans les trois tableaux, qui s'écarte assez du calcul pour m'avoir paru nécessiter une explication.

Dans un autre Mémoire, je considérerai le décroissement accéléré des températures dans les hautes régions de l'atmosphère, comme un élément qu'il faut faire intervenir dans le calcul des réfractions astronomiques, et j'examinerai jusqu'à quel point les tables jusqu'à présent usitées y sont conformes. Je m'estimerai heureux si ces nouvelles applications des observations météorologiques faites à de grandes hauteurs, peuvent engager les physiciens et les voyageurs à les multiplier en différentes saisons et sous différents climats, avec les conditions de précision et de continuité nécessaires pour qu'on puisse les faire servir à de semblables déterminations. Je passe maintenant aux preuves mathématiques des divers résultats énoncés plus haut.

Concevons une sphère solide d'un rayon r_1, recouverte d'une atmosphère gazeuse pareillement sphérique, et considérons la propagation de la chaleur, dans cette atmosphère, comme opérée seulement par échange entre les particules situées à de très-petites distances les unes des autres. Ce sera un cas particulier du problème que M. Poisson a traité généralement, dans le XIX^e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, pour un corps de constitution et de figure quelconques, dont les particules sont en repos ou en mouvement. Ainsi, la propagation progressive de la chaleur dans la masse gazeuse, et sa distribution définitive lorsqu'elle sera parvenue à un état constant, s'obtiendront en limitant convenablement l'équation générale que M. Poisson a nommée (b) dans le § 49 de son Mémoire. Ne considérons ici que l'état final de cette masse; et, pour plus de simplicité, supposons que la variation de température, dans le sens perpendiculaire aux rayons, soit alors insensible, ou négligeable, comparativement à la variation suivant les rayons mêmes. Celle-ci nous représentera la distribution finale des températures dans une colonne verticale de l'atmosphère terrestre, en y faisant abstraction de l'influence qui peut être exercée par le rayonnement des particules, à de grandes distances, et par la faculté absorbante de celles qui reçoivent ce rayonnement. Soit r le rayon d'une couche quelconque de cette colonne, t sa température, k la conductibilité à la distance r du centre, l'équation générale (b) limitée à ces circonstances spéciales, donnera pour condition de l'état final

$$\frac{d\left\{kr^2\frac{dt}{dr}\right\}}{dr}=0,$$

d'où, en intégrant,

$$kr^2 \frac{dt}{dr} + c = 0,$$

c étant une constante arbitraire.

Introduisons au lieu de r une nouvelle variable s, telle qu'on ait généralement

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s,$$

r_1 étant le rayon du sphéroïde solide, comme nous l'avons dit plus haut : on tirera de là

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r_1}{r^2},$$

par conséquent,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dr} = \frac{r_1}{r^2} \frac{dt}{ds}.$$

Si l'on élimine $\frac{dt}{dr}$, par cette expression, l'équation qui règle la distribution finale des températures deviendra

$$k \frac{dt}{ds} + \frac{c}{r_1} = 0.$$

Lorsque le rayon r_1 de la sphère solide est supposé très-grand par rapport à l'épaisseur de l'enveloppe gazeuse, comme cela a lieu dans l'atmosphère terrestre, la hauteur d'une quelconque de ces couches au-dessus de la surface solide, devient à très-peu près égale à $r_1 s$; et si on la désigne par z, on aura, dans cet ordre d'approximation,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dz} \frac{dz}{ds} = r_1 \frac{dt}{dz},$$

par conséquent,

$$k\frac{dt}{dz}+\frac{c}{r_1^2}=0.$$

Ceci est l'équation que M. Poisson a nommée (3) dans l'addition à son *Traité mathématique de la chaleur,* page 64, à cela près que la constante arbitraire se présente sous une forme différente.

En appliquant cette équation aux couches atmosphériques qui ne sont pas très-voisines de la surface terrestre, la constante c doit avoir une valeur négative, puisque t y diminue généralement lorsque r ou s augmente. En outre, par les observations de MM. Gay-Lussac, Humboldt et Boussingault, nous voyons que, sur les parallèles où ces observations ont été faites, dès qu'on s'éloigne assez de la surface terrestre pour échapper aux influences immédiates de son état local, le coefficient k croît et décroît avec la densité ρ, puisque $\frac{dt}{dr}$ et $\frac{dt}{ds}$ augmentent à mesure qu'on s'élève. Même, lorsqu'on a atteint la hauteur où la relation des pressions aux densités commence à être rectiligne, la valeur de k s'approche de plus en plus d'être proportionnelle à ρ, et devient exactement telle lorsque la tension de la vapeur aqueuse peut être considérée comme insensible. Car, dans ces circonstances, $\left(\frac{dt}{ds}\right)$ se trouve inverse de ρ par l'observation; et il reste tel aussi longtemps que la droite se prolonge, c'est-à-dire jusqu'aux plus grandes hauteurs où l'on a pu s'élever. M. Poisson qui, pour l'exemple fictif de calcul qu'il avait en vue, considérait la conductibilité k comme provenant uniquement de l'échange de chaleur opéré entre les couches contiguës dans le sens vertical, l'a supposée proportionnelle à ρ^2; l'assimilant, en cela, à tous les effets qui résultent immédiatement d'une action de masse à masse. Mais, pour associer à ce caractère essentiel de réaction les modifications qui peuvent être produites par le rayonnement des couches lointaines, ainsi que par la faculté d'absorption, je me bornerai seulement à admettre qu'il n'en est pas totalement interverti; c'est-à-dire que le coefficient k croît et décroît avec la densité, comme nous voyons que cela a lieu dans toutes les couches élevées que nous pouvons atteindre, sans particulariser d'ailleurs aucunement les lois ultérieures qu'il peut suivre, en restant astreint à cette condition; car je n'ai nul besoin de ces lois pour arriver aux conséquences que je veux établir. k croissant avec la densité, $\frac{dt}{ds}$ varie en sens inverse, c'est-à-dire que le décroissement vertical des températures s'accélère continuellement à mesure que la hauteur augmente, ce qui est seulement l'extension théorique du résultat constaté par l'expérience dans toute la portion élevée de l'atmosphère où l'on a pu porter des instruments. Il ne faut rien de plus pour les démonstrations mathématiques que je vais exposer.

Conformément aux notions employées dans mon *Mémoire sur la constitution de l'atmosphère* (1), je nomme p la pression, ρ la densité, ϖ la tension de la vapeur aqueuse qui ont lieu dans une couche aérienne quelconque dont le rayon est r, et t la température; et je désigne par des accents inférieurs, les valeurs des éléments analogues dans la couche particulière

(1) *Additions à la Connaissance des temps de* 1841.

que l'on prend pour base de la colonne que l'on veut étudier. Je fais ensuite, par abréviation,

$$\frac{p}{p_1} = x; \qquad \frac{\rho}{\rho_1} = y; \qquad \frac{100\,\varepsilon\varpi}{p_1} = \omega,$$

ε étant le coefficient de la dilatation des gaz, supposé égal à 0,00375. Dans la couche inférieure, les variables x, y, deviendront l'une et l'autre égales à 1; et ω, devenu ω_1, sera égal à $\frac{100\varepsilon\varpi_1}{p_1}$. Enfin je désigne par l, la constante connue, dont l'expression est

$$l = 7951^m,12\,\frac{G}{g_1}\,\frac{(1+\varepsilon t_1)\,p_1}{(p_1 - 100\varepsilon\pi_1)},$$

ou

$$l = 7951^m,12\,\frac{G(1+\varepsilon t_1)}{g_1(1-\omega_1)};$$

G représente l'intensité de la gravité à l'observatoire de Paris, et g_1 cette intensité dans la couche où la densité est ρ_1 sur le parallèle que l'on considère. Cela posé, j'ai démontré dans mon Mémoire cité plus haut, que, dans toute constitution sphérique de l'atmosphère terrestre, le coefficient $\frac{dt}{dr}$, à une hauteur quelconque, est exprimé de la manière suivante :

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\left[y\left(\frac{dx}{dy} - \frac{d\omega}{dy}\right) - (x-\omega)\right]}{l(1-\omega_1)\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)y\,\frac{dx}{dy}}\left(266^\circ\tfrac{2}{3} + t_1\right):$$

c'est l'équation que j'ai nommée (4), à la page 71 de mon Mémoire.

Lorsqu'on applique cette expression à des couches assez hautes pour que la tension de la vapeur aqueuse puisse y être supposée habituellement insensible, comme je le ferai dans ce qui va suivre, ω devient ultérieurement nul, ainsi que $\frac{d\omega}{dy}$, et il reste

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\left[y\frac{dx}{dy} - x\right]}{l(1-\omega_1)\left(\frac{r^2}{r_1^2}\right)y\frac{dx}{dy}}\left(266^\circ\frac{2}{3} + t_1\right).$$

Le peu d'épaisseur de l'atmosphère comparativement au rayon terrestre, y rend le facteur $\frac{r^2}{r_1^2}$ presque constant. Toutefois on peut tenir compte de sa variabilité, sans aucune complication de calcul, en introduisant, comme ci-dessus, la variable s telle qu'on ait

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s,$$

par conséquent

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r_1}{r^2},$$

car il en résulte

$$(1)\qquad \frac{dt}{ds} = -\frac{\left[y\frac{dx}{dy} - x\right]\left(266^\circ\frac{2}{3} + t_1\right)}{\left(\frac{l}{r_1}\right)(1-\omega_1)\,y\frac{dx}{dy}}.$$

$r_1 s$ est alors, à fort peu près, la hauteur de la couche au-dessus de la surface de la sphère dont le rayon est r_1.

Lorsque le lieu géométrique des densités et des pressions est devenu une ligne droite, formant l'angle i avec l'axe sur lequel on compte ces dernières, si l'on désigne par y' et x' deux valeurs de y et de x assujetties à cette relation, on aura pour toutes les autres qui s'y trouvent comprises

$$y - y' = (x - x') \operatorname{tang} i;$$

si l'on prend, dans cette équation, les expressions de y et de $\frac{dy}{dx}$ pour les substituer dans l'équation (1), elle donne

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{[y' - x' \operatorname{tang} i](266°\tfrac{2}{3} + t_1)}{\left(\frac{l}{r_1}\right)(1 - \omega_1)y}.$$

La valeur de $\frac{dt}{ds}$ est donc exactement réciproque à la densité, dans des couches où la même relation rectiligne subsiste, comme je l'ai annoncé précédemment.

Reprenons l'équation (1) dans toute sa généralité. Parmi les couches sensiblement exemptes de vapeur aqueuse, auxquelles elle s'applique, j'en choisis une à laquelle on puisse étendre les relations observées entre les densités et les pressions. Ce sera, si l'on veut, l'une des plus hautes stations de M. Gay-Lussac, ou quelque point supérieur, assez peu distant pour qu'on puisse légitimement y prolonger la droite finale donnée par ses seize dernières stations. Je désigne par x', y' les valeurs de x et de y qui s'y rapportent. Elles seront connues, ainsi que $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$, par la relation déterminée, à cette hauteur, entre les densités et les pressions. Faisant donc

$$\frac{x'}{y'}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = c,$$

c aura une valeur connue, et déterminable en nombres. Par exemple, si la couche dont il s'agit est celle qui, dans l'ascension de M. Gay-Lussac, avait pour densité 0,5, on aura, d'après les calculs exposés dans mon Mémoire, pages 23 et 31,

$$x' = 0,4341724; \qquad y' = 0,5$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \text{tang}\,(42^\circ.53'.28'',67) = \frac{1}{1,0764560},$$

d'où l'on tire

$$\frac{x'}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{1}{1,2396642} = 0,80667 = c.$$

Maintenant, à partir de cette couche, je substitue idéalement au reste de l'atmosphère réelle, une atmosphère fictive, dans laquelle les valeurs de x', y', $\left(\frac{dy}{dx}\right)'$ soient les mêmes, mais qui se continue ultérieurement, jusqu'à sa dernière limite, en conservant le même décroissement de températures, conséquemment la même valeur actuelle de $\frac{dt}{ds}$. Il suffira pour cela d'y établir ultérieurement, dans toutes les couches, la relation générale

$$\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = c; \tag{2}$$

c ayant la valeur numérique que nous venons de déterminer tout à l'heure. Mais cette relation devra être exclusivement spéciale aux couches supérieures de l'atmosphère fictive. Car, dans toute la portion inférieure, jusqu'à la surface de la sphère solide, je supposerai qu'elle se continue exactement comme l'atmosphère réelle. L'équation (2), réservée ainsi aux seules couches supérieures, étant intégrée, donne

$$\log y + \text{const} = c \log x.$$

Puisque l'atmosphère fictive doit, comme l'atmosphère réelle, avoir $y = y'$, quand $x = x'$, il faudra que ces valeurs satisfassent à l'intégrale précédente, ce qui exige qu'on ait

$$\log y' + \text{const} = c \log x'.$$

Cela détermine la constante arbitraire, et en l'éliminant il vient

$$y = y' \left(\frac{x}{x'}\right)^c,$$

relation qui, d'après les conventions établies plus haut, ne doit être appliquée qu'en supposant x moindre que x', et y moindre que y'. A la limite extrême de cette atmosphère fictive, x devenant zéro, y est aussi zéro. C'est-à-dire que la densité est nulle en même temps que la pression. Mais, comme $\frac{1}{c}$ surpasse 1, et est presque égal à $\frac{5}{4}$, on voit que, lorsque y deviendra infiniment petit du premier ordre, x sera infiniment petit d'un ordre plus élevé, c'est-à-dire que la pression s'évanouira avant la densité; ou, en d'autres termes, la densité finale, à la surface de cette atmosphère fictive, sera infiniment petite, mais non pas nulle; ce qui suffit pour y contenir l'élasticité du gaz. En effet, l'expression de $\frac{dt}{ds}$ d'où nous sommes partis étant rigoureusement déduite des conditions mécaniques, et la constance assignée au décroissement ultérieur des températures ne renfermant rien qui leur soit contraire, il fallait bien que cette condition physique finale, qui est nécessaire pour continuer l'équilibre jusqu'à la surface extrême, s'y trouvât d'elle-même remplie.

Calculons maintenant la hauteur de cette atmosphère fictive, au-dessus de la couche que nous avons prise pour point de départ. Nous la déduirons de l'équation d'équilibre qui est généralement

$$dp = -g_1 \frac{r_1^2}{r^2} \rho dr,$$

ou

$$p_1 d\left(\frac{p}{p_1}\right) = -g_1 \rho_1 \cdot \frac{r_1^2}{r^2} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) dr:$$

or, par la nature de la constante l, on a toujours

$$p_1 = \rho_1 g_1 l;$$

si de plus nous remplaçons les rapports $\frac{p}{p^1}$, $\frac{\rho}{\rho_1}$, par les lettres x et y qui lés représentent, il viendra,

$$ldx = -\frac{r_1^2}{r^2} y dr;$$

et puisque nous avons fait généralement

$$\frac{r_1}{r} = 1 - s,$$

nous aurons en définitive

$$ldx = -r_1 y\, ds.$$

Or, la constitution de notre atmosphère fictive donne, au-dessus de la couche réelle prise pour point de départ,

$$y = y' \left(\frac{x}{x'}\right)^c,$$

substituant donc cette expression de y dans l'équation d'équilibre, la relation entre les x et les s pour toute la partie supérieure de l'atmosphère fictive sera

$$l dx = - r_1 y' \left(\frac{x}{x'}\right)^c ds$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\left(\frac{x}{x'}\right)^{1-c}}{1-c} + \text{const} = -\frac{r_1 y'}{l x'} s.$$

Il faut que cette équation soit satisfaite à la hauteur de la couche de l'atmosphère réelle que nous avons prise pour point de départ, c'est-à-dire quand $x = x'$ et $y = y'$; car c'est seulement au-dessus de cette couche qu'elle doit être appliquée. Soit donc alors s' la valeur de s dans l'atmosphère réelle, il faudra qu'on ait

$$\frac{1}{1-c} + \text{const} = -\frac{r_1 y'}{l x'} s'.$$

En éliminant la constante par cette condition, il vient

$$\frac{\left(\frac{x}{x'}\right)^{1-c} - 1}{1-c} = -\frac{r_1 y'}{l x'}(s - s') :$$

à la limite extrême de l'atmosphère fictive, la pression x est nulle ; et $\left(\frac{x}{x'}\right)^{1-c}$ est nul aussi, parce que la constante c est moindre que 1. Si l'on désigne par S la valeur spéciale de s qui a lieu alors, l'équation précédente donnera pour ce cas

$$r_1 S = r_1 s' + \frac{l x'}{y'(1-c)}.$$

Soit R le rayon correspondant à S, comme r' correspond à s'; nous aurons, d'après les relations établies entre ces quantités,

$$\frac{R - r_1}{R} = S; \qquad \frac{r' - r_1}{r'} = s'.$$

$r' - r_1$ est la hauteur de la couche réelle, prise pour point de départ, au-dessus de la couche inférieure pareillement réelle, à laquelle le rayon r_1 appartient. Nommons z' cette hauteur, qui est donnée par les opérations barométriques faites dans l'atmosphère réelle, nous aurons

$$r_1 s' = \frac{r_1 z'}{r_1 + z'} = z' - \frac{z'^2}{r_1 + z'}.$$

Semblablement, nommons Z la hauteur de la surface de l'atmosphère fictive au-dessus de la même couche inférieure réelle. L'expression de S transformée en Z donnera pareillement

$$\frac{r_1 Z}{r_1 + Z} = r_1 S.$$

Substituant donc ceci dans l'équation qui donne $r_1 S$, il en résultera

$$\frac{r_1 Z}{r_1 + Z} = z' - \frac{z'^2}{r_1 + z'} + \frac{lx'}{y'(1 - c)}.$$

Le second membre peut être réduit en nombres, puisque tout y est connu. Soit X sa valeur qui se trouvera exprimée en mètres, on en tirera aussitôt

$$Z = \frac{r_1 X}{r_1 - X} = X + \frac{X^2}{r_1 - X},$$

de sorte que la hauteur totale Z de l'atmosphère fictive pourra être aisément obtenue.

Dans mon Mémoire sur la constitution de l'atmosphère, page 82, j'ai trouvé pour l'ascension de M. Gay-Lussac, la hauteur $z' = 6951^{m},87$, lorsque l'on avait

$$x' = 0{,}4341724; \qquad y' = 0{,}5,$$

comme nous l'avons ici supposé. J'ai trouvé en outre, page 26 du même mémoire, que, dans les circonstances météorologiques de cette ascension, l'on avait $l = 8917^{m},29$. Avec ces données, et la valeur de la constante c que nous avons vue tout à l'heure être égale à $\frac{1}{1{,}2396642}$, rien ne manque pour calculer la hauteur totale Z de notre atmosphère fictive, et l'on trouve ainsi

$$Z = 47345^{m},95.$$

Je vais maintenant prouver que, d'après les conditions de constitutions assignées à cette atmosphère fictive au-dessus de la couche où $y' = 0{,}5$, elle est nécessairement plus haute que l'atmosphère réelle, en admettant seulement que dans celle-ci, le décroissement ultérieur des températures ne peut pas se ralentir, jusqu'à devenir quelque part moindre qu'il ne l'est dans la couche dont il s'agit.

Pour cela je construis d'abord la fig. 1, où OY, OX, sont deux axes rectangulaires sur lesquels les y et les x devront être portées comme coordonnées, à partir du point O, les premières suivant OY, les dernières suivant OX. Je prends OB = BA = 1 ; le point A appartiendra à la couche inférieure de l'atmosphère réelle. De là je mène la courbe AM', représentant le lieu des densités et des pressions dans toute la partie observée de cette atmosphère, lieu qui, dans sa portion la plus élevée, dégénère en une ligne droite que je prolonge indéfiniment suivant M′D. Soit M′ le point du lieu réel, dont les coordonnées sont x' et y', et que nous avons choisi pour origine de l'atmosphère fictive, en sorte que c'est seulement au-dessus de ce point, pour des valeurs plus petites de x et de y, qu'elle commence à s'écarter de la véritable. La relation des pressions aux densités qui la constitue dans toute cette partie ultérieure est

$$y = y' \left(\frac{x}{x'}\right)^c,$$

c ayant la valeur numérique trouvée plus haut. Je construis donc cette équation à partir du point M′, sur les mêmes axes de coordonnées, et j'obtiens ainsi la courbe M′O qui la représente.

Je dis d'abord que cette courbe touchera, en M′, la droite M′D, appartenant à l'atmosphère réelle, et qu'ensuite elle restera inférieure à cette droite dans sa marche ultérieure vers l'origine O. Pour constater ces deux circonstances, il n'y a qu'à donner à x une valeur un peu moindre que x', et que j'exprimerai généralement par

$$x = x' - \delta,$$

δ étant une quantité positive, qu'on pourra rendre indéfiniment petite. Alors, en substituant cette valeur de x dans l'équation de la droite qui est

$$y - y' = (x - x') \tang i,$$

elle donnera

$$y = y' - \delta \tang i.$$

Puis en faisant la même substitution dans l'équation de la courbe fictive, et développant le résultat suivant les puissances de δ, il viendra

$$y = y' - \frac{cy'}{x'}\delta + \frac{c.c-1}{1.2}\frac{y'}{x'^2}\delta^2 - \frac{c.c-1.c-2}{1.2.3}\frac{y'}{x'^3}\delta^3 \ldots \text{ etc.}:$$

or c est une fraction positive égale à 0,80667, par conséquent moindre que 1, ce qui rend le coefficient de δ^2 négatif. En outre, la condition qui détermine c est

$$\frac{x'}{y'}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = c;$$

c'est-à-dire

$$\frac{x'}{y'}\operatorname{tang} i = c,$$

puisque le point de départ M' est pris sur la droite de l'atmosphère réelle. Chassant donc c du coefficient de δ, par cette relation, l'ordonnée développée de la courbe fictive se trouve être

$$y = y' - \delta \operatorname{tang} i + \frac{c.c-1}{1.2}\frac{y'}{x'^2}\delta^2 - \frac{c.c-1.c-2}{1.2.3}\frac{y'}{x'^3}\delta^3 \ldots \text{etc.};$$

cette courbe coïncide donc avec la droite au point M' où δ est nul; et de plus elle a alors le même $\frac{dy}{d\delta}$, de sorte qu'elle touche la droite en ce même point. Mais le coefficient de δ^2 étant négatif, si l'on prend δ assez petit pour que tous les termes suivants de la série soient négligeables, comparativement au terme en δ^2, l'ordonnée y de la courbe, affaiblie par ce terme, sera moindre que celle de la droite réelle; ce qui achève de prouver les propositions énoncées.

103.

Maintenant je dis que le lieu réel, continué ultérieurement au delà de M′, ne pourra jamais venir couper la courbe M′O. Car soit M, fig. 2, le point où cette intersection aurait lieu pour la première fois au delà de M′. Puisque le lieu réel, continué linéairement, commence par être au-dessus de la courbe M′O relativement à l'axe OX, sa tangente en M devrait former avec l'axe OX un angle plus grand que la tangente de la courbe fictive M′O. Or le point M étant alors commun aux deux courbes, le produit $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ serait plus grand sur le lieu réel que sur la courbe fictive, où il a pour valeur constante c. Mais, dans cette portion ultérieure de l'atmosphère, où la vapeur aqueuse est insensible, l'expression générale de $\frac{dt}{ds}$, page 810, peut être mise sous la forme

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{\left[1 - \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\left(266^\circ\frac{2}{3} + t_1\right)}{\left(\frac{l}{r_1}\right)(1 - \omega_1)};$$

donc, si l'intersection supposée avait lieu, la valeur de $\frac{dt}{ds}$ sur la courbe réelle serait moindre que sur la courbe fictive, par conséquent moindre qu'au point de départ M′, puisque la constance de $\frac{dt}{ds}$ est la condition caractéristique de la courbe fictive, depuis son point de départ M′. C'est-à-dire que le décroissement des températures dans l'atmosphère réelle, après avoir d'abord continué à s'accélérer au delà de M′ sur le prolongement du lieu rectiligne, décroîtrait ensuite jusqu'à redevenir en M, moindre qu'il n'était en M′ d'après l'observation. Or, ce ralentissement ultérieur du décroissement des températures, succédant à son accélération au delà de M′, dans les couches élevées de l'atmosphère, est précisément la circonstance que les considérations théoriques nous ont autorisé à rejeter; et il n'y a rien non plus, dans les analogies physiques, qui puisse lui donner la moindre vraisemblance, lorsqu'il n'existe point vers la surface extérieure de l'atmosphère de cause perturbatrice étrangère à son état propre, ce qui peut du moins être affirmé pour l'équateur.

Maintenant, si le lieu réel des densités et des pressions, d'abord supérieur à la courbe fictive au delà de M′, ne peut jamais descendre vers l'axe OX jusqu'à couper cette courbe, il s'étendra donc au-dessus d'elle dans tout le reste de son cours, jusqu'à sa rencontre avec l'axe OY lorsque la pression x deviendra nulle. Or, par un théorème démontré page 27, 28 et 29 de mon Mémoire sur la constitution de l'atmosphère, cette plus grande distance du lieu réel à l'axe OX nécessite que la portion de l'atmosphère réelle, comprise entre l'ordonnée P′M′ et l'axe OY, soit plus basse que la portion de l'atmosphère fictive comprise entre les mêmes limites de pression. Donc, puisque toute la portion inférieure, depuis le point M′ jusqu'à la surface terrestre, est commune aux deux atmosphères, la hauteur totale de l'atmosphère réelle sera moindre que la hauteur totale de l'atmosphère fictive, par conséquent moindre que 47346$^{\text{m}}$, en partant des observations de M. Gay-Lussac. C'est précisément le résultat que j'ai annoncé dans le titre de ce Mémoire.

Comme la quantité obtenue ainsi n'est pas une mesure absolue, mais seulement une limite supérieure à la hauteur réelle et totale de l'atmosphère, il est naturel de s'attendre que d'autres données d'observation lui assigneraient des valeurs différentes. C'est en effet ce qui a lieu ; et, en général, plus le décroissement observé des températures est rapide, plus la limite de hauteur que l'on en déduit est basse. C'est ce que l'on peut voir en employant les observations faites à l'équateur. Par exemple, si l'on fait commencer l'atmosphère fictive à la plus haute station de M. de Humboldt au Chimboraço, en adoptant les éléments rapportés dans mon Mémoire sur la constitution de l'atmosphère, page 107, on aura

$$x' = 0{,}4952935; \quad y' = 0{,}55181\,192; \quad i = 39^\circ.51'.17'',33$$
$$l = 8835^{\mathrm{m}},11; \quad z' = 5988^{\mathrm{m}},12.$$

Le lieu auquel ces données appartiennent étant rectiligne, on en tire d'abord

$$\frac{x'}{y'}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{x'}{y'}\operatorname{tang} i = 0{,}749266 = c,$$

donc

$$1 - c = 0{,}250734.$$

Cette valeur de c est notablement moindre que celle qui se déduit des observations de M. Gay-Lussac, parce que l'angle i est moindre qu'il ne l'était alors, ce qui indique un décroissement de température plus rapide à densité égale. En achevant de calculer, avec ces éléments, la hauteur Z de l'atmosphère fictive, ainsi qu'on l'a fait pages 816 et 817, on trouve

$$X = 37860^{\mathrm{m}},5,$$

ce qui donne une limite supérieure de l'atmosphère réelle beaucoup plus basse qu'on ne pouvait la déduire des observations de Paris.

En employant la série des températures moyennes observées sur le Chimboraço par M. Boussingault, on aurait une limite plus élevée. Mais elle serait cependant encore inférieure à celle qui se déduit de l'ascension de M. Gay-Lussac. Si l'on fait partir l'atmosphère fictive de la plus haute station de M. Boussingault, les données du calcul seront

$$x' = 0{,}4977723;\quad y' = 0{,}5627084;\quad i = 41^\circ.0'.53'',54$$
$$l = 8861^{\text{m}},008;\quad z' = 5857^{\text{m}},47.$$

De là on tire d'abord

$$\frac{x'}{y'}\left(\frac{dy}{dx}\right)' = \frac{x'}{y'}\operatorname{tang} i = 0{,}769375 = c,$$

d'où

$$1 - c = 0{,}230625.$$

La valeur de c est un peu plus grande que dans l'ascension de M. de Humboldt, parce que i est plus grand ; ce qui indique un décroissement moins rapide des températures. Mais cette valeur de c est encore moindre que celle de M. Gay-Lussac par la raison inverse. En calculant la hauteur Z de l'atmosphère fictive qui correspond à ces données, on trouve

$$Z = 42742^{\text{m}},78.$$

Les deux autres séries de M. Boussingault se rapprochant beaucoup plus de celle de M. de Humboldt pour la valeur de i, les limites de hauteur que l'on en déduirait seraient toutes plus basses que celle-ci. Ainsi, en portant la limite cherchée, au-dessus du résultat exagéré que cette dernière seule indique, on pourra, je crois, affirmer que la hauteur de l'atmosphère terrestre, à l'équateur, n'atteint pas 43000 mètres. Toutefois, des observations plus multipliées, et plus précises encore s'il est possible, permettraient vraisemblablement de rapprocher cette limite. J'ai eu surtout pour but ici de montrer comment on peut la conclure. Je serai complétement satisfait si cette nouvelle utilité donnée aux observations météorologiques faites à de grandes hauteurs dans l'atmosphère, engage les physiciens et les voyageurs à les multiplier, en diverses saisons, et sous différents climats.

NOTE

SUR LA LIMITE DE HAUTEUR DE L'ATMOSPHÈRE,

DÉDUITE DES

PHÉNOMÈNES CRÉPUSCULAIRES.

Je joins ici un court extrait des calculs de Lambert, avec les deux figures principales qui s'y rapportent. J'ai conservé les lettres dont il a fait usage, quoique leur choix soit peu conforme aux règles de l'analogie.

La fig. 1, pl. II, est sa CXI^e, un peu agrandie dans ses dimensions, pour que les relations naturelles des lignes y soient moins violées, quoiqu'il soit impossible de les conserver exactement. Elle représente la section de la terre et de l'atmosphère supposées sphériques par un plan contenant les centres de la terre et du soleil. CS′ est le rayon solaire central, et SD un autre rayon solaire parallèle à celui-là; lequel, entrant en D dans l'atmosphère, s'y prolonge suivant la trajectoire réfractée DEF, tangente à la terre en E, où elle devient par conséquent horizontale. Si l'on fait tourner le rayon SD, et son prolongement courbe DEF, autour du rayon central CS′ comme axe, la trajectoire DEF engendrera un conoïde de révolution, dont la surface isolera au-dessous d'elle, à partir du cercle décrit par E, toute la portion de l'atmosphère qui ne reçoit du soleil aucun rayon direct. Et la portion directement éclairée sera terminée par le cercle que décrit le point d'émergence F.

De ce même point F, menons, dans le plan de la figure, une seconde trajectoire lumineuse FAG, tangente en A à la surface terrestre. A sera le point terrestre extrême de la section, qui peut voir quelque partie de l'espace atmosphérique directement éclairé. Ainsi, tout l'arc terrestre AE sera éclairé secondairement par cet espace à des degrés divers, selon l'étendue plus ou moins grande qui est au-dessus de l'horizon de chaque point. Il y aura donc, pour tout cet arc, *un premier crépuscule;* et les plans des cercles décrits par A et par E, autour du rayon central CS', comprendront la zone de la surface terrestre, pour laquelle le phénomène a lieu ainsi au même instant.

Le point G où la seconde trajectoire sort de l'atmosphère, est le dernier de la section qui puisse recevoir quelque rayon de l'espace immédiatement éclairé. Si de G l'on mène une troisième trajectoire lumineuse tangente à la terre en H, H sera le point terrestre extrême de la section qui peut voir quelque partie de l'espace EFBG, éclairé secondairement. Tous les points de l'arc terrestre AH seront donc éclairés par ce second espace à des degrés divers, mais nullement par le premier; ils jouiront donc *du second crépuscule.* Et les plans des cercles menés par A et par H, perpendiculairement au rayon central CS', comprendront la zone de la surface terrestre où le phénomène a lieu ainsi.

D'après le peu de hauteur de l'atmosphère, comparativement au rayon terrestre, et le peu de courbure des trajectoires, même horizontales, les angles au centre DCF, FCG, ne sont réellement que de 10 à 12 degrés. Les rayons terrestres qui les comprennent et qui limitent les zones des espaces crépusculaires successifs, s'inclinent donc les uns sur les autres beaucoup moins rapidement que ne le représente la figure; et ainsi le point d'émergence de la troisième trajectoire est bien loin d'atteindre le point de l'atmosphère opposé au rayon central, comme il semblerait le faire ici. Mais il a fallu exagérer l'ouverture des angles au centre pour rendre les trajectoires distinctes de leurs tangentes extrêmes DK, FL, FM, GN, et pour séparer sensiblement les perpendiculaires CK, CL, CM, CN, menées du centre sur ces tangentes, d'avec les rayons CD, CF, et CG. Mais la figure ainsi exagérée, peut de même servir pour définir généralement les directions des rayons CD, CF, CG, autour du rayon central CS′, quand on se donne l'angle qu'ils comprennent; et elle n'a pas d'autre usage.

Les lignes CK, CE, étant respectivement perpendiculaires aux tangentes menées en D et en E à la première trajectoire horizontale, l'angle KCE, compris entre elles, est égal à l'inclinaison mutuelle de ces deux tangentes, conséquemment à la réfraction horizontale, que je désignerai par R. Les angles ECL, MCA, ACN, sont aussi tous égaux entre eux, et à R par la même raison. Les angles au centre DCK, FCL, FCM, compris entre chaque perpendiculaire, et le rayon vecteur mené au point de départ de chaque tangente, sont pareillement égaux entre eux, puisqu'ils sont formés exactement dans des conditions identiques. Je les exprimerai tous par u. Plaçons en A un observateur, ayant la limite F du premier espace crépusculaire dans son horizon occidental; et soit alors Δ la dépression angulaire du soleil au-dessous de son horizon vrai. CA étant, pour lui, la verticale, l'angle ACS′ sera $90 + \Delta$. Or, puisque CK est perpendiculaire à KDS, il l'est aussi à CS′; ainsi l'angle ACK sera Δ. Or, cet angle se compose de deux angles u et de trois angles R; on aura donc

$$2u + 3R = \Delta.$$

Plaçons maintenant l'observateur en H; et supposons qu'au moment où la dépression vraie du soleil, mesurée pour lui, est Δ, il voie à son horizon occidental, non pas le point F qui lui est invisible, mais le point G, limite extrême de l'espace atmosphérique, qui est éclairé secondairement. Ce sera alors l'angle HCS′ qui aura pour valeur $90^\circ + \Delta$, et par conséquent ce sera HCK qui sera Δ. Or, cet angle n'est que le précédent ACK, augmenté de $2u$ et de 2R. On aura donc, dans cette supposition de l'observation horizontale du point G,

$$4u + 5R = \Delta.$$

Généralement, pour chaque nouvelle trajectoire horizontale que l'on mènera, l'angle au centre correspondant à la dépression Δ, augmentera ainsi de $2u$ et de 2R. Donc, si l'on suppose l'observateur ayant à son horizon occidental le dernier point du n^e espace crépusculaire dans le vertical actuel du soleil, la condition sera

$$2nu + (2n + 1) R = \Delta;$$

par conséquent

$$u = \frac{\Delta - (2n + 1) R}{2n}:$$

il faut toujours se rappeler que, dans la nature, l'angle HCS' serait bien loin d'être obtus comme il le paraît ici, à cause de l'exagération d'ouverture que l'on a été forcé de donner, dans le dessin, aux angles DCF, FCG, etc.

Soit r' le rayon CE, CA, CH, de la surface terrestre, ρ' la densité de l'air a cette surface. Soient aussi r'' et ρ'', le rayon et la densité des couches réfléchissantes dont on est supposé observer la limite de disparition. CE et CK étant perpendiculaires en E et en K à la trajectoire horizontale, la théorie des forces centrales donne

$$\frac{\text{CK}}{\text{CE}} = \frac{\text{vitesse en E}}{\text{vitesse en D}} = \frac{\sqrt{1 + 4k\rho'}}{\sqrt{1 + 4k\rho''}}.$$

$4k$ est le pouvoir réfringent de l'air ou 0,000588768 pour la densité 1, correspondante à la température 0°, et à la pression barométrique $0^m,76$ mesurée à Paris. Lambert suppose ρ'' insensible à la hauteur où s'opère la limite de réflexion observable. Nommant donc CK, p, comme CE est r', il a

$$p = r' \sqrt{1 + 4k\rho'}.$$

Or, l'angle KCD, ou u, étant donné, on a, dans le triangle KCD,

$$r'' = \frac{p}{\cos u};$$

donc

$$r'' = \frac{r' \sqrt{1 + 4k\rho'}}{\cos u};$$

c'est le résultat de Lambert. Pour la facilité du calcul numérique, il est commode de faire

$$\sqrt{1+4k\rho'} = 1 + \delta;$$

d'où

$$\delta = 2k\rho' - \tfrac{1}{2}(2k\rho')^2 \ldots \text{etc.}$$

Alors δ est une très-petite quantité; et en cherchant $r'' - r'$, qui est la hauteur de l'atmosphère au-dessus de la surface terrestre, il vient

$$r'' - r' = r'\left(\frac{\delta + 2\sin^2\frac{1}{2}u}{\cos u}\right).$$

Si l'on veut supposer que le point dont on observe la disparition à l'horizon occidental, appartient à la limite extrême F ou G du premier ou du deuxième espace crépusculaire, ou à tout autre de l'ordre n, il faut employer la valeur de u qui répond à cette supposition, en la déduisant de la dépression Δ que l'on a admise. C'est ainsi qu'ont été calculés les trois nombres que j'ai déduits des observations de Lacaille, dont j'ai emprunté seulement les résultats moyens; et l'on en déduirait de même ceux que donne Lambert, en partant des données qu'il a employées.

Mais ces suppositions d'observations sont-elles admissibles? C'est ce que Lambert discute; et c'est en ce point surtout que son mémoire me semble mériter une grande attention.

Concevons le soleil se couchant suivant DS. L'observateur placé en E voit, dans le vertical de cet astre, toute la section DKELF du conoïde d'air qui est directement illuminé par ses rayons; et il découvre aussi toute la portion du même conoïde qui se trouve au-dessus de son horizon apparent. La limite extrême du premier espace crépusculaire n'est visible pour lui que par le seul point F, situé à l'horizon oriental du vertical.

Mais, pour tout autre observateur situé dans la même section, entre E et A, une portion de l'espace atmosphérique directement illuminé est disparue sous l'horizon occidental. Le point F s'est élevé à une certaine hauteur sur l'horizon oriental, et il est devenu le sommet de l'arc qui limite cet espace du côté opposé au soleil. Si l'observateur est en Q, il a ce sommet à son zénith F; et il ne peut le percevoir qu'accompagné par la lumière que lui envoient les particules d'air de la ligne QF, qui sont éclairées secondairement. A mesure que l'observateur s'avance vers A, cette lumière secondaire augmente avec l'accroissement de la distance au point F. Enfin lorsqu'il arrive en A, il a le sommet F dans son horizon occidental, mêlé avec toute la lumière secondaire venue de tous les points de AF. Alors Lambert pense, avec raison, ce me semble, que cette lumière dissimule le point F; de sorte qu'à cet instant, ou dans cette position du point F, la limite de la lueur observable doit paraître au-dessus de F. Ainsi, au moment où cette limite paraît se coucher, le point F lui-même est déjà couché, et disparu sous l'horizon occidental depuis un certain temps.

D'après les considérations précédentes, Lambert admet, ou du moins il me semble admettre, que, pour observer réellement la limite F, il ne faut pas lui attribuer l'instant de cette disparition, mais se placer en E et suivre son mouvement progressif d'élévation au-dessus de l'horizon oriental, pendant lequel il suppose qu'elle deviendra perceptible et saisissable lorsqu'elle sera encore à une certaine hauteur. Ceci fait l'objet de sa fig. XCIII, que j'ai reproduite dans la fig. 2.

Malgré la différence des lettres, le secteur BCL de cette figure est le même que FCD de la précédente. L'observateur, supposé en A, voit le soleil se coucher en L; et le sommet B du premier espace crépusculaire se trouve alors à son horizon oriental. La dépression vraie du soleil à cet instant est donc égale à la réfraction horizontale R. Après quelque temps, la dépression vraie de cet astre étant devenue Δ, le point B arrive en D; de sorte que son déplacement angulaire BCD, autour du centre, est égal au déplacement angulaire qu'a éprouvé le soleil, ou $\Delta - R$. A cet instant, le point D, s'il est perceptible, se voit par une trajectoire courbe DA, dont les deux tangentes extrêmes, se coupant en I, font entre elles un angle r, qui est la réfraction propre à la distance zénithale apparente HAI ou θ', distance que je représente par $90° - h$, h étant la hauteur apparente de D. Maintenant si l'on mène les perpendiculaires CF, CG, CE sur les trois tangentes BF, DI, AI, l'angle ECA sera h, ECG, r, et FCA, R. On aura donc

$$GCF = h - R - r.$$

Et puisque BCD est $\Delta - R$, il en résultera

$$BCF + GCD = \Delta - R + GCF = \Delta + h - 2R - r = c;$$

c sera ainsi une quantité connue. Or, BCF et GCD sont des angles de deux triangles rectangles dont les hypoténuses CB, CD sont égales entre elles et à r'', ou au rayon supérieur de l'atmosphère. Ainsi, en nommant ces angles u, u', et désignant par p, p' les perpendiculaires CF, CG, on aura

$$p = r'' \cos u, \qquad p' = r'' \cos u', \qquad u + u' = c.$$

Les deux premières donnent

$$p \cos u' = p' \cos u,$$

et en éliminant u', par la troisième, il vient

$$\operatorname{tang} u = \frac{p' - p \cos c}{p \sin c}.$$

Or, sur la trajectoire horizontale BA, les perpendiculaires CF, CA, ou p et r', menées du centre C aux tangentes extrêmes, sont inverses des vitesses en B et A. Supposant donc la densité en B, insensible, comme le fait Lambert, il en résulte

$$p = r' \sqrt{1 + 4k\rho}.$$

Une relation analogue subsiste entre les perpendiculaires CE, CG menées du centre C sur les tangentes extrêmes de la trajectoire AD. Or CE est $r' \cos h$, et CG est p'. On aura donc

$$p' = r' \cos h \sqrt{1 + 4k\rho'}.$$

Ces valeurs substituées dans tang u donnent

$$\operatorname{tang} u = \frac{\cos h - \cos c}{\sin c},$$

ou encore

$$\operatorname{tang} u = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(c+h) \sin \frac{1}{2}(c-h)}{\sin c}; \qquad (2)$$

or c est connu, puisqu'on a

$$c = \Delta + h - 2R - r, \qquad (1)$$

on pourra donc calculer l'angle u; et alors on en déduira

$$r'' = \frac{p}{\cos u} = \frac{r' \sqrt{1 + 4k\rho'}}{\cos u}.$$

Pour la facilité du calcul numérique, il sera bien de faire comme précédemment

$$\sqrt{1 + 4k\rho'} = 1 + \delta,$$

d'où

$$\delta = 2k\rho' - \tfrac{1}{2}(2k\rho')^2 \ldots \text{ etc.};$$

et l'on aura pour la hauteur des particules réfléchissantes en B ou D

$$r'' - r' = r' \frac{(\delta + 2 \sin^2 \frac{1}{2} u)}{\cos u}. \qquad (3)$$

Si l'on met dans les formules (1), (2), (3), les données observées par Lambert, pag. 448 et 450 de son ouvrage, en prenant comme lui δ égal à 0,0003054, on retrouvera les mêmes nombres qu'il en déduit, pour l'angle BCF ou u, pour la hauteur $r'' - r'$, et pour toutes les autres particularités du phénomène. Il est aisé de vérifier sur les formules mêmes, qu'en effet, dans cette application, le point D dont on observe la hauteur apparente h, est considéré par Lambert comme appartenant toujours à la limite extrême du premier espace crépusculaire, directement illuminé. Car si l'on y fait $h = 0$ et $r = R$, ce qui met le point D dans l'horizon occidental apparent, l'angle u ou BCF, qui est le MCF ou u de la figure 1, devient égal à $\frac{1}{2}c$ ou $\frac{\Delta - 3R}{2}$. Or c'est là précisément l'expression de cet angle dans la figure 1, lorsqu'on suppose la limite extrême F du premier espace crépusculaire, immédiatement observée à l'horizon occidental du point A. Mais on ne voit pas sur quoi Lambert fonde l'identité constante du point observé D, avec cette limite, dans les calculs de la figure 2. On serait plutôt porté à croire que le sommet sensible D de la courbe crépusculaire observable appartient toujours à quelque partie de l'espace illuminé secondairement; et il ne serait pas impossible que cette partie fût différente à diverses hauteurs. Il faut même, d'après les idées de Lambert, que cela arrive ainsi quand le point D de la figure 2 descend très-près de l'horizon occidental, puisqu'il admet qu'on doit cesser de le distinguer quand il est à cet horizon, à cause de la grande longueur du second espace crépusculaire qui s'interpose alors entre lui et l'observateur. Mais c'est ce que le mouvement angulaire du point D autour du centre C fera reconnaître, surtout si l'on peut y attacher quelque autre caractère fixe, tiré de la polarisation.

1er Tableau. *Résultats* *'au point le plus voisin de la cime du Chimboraço, où il est parvenu.*

	DÉSIGNATION des STATIONS SUCCESSIVES, prises dans la colonne aérienne, rangées par ordre d'élévation au-dessus de la mer Pacifique.	BAROMÈTRE OBSERVÉ, réduit	EXCÈS DU CALCUL fondé sur le lieu rectiligne.	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température; calculé sur la parabole inférieure et sur la droite $-\frac{dr}{dt}$.	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus du niveau de la mer Pacifique, en mètres, déduit du lieu actuel des densités et des pressions.	REMARQUES DIVERSES
		m	o	m.	m.	
1	Guayaquil (la mer).......	761	$+0$	305,46	0	Les résultats relatifs à ces deux premières stations, sont calculés sur la parabole initiale. Si la valeur de $\frac{dt}{dr}$ pour Riobamba était calculée sur la droite finale, au lieu de l'être sur cette parabole, on n'y trouverait qu'une différence de 27 millimètres, conséquemment négligeable.
2	Guaraoda..............	557	$-0,133$		2691	
3	Riobamba (plateau dénué de végétation).........	550	$-2,067$	195,02	2804	
4	Hacienda del Guavo......	515	$+0,420$			
5	Hacienda del Chimboraço..	485	$-1,092$			Ces valeurs sont calculées sur la droite finale. La dernière hauteur est un peu moindre que celle qui se déduit des observations de M. de Humboldt, quoique la station soit très-probablement la même; cela tient sans doute en très-grande partie à ce que la parabole initiale, dans les observations de M. de Humboldt, donne un décroissement accidentel des densités sensiblement plus lent que celui qui résulte des températures moyennes, observées par M. Boussingault.
6	Pedron del Almurzo......	459	$+2,195$			
7	Chillapullu (sur la neige)..	417	$+1,121$			
8	Chimboraço (rocher rouge).	392	$-0,724$			
9	Chimboraço (rocher noir)..	378		134,13	5857	

Équation de la parabole initiale pour une station quelconque,

$$\omega = A'y + B'y^2 + C'$$

Valeurs des coefficients

$A = +1,16642280$; B s précédentes sont les mêmes que j'ai établies dans mon *Mémoire sur la constitution* (Connaissance des temps de 1841). L'application que j'en ai faite alors aux Obser-

Conditions déterminatrices : 1° Satisfai étriques de M. de Humboldt, dans ces mêmes régions équatoriales, page 90 et sui- i servir d'exemple de calcul.

s ω_1 et ω dépendent de la tension actuelle de la vapeur aqueuse. ω_1 est relatif à la

2° Satisfai re. Il est exprimé généralement par $\frac{100\varepsilon\pi_1}{p_1}$, π_1 étant la tension actuelle de cette

$x = 0,72$

3° Touche pression qu'on y observe, et ε le coefficient de la dilatation des gaz supposé égal xpression générale de ω fait décroître cette tension progressivement à mesure que la

Formule pour calculer la hauteur rela ute, comme je l'explique page 86 de mon Mémoire, si l'on veut avoir ω en x; et du centre de la terre, a étant le rayon veut l'avoir en y. Lorsque ω_1 est calculé par les éléments observés dans la station Soit y_1 la valeur de y à la plus basse a généralement, pour l'expression de ω en y ordinaires ou $M = 0,4342945$, on aura

$$= -2,975206.\omega_1; \quad B' = +3,305785.\omega_1; \quad C' = +0,669421.\omega_1$$

$$\frac{a'z}{a'+z} = \frac{a'^2}{a^2}$$

ces valeurs donnent $\omega = \omega_1$ comme cela doit être. Elles font ensuite décroître ω comme cela avait lieu dans l'ascension de M. Gay-Lussac; de sorte qu'elles sont

Dans les observations de M. Boussinga licables à l'état ordinaire et régulier de l'air; mais non pas à une précipitation d'eau générale, pour un lieu quelconque, en omme on a quelquefois occasion d'en observer. Ici, comme pour les calculs de l'An- *Mémoire sur la constitution de l'atmosp* is $\omega_1 = 0,012313$, qui convient à l'air saturé de vapeur aqueuse, à la température tiennent à l'équation du lieu sur lequel la pression de 757mm,99 de mercure à 0°. se trouvent sur la droite finale, B devien age des formules précédentes, il faut employer pour A, B, C les valeurs propres au la série, a' devient égal à a. ie sur lequel se trouve la station que l'on considère, et à laquelle appartient la valeur

Pour la commodité du calcul numériq y que l'on y introduit. Lorsque ce lieu devient rectiligne, B devient nul. précédente; et si sa valeur est Z, on a

Tous les autres détails qui seraient néce se trouvent dans le mémoire cité de la

I^er TABLEAU. *Résultats des pressions et des températures moyennes annuelles, observées par M. Boussingault, depuis le niveau de la mer Pacifique, à Guayaquil, jusqu'au point le plus voisin de la cime du Chimboraço, où il est parvenu.*

	DÉSIGNATION des STATIONS SUCCESSIVES prises dans la colonne aérienne, rangées par ordre d'élévation au-dessus de la mer Pacifique.	BAROMÈTRE OBSERVÉ réduit à l'époque commune de neuf heures du matin	THERMOMÈTRE du baromètre	THERMOMÈTRE LIBRE. Températures moyennes de l'année déterminées par le sondage pour les stations supérieures à la mer	RÉDUCTION de la colonne de mercure à la température de 0°	RÉDUCTION à la gravité inférieure	BAROMÈTRE réduit à 0°, à la gravité inférieure, et à l'époque commune de neuf heures du matin h	PRESSIONS, celle qui a lieu à la station inférieure étant 1 $\frac{h_n}{h_1}$ ou x,	TEMPÉRATURES DE L'AIR régularisées graphiquement par la courbe t	DENSITÉS DE L'AIR déduites des pressions observées, et des températures régularisées; la densité inférieure étant 1, et en tenant compte de la vapeur aqueuse $\frac{\rho_n}{\rho_1}$ ou y	LES MÊMES calculées pour les huit stations supérieures par la condition du lieu rectiligne dont l'inclinaison sur l'axe des pressions est I = 41° 0' 53'',54	EXCÈS DES DENSITÉS individuellement calculées sur celles qui se déduisent du lieu rectiligne	TEMPÉRATURES déduites du lieu rectiligne d'après l'observation des pressions, pour les huit stations supérieures	TEMPÉRATURES OBSERVÉES	EXCÈS DU CALCUL fondé sur le lieu rectiligne	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température, calculé sur la parabole inférieure et sur la droite $\frac{dr}{dt}$	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus du niveau de la mer Pacifique, en mètres, déduit du lieu actuel des densités et des pressions	REMARQUES DIVERSES.
		mm	°	°	mm	mm	mm		°				°	°	°	m	m	
1	Guayaquil (la mer)	761,55	+ 26,0	+ 26,0	— 3,559	— 0,000	757,991	1,0000000	+ 26,00	1,0000000			+ 26,00	+ 26,00	+ 0	305,46	0	Les résultats relatifs à ces deux premières stations sont calculés sur la parabole initiale. Si la valeur de $\frac{dt}{dt}$ pour Riobamba était calculée sur la droite finale, au lieu de l'être sur cette parabole, on n'y trouverait qu'une différence de 27 millimètres, conséquemment négligeable.
2	Guaranda	557,70	13,6	15,0	1,366	0,476	555,858	0,7333300	15,78	0,7655656	0,7675080	— 0,0019424	+ 14,867	+ 15,00	— 0,133		2641	
3	Riobamba (plateau dénué de végétation)	550,85	17,8	16,4	1,763	0,494	548,593	0,7236140	15,22	0,7566770	0,7590663	— 0,0023833	+ 14,333	16,40	— 2,067	193,02	2804	
4	Hacienda del Guavo	515,15	8,9	11,0	0,826	0,480	513,844	0,6779124	11,89	0,7206835	0,7193690	+ 0,0013145	+ 11,420	+ 11,00	+ 0,420			
5	Hacienda del Chimboraço	485,50	9,4	9,7	0,821	0,591	484,088	0,6386460	8,56	0,6852734	0,6851660	+ 0,0001074	+ 8,608	+ 9,70	— 1,092			Les valeurs sont calculées sur la droite finale. La dernière hauteur est un peu moindre que celle qui se déduit des observations de M. de Humboldt, quoique la station soit très-probablement la même, cela tient sans doute en très-grande partie à ce que la parabole initiale, dans les observations de M. de Humboldt, donne un décroissement accidentel des densités sensiblement plus lent que celui qui résulte des températures moyennes observées par M. Boussingault.
6	Pedron del Almurzo	459,00	10,0	4,0	0,827	0,624	457,549	0,6036338	5,44	0,6555928	0,6547143	+ 0,0008785	+ 6,195	+ 4,00	+ 2,195			
7	Chillapullu (sur la neige)	417,25	3,9	— 0,5	0,293	0,669	416,288	0,5491991	+ 0,22	0,6087388	0,6073703	+ 0,0013685	+ 0,821	— 0,30	+ 1,121			
8	Chimboraço (rocher rouge)	392,00	5,6	— 2,0	0,575	0,697	390,728	0,5154783	— 3,00	0,5786451	0,5780319	+ 0,0006132	— 2,724	— 2,00	— 0,724			
9	Chimboraço (rocher noir)	378,55	7,8	non-observée	0,531	0,712	377,307	0,4977723	4,78	0,5627084	0,5626422	+ 0,0000663	— 1,780	non-observée		134,13	5857	

Equation de la parabole initiale

$$x = Ay + By^2 + C$$

Valeurs des coefficients

$$A = +1{,}1661228\ldots,\quad B = -0{,}0109587 5,\quad C = -0{,}1553 6405$$

Conditions déterminatrices. 1° Satisfaire à la station inférieure où l'on a

$$x = 1 \qquad y = 1$$

2° Satisfaire au point de la droite finale, voisin de M, où l'on a

$$x = 0{,}7246875 \qquad y = 0{,}76$$

3° Toucher la droite finale en ce même point.

Formule pour calculer la hauteur relative z de deux stations, dont l'inférieure est à la distance a' du centre de la terre, a étant le rayon terrestre au niveau de la mer.

Soit y_1 la valeur de y à la plus basse des deux stations, et M le module des tables logarithmiques ordinaires ou $M = 0{,}4342945$, on aura généralement

$$\frac{a'z}{a'+z} = \frac{a'^2}{a^2}\, l\, \left\{ \frac{A}{M} \log\left(\frac{y_1}{y}\right) + 2B(y_1 - y) \right\}$$

Dans les observations de M. Boussingault, la constante l a pour valeur $8861^m{,}008$. Son expression générale, pour un lieu quelconque, en tenant compte de la vapeur aqueuse, est donnée dans mon *Mémoire sur la constitution de l'atmosphère*, page 45. Les valeurs de A et B sont celles qui appartiennent à l'équation du lieu sur lequel les deux stations que l'on compare sont situées. Quand elles se trouvent sur la droite finale, B devient nul; et quand la plus basse est la station inférieure de toute la série, a' devient égal à a.

Pour la commodité du calcul numérique, il faut d'abord calculer le second membre de l'équation précédente; et si sa valeur est Z, on aura ensuite

$$z = Z + \frac{Z^2}{a' - Z}$$

Tous les autres détails qui seraient nécessaires à l'intelligence des formules ou à leur démonstration se trouvent dans le mémoire cité de la Connaissance des temps de 1841.

Equation de la droite finale

$$x = Ay + C$$

Valeurs des coefficients

$$A = \frac{1}{\tan I} = 1{,}1497655 \qquad C = -0{,}149134$$

Conditions déterminatrices. 1° Satisfaire au point moyen des huit stations supérieures, où l'on a

$$x = 0{,}6345420; \qquad y = 0{,}6815966$$

2° Faire, avec l'axe des pressions, l'angle I, dont la valeur est

$$I = 41°\ 0'\ 53'',54$$

Expression générale des températures pour une station quelconque

$$t = t_1 - \frac{\left\{ y(1-\omega_1) - (x-\omega) \right\} \left(266°\frac{2}{3} + t_1 \right)}{y(1-\omega_1)},$$

leur vitesse de décroissement

$$\frac{dt}{dz} = -\frac{\left\{ (B-B')y^2 - (C-C') \right\} \left(266°\frac{2}{3} + t_1 \right)}{l(1-\omega_1) \left\{ Ay + 2By^2 \right\} \frac{r'^2}{r^2}}$$

où l'on a

$t_1 = +26°$; $l = 8861^m{,}008$, $\omega_1 = 0{,}0124289$, $A' = -0{,}0366334 0$; $B' = +0{,}0410395$; $C' = +0{,}0084251$

et, par suite, pour une station quelconque,

$$\omega = A'y + B'y^2 + C'$$

Les formules précédentes sont les mêmes que j'ai établies dans mon *Mémoire sur la constitution de l'atmosphère* (Connaissance des temps de 1841). L'application que j'en ai faite alors aux Observations barométriques de M. de Humboldt, dans ces mêmes régions équatoriales, page 90 et suivantes, peut ici servir d'exemple de calcul.

Les quantités ω_1 et ω dépendent de la tension actuelle de la vapeur aqueuse. ω_1 est relatif à la station inférieure. Il est exprimé généralement par $\frac{1003\varepsilon\pi_1}{p_1}$, π_1 étant la tension actuelle de cette station, p_1 la pression qu'on y observe, et ε le coefficient de la dilatation des gaz supposé égal à 0,00375. L'expression générale de ω fait décroître cette tension progressivement à mesure que la hauteur augmente, comme je l'explique page 86 de mon Mémoire, si l'on veut avoir ω en x, et page 101 si on veut l'avoir en y. Lorsque ω_1 est calculé par les éléments observés dans la station inférieure, on a généralement, pour l'expression de ω en y,

$$A' = -2{,}975206\,\omega_1, \qquad B' = +3{,}305785\,\omega_1, \qquad C' = +0{,}669421\,\omega_1$$

lorsque $y = 1$, ces valeurs donnent $\omega = \omega_1$, comme cela doit être. Elles font ensuite décroître ω régulièrement, comme cela avait lieu dans l'ascension de M. Gay-Lussac, de sorte qu'elles sont seulement applicables à l'état ordinaire et régulier de l'air, mais non pas à une précipitation d'eau accidentelle, comme on a quelquefois occasion d'en observer. Ici, comme pour les calculs de l'Antisana, on a pris $\omega_1 = 0{,}0124313$, qui convient à l'air saturé de vapeur aqueuse, à la température de 26° et sous la pression de $757^{mm}{,}99$ de mercure à 0°.

En faisant usage des formules précédentes, il faut employer pour A, B, C les valeurs propres au lieu géométrique sur lequel se trouve la station que l'on considère, et à laquelle appartient la valeur numérique de y que l'on y introduit. Lorsque ce lieu devient rectiligne, B devient nul.

	DÉSIGNATION des stations successives, prises dans la colonne aérienne, rangées par ordre d'élévation au-dessus du niveau de la mer Pacifique.	BAROMÈTRE OBSERVÉ, réduit à l'époque commune de neuf heures du matin.	fondé sur le lieu rectiligne.	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température; calculée sur la parabole inférieure $\frac{dr}{dt}$ et sur la droite finale $-\frac{dr}{dt}$.	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus de la mer Pacifique, en mètres, déduite du lieu actuel des densités et des pressions.
		mm.	o	m.	m.
1	Guayaquil (la mer)	761,55		239,97	0,00
2	La Chorrera.............	572,65	-0,99	203,69	2459,80
3	Pomasqui..........	567,65	-1,59		2536,13
4	San Pablo..............	554,55	-2,45		2726,37
5	La Tacunga (plateau)....	549,60	-3,02		2810,22
6	Quito.................	548,10	-1,47	193,83	2830,00
7	Piñantura	528,25	-1,42		3133,96
8	Callo..................	530,10	-1,75		3109,47
9	Métairie d'Antisana......	471,30	-2,77		4070,19
10	Glacier d'Antisana.......	401,90	-2,43	141,49	5364,25

REMARQUES DIVERSES.

Les résultats relatifs à ces deux stations sont calculés sur la parabole initiale. La valeur de $\frac{dr}{dt}$ est seule calculée sur la droite finale, pour la deuxieme station. Si on la calculait sur la parabole, on trouverait $202^m,5$, c'est-à-dire, $1^m,19$ de moins.

Tous ces résultats sont calculés sur la ligne droite finale. Les valeurs de $\frac{dr}{dt}$ qui mesurent le décroissement des températures, y étant presque proportionnelles aux densités, surtout vers les grandes hauteurs où la vapeur aqueuse a moins d'influence, on s'est borné a la calculer exactement pour les deux stations extrêmes et pour la station intermédiaire de Quito. Cela suffit pour montrer la marche accélérée de ce décroissement, laquelle devient d'autant plus sensible, qu'elle est moins modifiée par la pression de la vapeur aqueuse.

(1) Pendant l'observation, il tombait une neige fine, une sorte de petite grêle, de la grosseur de la poudre à canon, et dont la formation a pu donner a l'air un petit exces de chaleur accidentel.

Équation de la

$r + C.$

Valeurs des coef

46, $C = -0,1496303.$

Conditions déter|moyen des huit stations supérieures M_2 et M_9, où

$r = 0,75058914.$

s pressions, l'angle I dont la valeur est :

.33″ 47.

II^e Tableau. *Résultats des pressions et des températures accidentelles de l'air, observées par M. Boussingault, depuis le niveau de la mer Pacifique, à Guayaquil, jusqu'au point du glacier supérieur du volcan d'Antisana, où il est parvenu.*

	DÉSIGNATION des stations successives prises dans la colonne aérienne rangées par ordre d'élévation au-dessus du niveau de la mer Pacifique	BAROMÈTRE OBSERVÉ, réduit à l'époque commune de neuf heures du matin	THERMOMÈTRE du baromètre.	THERMOMÈTRE LIBRE. Températures actuelles de l'air, observées pendant l'ascension sur le volcan	RÉDUCTION de la colonne de mercure à la température de 0°	RÉDUCTION à la gravité inférieure	BAROMÈTRE réduit à 0°, à la gravité inférieure, et à l'époque commune de neuf heures du matin. h	PRESSIONS CONCLUES, celle qui a lieu à la station inférieure étant 1. $\frac{h_n}{h_1}$ ou x.	TEMPÉRATURES DE L'AIR régularisées graphiquement par la condition de continuité t
		mm			mm		mm		°
1	Guayaquil (la mer)	761,55	+ 26,0	+ 26,0	— 3,559	— 0,000	757,991	1,0000000	+ 26,00
2	La Chorrera	572,65	13,9	13,9	— 1,434	0,447	570,769	0,7530022	15,11
3	Pomasqui	567,65	16,1	16,1	1,647	0,460	565,553	0,7461208	14,67
4	San Pablo	554,55	11,1	11,1	1,109	0,482	552,959	0,7295060	13,46
5	La Tacunga (plateau)	549,60	16,4	16,4	1,624	0,493	547,483	0,7222817	13,22
6	Quito	548,10	14,4	14,4	1,422	0,500	546,177	0,7205585	13,11
7	Piñantura	528,25	10,0	10,0	0,952	0,523	526,775	0,6949620	11,33
8	Callo	530,10	13,3	13,3	1,270	0,525	528,305	0,6969805	11,47
9	Metairie d'Antisana	471,30	3,3	3,3	0,280	0,603	470,417	0,6206244	6,11
10	Glacier d'Antisana	401,90	7,7	0,0	0,5576	0,6884	400,654	0,5285735	0,00

	DÉSIGNATION	DENSITÉS ACTUELLES DE L'AIR, déduites des pressions, et des températures régularisées par la continuité, la densité inférieure étant 1, et en tenant compte de la vapeur aqueuse $\frac{\rho}{\rho_1}$ ou y.	LES MÊMES, calculées pour les neuf stations supérieures, par la condition du lieu rectiligne, dont l'inclinaison sur l'axe des pressions est 41° 6' 33'',47	EXCÈS DES DENSITÉS individuellement calculées, sur celles qui se déduisent du lieu rectiligne	TEMPÉRATURES déduites du lieu rectiligne d'après l'observation des pressions, pour les neuf stations supérieures au niveau de la mer	TEMPÉRATURES observées pendant l'ascension	EXCÈS DU CALCUL fondé sur le lieu rectiligne.	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température, calculée sur la parabole inférieure et sur la droite finale $\frac{dr}{dt}$.	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus de la mer Pacifique, en mètres, déduite du lieu actuel des densités et des pressions.	REMARQUES DIVERSES.
							°	m	m	
1	Guayaquil (la mer)	1,0000000			+ 26,0			239,97	0,00	Les résultats relatifs à ces deux stations sont calculés sur la parabole initiale. La valeur de $\frac{dr}{dt}$ est seule calculée sur la droite finale, pour la deuxième station. Si on la calculait sur la parabole, on trouverait 203^m,5, c'est-à-dire, 1^m,19 de moins.
2	La Chorrera	0,7871499	0,78778255	— 0,00060756	14,89	13,90	+ 0,99	203,69	2409,80	
3	Pomasqui	0,78132025	0,78177750	— 0,00045725	14,51	16,10	— 1,59		2536,13	
4	San Pablo	0,76753412	0,76727878	+ 0,00025534	13,55	11,10	+ 2,45		2726,37	Tous ces résultats sont calculés sur la ligne droite finale. Les valeurs de $\frac{dr}{dt}$ qui mesurent le décroissement des températures, y étant presque proportionnelles aux densités, surtout vers les grandes hauteurs où la vapeur aqueuse a moins d'influence, on s'est borné à la calculer exactement pour les deux stations extrêmes et pour la station intermédiaire de Quito. Cela suffit pour montrer la marche accélérée de ce décroissement, laquelle devient d'autant plus sensible, qu'elle est moins modifiée par la pression de la vapeur aqueuse.
5	La Tacunga (plateau)	0,76070009	0,76097455	— 0,00027446	13,38	16,40	— 3,02		2810,22	
6	Quito	0,75921818	0,75947082	— 0,00025264	12,93	14,40	— 1,47	193,83	2830,00	
7	Piñantura	0,73737232	0,73713426	+ 0,00023806	11,42	10,00	+ 1,42		3133,96	
8	Callo	0,73918480	0,73889568	+ 0,00028912	11,55	13,30	— 1,75		3109,47	
9	Metairie d'Antisana	0,67220838	0,67226420	— 0,00005582	6,07	3,30	+ 2,77		4070,19	
10	Glacier d'Antisana	0,5865462	0,59193684	— 0,0053906	— 2,43	0,00 (1)	— 2,43	141,49	5364,25	

(1) Pendant l'observation, il tombait une neige fine, une sorte de petite grêle, de la grosseur de la poudre à canon, et dont la formation a pu donner à l'air un petit excès de chaleur accidentel.

Équation de la parabole initiale

$$x = Ay + By^2 + C$$

Valeurs des coefficients

$$A = + 1,02720164, \qquad B = + 0,07611818, \qquad C = - 0,10431982$$

Conditions déterminatrices : 1° Satisfaire à la station inférieure où l'on a

$$x = 1,0000000, \qquad y = 1,0000000$$

2° Satisfaire au point de la droite finale intermédiaire entre M_2 et M_3 où l'on a

$$x = 0,7442078 \qquad y = 0,78$$

3° Toucher la droite finale en ce même point.

Équation de la droite finale

$$x = Ay + C$$

Valeurs des coefficients

$$A = \frac{1}{\text{tang } I} = + 1,1457946, \qquad C = - 0,1496303$$

Conditions déterminatrices : 1° Satisfaire au point moyen des huit stations supérieures M_2 et M_9, où l'on a

$$x = 0,71050451 \qquad y = 0,75058914$$

2° Faire, avec l'axe des pressions, l'angle I dont la valeur est

$$I = 41^\circ\ 6'\ 33'',47$$

 Résultat des | *au point du glacier supérieur du volcan d'Antisana, où il est parvenu.*

	DÉSIGNATION DES STATIONS SUCCESSIVES, prises dans la colonne aérienne, rangées par ordre d'élévation au-dessus de la mer Pacifique.	BAROMÈTRE OBSERVÉ, réduit	EXCÈS DU CALCUL fondé sur le lieu rectiligne.	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température; calculé sur la parabole inférieure et sur la droite finale : $-\frac{dr}{dt}$.	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus de la mer Pacifique, en mètres, déduite du lieu actuel des densités et des pressions.	REMARQUES DIVERSES.
			o	m.	m.	
1	Guayaquil (la mer).......	76	+ 0,00	485,70	0,00	Les résultats relatifs à ces deux premières stations sont calculées sur la parabole initiale; le $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ seul est calculé sur la droite finale pour la Chorrera. En le calculant sur la parabole initiale, on le trouverait égal à 159^{m},07, ou moindre de 5^{m}.
2	La Chorrera.............	57	+ 0,03	164,94	2470,67	
3	Pumasqui..............	56	+ 0,26		2548,82	
4	San Pablo..............	55	+ 0,49		2739,77	Ces résultats sont calculés sur la ligne droite finale. Les valeurs de $\frac{dr}{dt}$ qui mesurent le décroissement des températures, y étant presque proportionnelles aux densités, surtout vers les grandes hauteurs où la vapeur aqueuse a peu d'influence, on s'est borné à le calculer exactement pour les deux stations extrêmes de la droite, et pour la station intermédiaire de Quito. Cela suffit pour montrer la marche accélérée de ce décroissement, qui devient d'autant plus sensible, qu'elle est moins modifiée par la présence de la vapeur aqueuse.
5	La Tacunga (plateau).....	54	− 1,05		2823,88	
6	Quito.................	548	− 0,57	157,82	2844,04	
7	Piñantura..............	528	+ 0,78		3148,14	
8	Callo..................	530				
9	Métairie d'Antisana.......	471	+ 1,00		4084,26	
10	Glacier d'Antisana........	401	− 3,02 (1)	118,47	5371,20	(1) Le sondage d'où la température moyenne a été conclue, n'a pas été fait dans le sol terrestre, mais au fond d'un trou actuellement foré dans la glace, à l'entrée d'une anfractuosité de la masse du glacier.

Équation de la parabole initiale

x

Valeurs des coefficients

A = + 1,5711670 6392;

Conditions déterminatrices : 1° Satisfai

$x =$

2° Satisfai

où l'on a

$x =$

3° Toucher

Équation de la droite finale

Valeurs des coefficients

$A = \frac{1}{\text{tang } I} = $

Conditions déterminatrices : 1° Satisfaire a

$x = 0,7$

2° Faire, avec

ns ce tableau que les hauteurs absolues, déduites des températures moyennes, surpassent déduisent des températures accidentelles d'une quantité presque constante, qui pro- tation no 2, au-dessus de laquelle toutes les suivantes sont calculées sur les droites ui les unissent. Or, cet excès primitif de hauteur de la station no 2 résulte du raccor- la mer par les deux paraboles initiales, dont la détermination comporte nécessairement titude, parce que l'on n'a pas d'observations intermédiaires entre la Chorrera et la mer, puisse les assujettir, de manière à suivre les lois réelles du décroissement des densités. ent n'ayant plus lieu pour les stations supérieures à la Chorrera, à cause de la mul- oints déterminés par les observations dans la colonne d'air, son état, soit moyen, soit trouve mieux défini; et les intervalles de hauteur des stations se trouvent reproduits lité naturelle, dans les deux systemes de températures, malgré la différence qui existe ents physiques observés dans les deux cas. Or, la série des températures moyennes enue par contact avec le sol, au lieu que la série des températures accidentelles a été un thermomètre plongé dans l'air seul, l'accord qui se trouve entre les hauteurs dé- deux systèmes de données, montre que l'influence exercée sur le thermomètre libre par t du sol et des corps matériels environnants, u'altère pas les hauteurs calculées autant été porté à le craindre. Ce qui peut résulter, soit de ce que l'influence dont il s'agit -même très-faible, soit encore de ce qu'elle varierait peu à de petites distances de la tre.

III^e Tableau. *Résultat des pressions et des températures moyennes annuelles, observées par M. Boussingault, depuis le niveau de la mer Pacifique, à Guayaquil, jusqu'au point du glacier supérieur du volcan d'Antisana, où il est parvenu*

	DÉSIGNATION des stations successives, prises dans la colonne aérienne, rangées par ordre d'élévation au-dessus de la mer Pacifique	BAROMÈTRE OBSERVÉ, réduit à l'époque commune de neuf heures du matin.	THERMOMÈTRE du baromètre	THERMOMÈTRE LIBRE. Températures moyennes de l'année déterminées par le sondage pour les stations supérieures au niveau de la mer	RÉDUCTION de la colonne de mercure à la température de 0°	RÉDUCTION à la gravité inférieure	BAROMÈTRE réduit à 0°, à la gravité inférieure, et à l'époque commune de neuf heures du matin h	PRESSIONS CONCLUES, celle qui a lieu à la station inférieure étant 1 $\frac{h}{h_1}$ ou x.	TEMPÉRATURES DE L'AIR, régularisées graphiquement par la condition de continuité t	DENSITÉS DE L'AIR, déduites des pressions et des températures régularisées par la continuité, la densité inférieure étant 1, et en tenant compte de la vapeur aqueuse; $\frac{\rho}{\rho_1}$ ou y.	LES MÊMES, calculées pour les neuf stations supérieures, par la condition du lieu rectiligne, dont l'inclinaison sur l'axe des pressions est 39°.49'.59",42.	EXCÈS DES DENSITÉS individuellement calculées sur celles qui se déduisent du lieu rectiligne	TEMPÉRATURES déduites du lieu rectiligne d'après l'observation des pressions, pour les neuf stations supérieures au niveau de la mer.	TEMPÉRATURES observées par le sondage	EXCÈS DU CALCUL fondé sur le lieu rectiligne	ACCROISSEMENT DE LA HAUTEUR pour une diminution de 1° dans la température; calculé sur la parabole inférieure et sur la droite finale $-\frac{dz}{dt}$.	ÉLÉVATION DES STATIONS au-dessus de la mer Pacifique, en mètres, déduite du lieu actuel des densités et des pressions	REMARQUES DIVERSES
		mm			mm	mm	mm							°	°	m	m	
1	Guayaquil (la mer)	761,55	+26,0	+26,0	−3,559	−0,000	757,991	1,0000000	+26,0	1,0000000			+26,0	+26,0	+0,00	485,70	0,00	Les résultats relatifs à ces deux premières stations sont calculés sur la parabole initiale, le $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ seul est calculé sur la droite finale pour la Chorrera. En le calculant sur la parabole initiale, on le trouverait égal à 159^m,07, ou moindre de 5^m
2	La Chorrera	572,65	13,9	16,1	1,434	0,447	570,769	0,7530022	16,22	0,7840822	0,7843306	−0,0002483	16,13	16,1	+0,03	164,94	2470,67	
3	Pomasqui	567,65	16,1	15,4	1,647	0,460	565,553	0,7461208	15,72	0,7784161	0,7785904	−0,0001744	15,66	15,4	+0,26		2548,82	
4	San Pablo	554,55	11,1	14,0	1,109	0,482	552,959	0,7296060	14,44	0,7648533	0,7647312	+0,0001221	14,49	14,0	+0,49		2739,77	Ces résultats sont calculés sur la ligne droite finale. Les valeurs de $\frac{dz}{dt}$ qui mesurent le décroissement des températures y étant presque proportionnelles aux densités, surtout vers les grandes hauteurs où la vapeur aqueuse a peu d'influence, on s'est borné à le calculer exactement pour les deux stations extrêmes de la droite, et pour la station intermédiaire de Quito. Cela suffit pour montrer la marche accélérée de ce décroissement, qui devient d'autant plus sensible, qu'elle est moins modifiée par la présence de la vapeur aqueuse
5	La Tacunga (plateau)	549,60	16,4	15,0	1,624	0,493	547,483	0,7222817	14,00	0,7585885	0,7587051	−0,0001166	13,95	15,0	−1,05		2823,88	
6	Quito	548,10	14,4	14,4	1,422	0,501	546,177	0,7205585	13,67	0,7577015	0,7572677	+0,0004338	13,83	14,4	−0,57	157,82	2844,04	
7	Piñantura	528,25	10,0	11,1	0,952	0,523	526,775	0,6949620	11,89	0,7358880	0,7359167	−0,0000287	11,88	11,1	+0,78		3148,14	
8	Callo	530,10	13,3	non-observée	1,270	0,525	528,305	0,6969805										
9	Metairie d'Antisana.	471,30	3,3	4,4	0,280	0,603	470,417	0,6260214	5,40	0,6739193	0,6739077	+0,0000116	5,40	4,4	+1,00		4084,26	
10	Glacier d'Antisana	401,90	7,7	−4,7	0,5576	0,6884	400,654	0,5285735	−2,69	0,5918505	0,5971234	−0,0053729	−4,72	−4,7	−3,02 (1)	118,47	5371,20	(1) Le sondage d'où la température moyenne a été conclue, n'a pas été fait dans le sol terrestre, mais au fond d'un trou actuellement foré dans la glace, à l'entrée d'une anfractuosité de la masse du glacier

Équation de la parabole initiale

$$x = Ay + By^2 + C.$$

Valeurs des coefficients

$$A = +1,5711670649\text{2}, \quad B = -0,2386806\text{82}; \quad C = -0,332486382$$

Conditions déterminatrices : 1° Satisfaire à la station inférieure, où l'on a

$$x = 1,000000 \quad y = 1,000000.$$

2° Satisfaire au point de la droite finale intermédiaire entre M_2 et M_3, où l'on a

$$x = 0,7478106 \quad y = 0,78$$

3° Toucher la droite finale en ce même point

Équation de la droite finale

$$x = Ay + C$$

Valeurs des coefficients

$$A = \frac{1}{\tang I} = +1,1988252. \quad C = -0,1872735$$

Conditions déterminatrices : 1° Satisfaire au point moyen des sept stations supérieures M_3, M_7, où l'on a

$$x = 0,7124365, \quad y = 0,7504927\text{1}$$

2° Faire, avec l'axe des pressions, l'angle I dont la valeur est

$$I = 39°.49'.59'',42$$

COMPARAISONS DES HAUTEURS ABSOLUES SUR LA MER PACIFIQUE,

Obtenues par les températures moyennes et par les températures accidentelles de l'air

	DÉSIGNATION DES STATIONS.	LEUR ÉLÉVATION SUR LA MER PACIFIQUE, CALCULÉE par les températures moyennes.	LEUR ÉLÉVATION SUR LA MER PACIFIQUE, CALCULÉE par les températures accidentelles.	EXCÈS DES HAUTEURS déduites des températures moyennes
		m	m	m
2	La Chorrera.	2470,67	2459,80	+10,87
3	Pomasqui.	2548,82	2536,13	12,69
4	San-Pablo.	2739,77	2726,37	13,40
5	La Tacunga	2823,88	2810,22	13,66
6	Quito.	2844,04	2830,05	13,99
7	Piñantura.	3148,14	3133,96	14,18
9	Metairie d'Antisana.	4084,26	4070,19	14,07
10	Glacier d'Antisana.	5371,20	5364,25	6,95

On voit dans ce tableau que les hauteurs absolues, déduites des températures moyennes, surpassent celles qui se déduisent des températures accidentelles d'une quantité presque constante, qui provient de la station n° 2, au-dessus de laquelle toutes les suivantes sont calculées sur les droites respectives qui les unissent. Or, cet excès primitif de hauteur de la station n° 2 résulte du raccordement avec la mer par les deux paraboles initiales, dont la détermination comporte nécessairement quelque incertitude, parce que l'on n'a pas d'observations intermédiaires entre la Chorrera et la mer, auxquelles on puisse les assujettir, de manière à suivre les lois réelles du décroissement des densités. Cet inconvénient n'ayant plus lieu pour les stations supérieures à la Chorrera, à cause de la multiplicité des points déterminés par les observations dans la colonne d'air, son état, soit moyen, soit accidentel, se trouve mieux défini, et les intervalles de hauteur des stations se trouvent reproduits avec leur égalité naturelle, dans les deux systèmes de températures, malgré la différence qui existe entre les éléments physiques observés dans les deux cas. Or, la série des températures moyennes ayant été obtenue par contact avec le sol, au lieu que la série des températures accidentelles a été observée avec un thermomètre plongé dans l'air seul, l'accord qui se trouve entre les hauteurs déduites de ces deux systèmes de données, montre que l'influence exercée sur le thermomètre libre par le rayonnement du sol et des corps matériels environnants, n'altère pas les hauteurs calculées autant qu'on aurait été porté à le craindre. Ce qui peut résulter, soit de ce que l'influence dont il s'agit serait par elle-même très-faible, soit encore de ce qu'elle varierait peu à de petites distances de la surface terrestre

RECHERCHES

PHYSICO-CHIMIQUES

SUR LA TEINTURE,

Par M. CHEVREUL.

Lues à l'Académie des sciences, le 27 janvier 1840.

INTRODUCTION.

1. Les travaux que j'ai entrepris sur la teinture, considérée sous le point de vue le plus général et le plus approfondi, forment trois séries distinctes.

2. *Première série.* Elle comprend tout ce qui se rapporte au principe du contraste simultané des couleurs; principe d'une telle fécondité, que, malgré mon désir de concentrer mes efforts sur la chimie appliquée à la teinture proprement dite, je n'ai pu m'empêcher de les diriger vers l'institution d'une théorie propre à régler les arts et les industries, dont l'objet est de parler aux yeux par des couleurs,

dans l'assortiment et l'arrangement qu'ils font de ces mêmes couleurs pour atteindre leur but. C'est ce qui explique comment mon premier écrit sur ce sujet, publié en 1828, et imprimé dans le tome XI d*es Mémoires de l'Académie*, m'a engagé dans des recherches si étendues, qu'elles forment avec les premières un volume in-8° de 721 pages, qui a paru l'année dernière.

3. *Deuxième série.* Elle comprend des recherches que j'appelle physico-chimiques, parce que, dépendant du principe du mélange des couleurs qui est du domaine de la physique, elles se rattachent en même temps aux actions chimiques dans tous les cas où il s'agit d'appliquer ce principe à la fixation de plusieurs matières colorées sur les étoffes, au moyen des procédés de la teinture.

4. C'est à l'exposé de ces recherches que ce Mémoire est spécialement consacré. Il me suffira de définir le principe du mélange des couleurs, de bien faire sentir l'extrême différence qui le distingue du principe de leur contraste simultané, puis de passer aux applications les plus générales que je fais du premier principe à la formation du noir, pour qu'il soit facile d'apprécier toute l'importance dont il est en teinture et dans le blanchiment; car le résultat remarquable de mes derniers travaux, c'est ce même principe qui régit et le procédé général de faire du noir par le mélange de diverses couleurs, et le procédé général de faire paraître des étoffes légèrement colorées, moins colorées ou plus blanches qu'elles ne sont, en y ajoutant cependant une matière colorée. Nous allons donc envisager le principe du mélange des couleurs, 1° sous le point de vue abstrait; 2° sous le point

de vue de l'application, précisément comme nous avons envisagé le principe de leur contraste simultané.

5. *Troisième série.* Elle comprend mes recherches chimiques proprement dites sur la teinture. Cinq mémoires ont paru déjà dans le recueil de l'Académie; le sixième ne tardera point à paraître. Je vais en rappeler les titres, ainsi que quelques publications qui, plus tard, doivent se fondre dans des mémoires destinés à compléter les recherches de cette troisième série.

Premier Mémoire. Introduction et considérations générales (sur la teinture). Tome XV, page 383, des Mémoires de l'Académie.

Deuxième Mémoire. Des proportions d'eau que les étoffes absorbent dans des atmosphères à 65°, 75°, 80° et 100° de l'hygromètre de Saussure. Tome XV, page 409.

Introduction aux troisième, quatrième, cinquième et sixième Mémoires. Tome XVI, page 41.

Troisième Mémoire. De l'action de l'eau pure sur des étoffes teintes avec différentes matières colorantes. Tome XVI, page 47.

Quatrieme Mémoire. Des changements que le curcuma, le rocou, le carthame, l'orseille, l'acide sulfo-indigotique, l'indigo et le bleu de Prusse, fixés sur les étoffes de coton, de soie et de laine, éprouvent de la part de la lumière, des agents atmosphériques et du gaz hydrogène. Tome XVI, page 53.

Cinquième Mémoire. Des changements que le curcuma, le rocou, le carthame, l'orseille, l'acide sulfo-indigotique, l'indigo, le bleu de Prusse, et autres matières colorantes fixées sur les étoffes de coton, de soie et de laine, éprouvent de la part de la chaleur et des agents atmosphériques. Tome XVI, page 181.

Sixième Mémoire. De plusieurs changements de couleur qu'éprouve le bleu de Prusse fixé sur les étoffes.

Appendice à ce Mémoire, contenant quelques considérations générales, et inductions relatives à la matière des êtres organisés vivants.

Examen des matières grasses de la laine (1828).

Des propriétés caractéristiques de la lutéoline, du quercitrin, du morin, du morin blanc, retirés de la gaude, du quercitron, du bois jaune (1830).

De l'aurine, nouvelle espèce de principe immédiat colorant.

Procédé pour obtenir à volonté la dégradation du bleu de Prusse, soit pur, soit mêlé de cyanoferrite de cyanure de potassium, soit mêlé de peroxide de fer (1826).

I. DU PRINCIPE DU MÉLANGE DES COULEURS SOUS LE POINT DE VUE ABSTRAIT.

Définition du principe du mélange des couleurs.

6. Lorsque des rayons rouges émanent de points matériels assez rapprochés d'autres points matériels qui réfléchissent en même temps des rayons jaunes, pour que nous ne puissions distinguer les premiers des seconds, nous per-

cevons la sensation d'une *couleur unique* que nous appelons l'*orangé*. Si les points nous envoyaient des rayons rouges et des rayons bleus, nous aurions la sensation du *violet*. Enfin, s'ils nous envoyaient des rayons jaunes et des rayons bleus, nous aurions la sensation du *vert*. On vérifie ces propositions par deux voies différentes; la première consiste à faire coïncider deux à deux sur une surface blanche les rayons diversement colorés du spectre solaire, et la *seconde* à mêler deux à deux des matières très-divisées qui réfléchissent chacune une des trois couleurs, rouge, jaune et bleue. Le mélange peut être fait avec des poudres sèches, avec les couleurs du peintre, avec les matières colorantes du teinturier, avec les fils colorés du tapissier.

7. Si, au lieu de mêler deux à deux des matières colorées en rouge, en jaune et en bleu, on mêle ces trois matières ensemble, de façon que la couleur d'aucune d'elles ne domine sur celles des autres, on a du noir, ou, ce qui revient au même, du gris équivalant à du noir, plus du blanc. On peut obtenir ce résultat en mêlant les couleurs des peintres, en appliquant sur une même étoffe des matières tinctoriales, rouge, jaune et bleue; enfin, comme je l'ai démontré, en travaillant, d'après les procédés de l'art du tapissier, des fils teints en ces trois couleurs.

8. Sur ces faits j'établis le *principe du mélange des couleurs* pour les arts, en disant que *les mélanges binaires du rouge, du aune et du bleu, donnent l'orangé, le violet et le vert, tandis que le mélange de ces trois couleurs, en proportions convenables, donne du noir.* Si ce principe est reconnu depuis longtemps par les teinturiers et les peintres, il est vrai de dire qu'il n'a pas donné à l'application tout ce qu'on peut en tirer, et

c'est particulièrement sous ce point de vue que je l'ai envisagé.

9. L'opposition absolue entre le *principe du mélange des couleurs* et le *principe de leur contraste simultané,* deviendra évidente par l'exemple suivant. Des parties jaunes et des parties bleues, assez divisées pour que l'œil ne les distingue pas les unes des autres, font naître en nous la sensation du vert, conformément au principe du mélange, tandis que, conformément au principe du contraste, qui nous fait voir deux couleurs juxtaposées les plus différentes possible, quant à la hauteur de leur ton et à leur composition optique, si nous regardons une feuille de papier bleu clair à côté d'une feuille de papier jaune, loin de tirer sur le vert, les deux feuilles s'en éloignent, en paraissant prendre, la première du violet, et la seconde de l'orangé, ou, ce qui revient au même, en paraissant perdre toutes les deux du vert; de sorte que ce qu'il y a d'analogue ou d'identique en elles s'évanouit, ou du moins s'affaiblit beaucoup.

II. DU PRINCIPE DU MÉLANGE DES COULEURS SOUS LE POINT DE VUE DE L'APPLICATION.

10. L'application du principe du mélange des couleurs que je me propose de faire, concerne, 1° la *formation du noir;* 2° ce qu'on nomme en teinture les *brunitures* ou le *rabat des couleurs*; 3° le *blanchiment.*

I. Application du principe du mélange des couleurs à la formation du noir.

11. Peut-on dire que tous les noirs produits de l'art de

la teinture sont formés de matières qui, si elles étaient séparées, nous paraîtraient de couleur rouge, jaune et bleue? C'est une question que nous ne traitons pas dans ce Mémoire. Partant du fait, *qu'une étoffe chargée de matière rouge, de matière jaune et de matière bleue, en proportions convenables, paraît noire*, nous voulons en développer la conséquence dans la pratique, après l'avoir transformé en cet énoncé: *Une étoffe chargée, en proportions convenables, soit de rouge et de vert, soit de jaune et de violet, soit de bleu et d'orangé,* ou, ce qui est la même chose, de *matières réfléchissant séparément des lumières colorées mutuellement complémentaires, paraît noire.*

12. J'ai démontré non-seulement ce dernier énoncé pour la confection en teinture d'un noir ou d'un gris normal, c'est-à-dire, d'un noir ou d'un gris qui n'est ni rouge, ni jaune, ni bleu, ni orangé, ni vert, ni violet, mais encore pour du noir résultant du mélange soit de matières pulvérulentes de couleurs mutuellement complémentaires, soit de fils teints en ces mêmes couleurs. La conséquence de ces faits pour les arts de la teinture, de la peinture et de la tapisserie, soit qu'il s'agisse de faire du noir ou du gris, soit qu'il faille éviter d'en faire, est évidente, et rien de plus facile que de la mettre en pratique, lorsqu'on a sous les yeux la *construction* que j'ai décrite ailleurs sous la dénomination de *chromatique hémisphérique* (1). En effet, les noms de toutes les couleurs mutuellement complémentaires se lisant à la circonférence d'un plan circulaire aux extrémités d'un même diamètre, il devient aisé de savoir, lorsqu'on voudra faire du

(1) *De la loi du contraste des couleurs, et de ses applications.*

noir avec une couleur donnée, ce qu'on devra y ajouter, ou ce qu'on devra s'abstenir d'y mêler lorsqu'il faudra éviter de la ternir en la mélangeant avec une autre couleur.

13. Il est essentiel de remarquer que les matières colorées qu'on mélange, doivent être sans action chimique mutuelle, ou, si elles en ont, cette action doit s'effectuer sans changer les couleurs respectives des matières mélangées: autrement, la condition des couleurs complémentaires n'existerait plus.

14. S'il s'agit de faire du noir sur une étoffe par la fixation successive de différentes matières colorées, il faut éviter de commencer par en fixer une *à saturation*, de façon que l'étoffe perdrait tellement de son aptitude à s'unir à d'autres corps, qu'il deviendrait impossible d'y fixer la quantité convenable de la matière dont la couleur doit neutraliser celle de la matière fixée en premier lieu à saturation. Par exemple, si de la laine destinée à être teinte en noir reçoit un pied de bleu d'indigotine tellement abondant qu'elle devienne d'un violet cuivré, il sera bien difficile, pour ne pas dire impossible, de neutraliser cette couleur au moyen d'un jaune verdâtre, sa teinte complémentaire. La théorie est dans ce cas parfaitement d'accord avec l'économie de l'opération.

II. Application du principe du mélange des couleurs à la formation des brunitures.

15. *Lorsqu'on mêle trois matières présentant les trois couleurs simples, ou deux matières de couleurs mutuellement complémentaires, en des proportions différentes de celles où la neutralisation est possible, le résultat du mélange est du*

noir, plus la couleur simple ou binaire dominante ; et ce résultat s'observe aussi bien en teinture qu'en peinture et en tapisserie, comme je l'ai démontré ailleurs pour ce dernier cas. La proposition que je viens d'énoncer est un principe parfaitement applicable à la teinture, comme je le démontrerai d'une manière spéciale dans quelques-uns des mémoires de la troisième série de mes recherches ; je me borne maintenant à en faire sentir la généralité, en déduisant quelques conséquences principales, appliquées à la confection de ce qu'on nomme en teinture des *couleurs rabattues au moyen du noir.*

16. On rabat généralement, aux Gobelins, les étoffes qui ont reçu des couleurs plus ou moins brillantes, dans un bain dont la composition est tout à fait analogue à celle de l'encre, puisqu'il se compose de sulfate de protoxyde de fer, de campêche, de noix de galle : il contient en outre du sumac. Mais la couleur que cette composition donne aux étoffes, n'ayant aucune solidité, il est avantageux de recourir au mode suivant de *rabat : on rabattra le rouge avec du jaune et du bleu, ou avec du vert ; l'orangé avec du bleu ;*

Le jaune avec du rouge et du bleu, ou avec du violet ;

Le vert avec du rouge ;

Le bleu avec du rouge et du jaune, ou avec de l'orangé ;

Le violet avec du jaune.

Bien entendu que la couleur ou les couleurs du rabat devront être en proportions d'autant plus fortes, que l'on voudra ternir davantage les teintes auxquelles on les ajoutera.

17. Si je n'ose pas assurer que la solidité des couleurs rabattues par ce procédé, soit égale à celle des couleurs élémentaires que l'on a mêlées, du moins, dans tous les cas, je

suis certain qu'elle est incomparablement plus grande que celle des couleurs rabattues par le procédé suivi aux Gobelins, toutes les fois que les couleurs constituantes ont été convenablement choisies.

18. Si le reproche qu'on peut faire aux tons clairs de la plupart des gammes qui sont teintes avec des matières réputées solides (*voyez* 4ᵉ Mémoire de la série des recherches chimiques sur la teinture, 55, 56, 57, 58), est applicable aux tons clairs des gammes rabattues par ces mêmes matières réputées solides, j'annoncerai que j'ai le moyen de remédier à cet inconvénient, ainsi que le constatent des couleurs gris de perle, bleu excessivement clair, bleu clair plus ou moins rabattu, etc., que j'ai faites dans les manufactures royales, et qui ont déjà soutenu l'épreuve de plusieurs années, dans des circonstances où quelques mois auraient suffi pour dénaturer complétement les couleurs semblables faites par les anciens procédés.

19. Le moyen de ternir soit une couleur simple par l'addition de deux couleurs, soit une couleur binaire par l'addition d'une couleur simple, indique ce qu'il faut éviter, lorsqu'on veut composer des couleurs binaires aussi brillantes que possible. Évidemment les deux couleurs mélangées devront être simples; ou, si elles sont complexes, le mélange ne devra présenter que deux couleurs simples. Par exemple: pour faire du vert, lorsqu'on manque de jaune et de bleu purs, il ne faut pas prendre du jaune orangé, ni du bleu violet, mais du jaune et du bleu verdâtres. Pour l'orangé, il faut, lorsqu'on manque de rouge et de jaune purs, recourir à du jaune et à du rouge tirant sur l'orangé, et non à du jaune verdâtre et à du rouge violâtre. Enfin, pour le violet, on choisira du bleu et du rouge violâtres de préférence à du bleu verdâtre et

à du rouge orangé. La construction chromatique hémisphérique donne le moyen de ne jamais s'égarer, lorsqu'on connaît la place qu'y occupent les matières colorées que l'on veut mêler.

III. Application du principe du mélange des couleurs au blanchiment.

20. Il y a longtemps qu'on a imaginé d'ajouter du bleu au papier, au linge, et généralement aux étoffes qu'on veut avoir blanches. Que fait-on réellement dans l'*azurage*? C'est ce que j'ai cherché à expliquer; mais avant de donner la théorie de cette opération si vulgaire, distinguons deux cas possibles, celui où l'objet azuré a un œil bleu, et celui où il ne l'a pas.

21. L'*objet a un œil bleu*. Il a donc perdu la couleur rousse qui déplaisait, par l'addition de la matière bleue qu'il a reçue; et cependant, la plupart des yeux trouvent l'objet *moins coloré* ou plus *blanc* qu'il n'était, malgré l'addition d'une couleur à sa couleur naturelle.

22. L'*objet n'a pas un œil bleu*. Vous obtenez ce résultat, non pas toujours avec du bleu violet, tel que le bleu de Prusse, l'azur, l'outremer, mais assez fréquemment avec du bleu et une quantité de rouge suffisante pour faire du violet. En un mot, ce résultat est obtenu, *lorsque la couleur ajoutée à celle de l'objet est sa complémentaire et que la proportion des deux couleurs donne la neutralisation*. Une conséquence de ce principe est que, si la couleur de l'objet est l'orangé, il faut du bleu pour la neutraliser; si elle est le jaune, il faut du violet. Enfin, si elle est le jaune orangé, un bleu tirant au violet doit être employé.

23. Toutes les expériences que j'ai faites dans l'intention

de contrôler ce principe, l'ont vérifié. Je le donne donc aujourd'hui comme démontré par l'expérience, et j'insiste sur la remarque exprimée au commencement de ce Mémoire, que l'art de faire du noir sur une étoffe par la fixation de matières de couleurs mutuellement complémentaires, repose sur le principe d'après lequel on *blanchit* par l'addition d'une matière colorée, une étoffe qui a elle-même une légère couleur.

24. Exposons les expériences et les observations dont le principe précédent est la conséquence.

J'ai pris une soie torse très-légèrement jaune, quoiqu'elle eût été non-seulement décreusée et blanchie, mais encore passée à l'acide sulfureux. Je l'ai partagée en quatre écheveaux, n° 1, n° 2, n° 3 et n° 4.

Le n° 1 n'a reçu aucune préparation; il est resté terme de comparaison ou *norme*.

Le n° 2 et le n° 3 ont été passés dans de l'eau d'acide sulfo-indigotique convenablement préparée; ils ont pris la même couleur verdâtre. Le n° 2 a été mis de côté. Le n° 3 et le n° 4, également mouillés, ont été passés dans de l'eau colorée avec de la cochenille ammoniacale.

Il est évident que le n° 2 et le n° 4 ont été préparés dans le dessein de représenter les quantités de matière colorée fixée sur eux, pour les comparer respectivement à ces mêmes quantités réunies sur le n° 3. La preuve maintenant que le bleu du n° 2 + le rouge du n° 4 = le bleu et le rouge fixés sur le n° 3, c'est que le n° 3 donne au tissage un tissu identique à celui qu'on forme en tissant un fil du n° 2 avec un fil du n° 4.

25. Passons aux conséquences de l'expérience :

Le n° 1 est sensiblement jaune; le n° 2 a la teinte verdâtre qui doit résulter du mélange du jaune avec du bleu, et le n° 4, la teinte orangée qui doit résulter du mélange du jaune avec le rose... Mais quelle est la couleur du n° 3? Pour l'apprécier, il faut le placer sur un fond blanc, d'abord entre les n^{os} 2 et 4, en laissant un intervalle suffisant pour détruire autant que possible l'effet du contraste, puis à côté, mais à distance du n° 1.

Dans la première position, le n° 3 ne paraît d'aucune couleur.

Dans la seconde position, le n° 3 ne paraît d'aucune couleur; ou, s'il en a une, c'est la teinte violacée que la vue du n° 1 développe par contraste.

Dans tous les cas, le n° 3 a été jugé sans hésitation et à l'unanimité par deux chefs d'atelier des Gobelins, par un peintre, par quatre teinturiers et par moi, comme étant *plus blanc* que les trois autres numéros, et ces jugements ont été portés par chacun de nous individuellement.

26. Mais pour que le jugement soit complet, il faut comparer *le blanc* du n°3 avec un blanc parfait. En prenant pour le terme de comparaison, la neige éclairée par la lumière diffuse du jour, *le n° 3 a paru avoir une teinte grise sensible. Conséquemment le procédé suivi pour neutraliser le jaune de la soie par du violet a produit du noir.* Mais quand la matière noire est, comme dans le cas qui nous occupe, excessivement petite relativement à la surface où elle a été mise, elle devient moins sensible que le jaune et le violet qui la constituent: dès lors nous jugeons cette surface *blanche;* et s'il nous arrivait de la comparer à une surface parfaitement blanche, nous jugerions la première couverte d'une ombre légère, tandis que la seconde ne nous le paraîtrait pas. Je tire de cette observation la conséquence, qu'en *teinture comme dans le blanchi-*

ment, neutraliser une couleur par sa couleur complémentaire, c'est faire passer l'étoffe d'une gamme colorée dans la gamme du gris normal.

27. Pour peu que la couleur neutralisée par une autre ait de l'intensité, le mélange est manifestement d'un ton plus élevé que ne l'était celui des couleurs neutralisées : quoiqu'il semble devoir en être de même pour les tons légers, cependant, lorsque j'ai fait juger des couleurs neutralisées sur des étoffes blanches, les opinions ont été partagées, parce que, quoiqu'il y ait réellement moins de parties à réfléchir de la lumière blanche dans l'échantillon neutralisé que dans l'échantillon primitif, l'absence de toute lumière colorée qui fait paraître l'étoffe plus blanche, peut aussi la faire juger plus lumineuse, ou, ce qui revient au même, d'un ton plus léger que l'étoffe, qui a une couleur déterminée, comme le jaune par exemple.

28. MM. Tresca et Eboli ont appliqué à la fabrication de la bougie stéarique le principe précédent, et des échantillons que je dépose sur le bureau donnent la preuve expérimentale,

1° Que si la matière de cette bougie est légèrement colorée en jaune, il suffit d'y ajouter une quantité convenable de violet, ou de bleu et de rouge, pour lui donner de la blancheur;

2° Que si la matière de cette bougie est très-sensiblement colorée, l'addition du violet, ou du bleu et du rouge, donne du gris ou du noir affaibli par du blanc.

Je joins à la fin de ce Mémoire une note que M. Tresca a bien voulu rédiger.

29. Enfin, un de mes élèves, directeur de verrerie, M. Chamblant, a obtenu des résultats analogues aux précédents, en

fondant des matières vitrifiables susceptibles de produire des couleurs mutuellement complémentaires.

CONCLUSIONS.

1° Lorsqu'on mélange en proportions convenables des corps colorés suffisamment divisés, soit des matières tinctoriales, soit des poudres colorées employées en peinture, soit enfin des fils propres à la tapisserie, le résultat du mélange est du noir, si le mélange réfléchit peu ou pas de lumière blanche; il est du gris normal, s'il en réfléchit une quantité notable.

2° Ce principe et l'observation que deux tons complémentaires très-légers sont plus perceptibles, comme lumières colorées, que le gris très-pâle auquel leur mélange donne naissance, expliquent le résultat qu'on obtient par tout procédé où l'on détruit une teinte légère d'un objet blanc par l'addition d'une matière colorée; de sorte que, comme je l'ai dit, le procédé de faire du noir avec les couleurs complémentaires, et celui d'augmenter la blancheur d'une surface légèrement colorée, découlent d'un même principe.

La généralité du résultat auquel je suis parvenu paraîtra encore plus grande, lorsque je rappellerai le parti que j'ai tiré du principe précédent, pour détruire un effet du contraste qui a quelque inconvénient dans le cas où l'on veut que des dessins paraissent incolores, c'est-à-dire, blancs ou d'un gris normal léger sur des fonds colorés, au lieu de paraître de la couleur complémentaire de ces fonds, comme cela a lieu. Il suffit de mêler à la matière du dessin un peu de la couleur du fond, pour que l'effet de cette couleur complémentaire soit neutralisé par la couleur ajoutée. Le résultat est du gris normal, comme si la couleur complémentaire résidait réellement dans une matière alliée à la matière blanche. La même addition peut être faite à la matière des dessins noirs sur fond de couleur.

NOTE DE MM. TRESCA ET EBOLI.

Guidé par le souvenir d'une leçon que fit en 1835 M. Chevreul sur la théorie des couleurs complémentaires, l'un de nous pensa qu'il pourrait tirer parti de cette théorie, pour détruire dans l'acide stéarique le ton jaunâtre qu'il doit à la présence d'une certaine quantité d'acide oléique qu'il retient toujours.

Vers la fin de 1838, nous avons essayé d'introduire ce perfectionnement dans notre fabrication, et successivement nous avons fait usage de la plupart des matières colorantes, dont le mélange pouvait nous fournir le bleu violet dont nous avions besoin pour atteindre notre but.

Toujours cette addition a rendu la blancheur de notre bougie plus éclatante ; l'indigo seul nous a présenté une exception qui doit sans doute être attribuée à une action chimique que les acides gras exerceraient sur lui ; la couleur que nous avons préférée est un mélange de carmin et de bleu de Prusse, ou mieux encore le bleu de cobalt ou l'outremer ; ce procédé, qui dans le principe avait présenté quelques difficultés d'exécution, reçoit chez nous, depuis plus de neuf mois, une application facile et journalière.

Lorsque nous avons voulu appliquer ce même principe à des produits très-colorés, jamais nous n'avons pu produire qu'une teinte grise très-prononcée, au lieu du blanc que l'on obtient avec des matières plus belles.

Nous avons observé, dans ces derniers temps, un fait qui nous prouve qu'il peut exister entre des corps colorés organiques, que l'on réunit de cette manière, une sorte de combinaison qui les rend chacun plus stable; certain corps très-altérable, tel que l'orcanette, qui disparaîtrait rapidement par son exposition à l'air, devient très-stable lorsqu'elle se trouve mélangée avec d'autres corps colorés dans la proportion convenable, pour qu'il y ait neutralisation de couleur; tandis que si la lumière agissait sur l'orcanette unie au bleu de Prusse, comme elle agit sur l'orcanette qui est isolée, elle détruirait dans le mélange la portion de coloration qui est due à l'orcanette, et dès lors amènerait au vert la bougie naturellement jaunâtre qui aurait reçu un mélange de bleu de Prusse et d'orcanette.

FIN DU TOME DIX-SEPTIÈME.

ERRATA DU TOME XVII.

Pages	Lignes	Fautes	Corrections.
254,	dernière,	$(-)\,1^{\varpi h}$	$(-1)^{\varpi h}$
258,	15 et 19,	o	o
261,	14,	en ayant égard aux	à la place des
268,	3,	$[1.2.-(h+k-n)\varpi]$	$[1.2\ldots(h+k-n)\varpi]$
	6,	$(-1)^{(h+k)\varpi+l}$	$(-1)^{(h+k)\varpi+1}$
277,	20,	$x^{\nu-1}\equiv,$	$x^{\nu-1}\equiv 1,$
280,	15,	$R_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3}),\,u^{\nu-3}+\nu(1-u^{\nu-3})}$	$R_{u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3}),\,u^{\nu-3}-\nu(1+u^{\nu-3})}$
281,	19,	$f_0^2+f_1^2+g_0^2+g_1^2$	$f_0^2+\nu f_1^2+g_0^2+\nu g_1^2$
285,	13,	$u^{\nu-2}$	$u^{\nu-3}$
291,	3,	x^2+3y^2	x^2+13y^2
293,	7,	$\mathfrak{F}(\sqrt{-1},\varsigma)+\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')$	$\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma)+\mathfrak{F}(-\sqrt{-1},\varsigma'')$
	12,	$\dfrac{R_{21,15}}{R_{11,15}R_{19,7}}$	$p\,\dfrac{R_{21,15}}{R_{11,15}R_{19,7}}$
	14,	$\dfrac{R_{31,47}}{R_{37,41}R_{33,49}}$	$p\,\dfrac{R_{31,47}}{R_{37,41}R_{33,45}}$
321,	dernière,	$R^{20,17}$	$R_{20,17}$
343,	10,	μ	p
	avant dernière	p	ρ
344,	10,	$\rho^{\frac{n-1}{2}}$	$\rho^{\frac{n}{2}}$
354,	16,	$(-1)^{\frac{p-1}{1}}$	$(-1)^{\frac{p-1}{2}}$
363,	6,	$2(4\nu\omega\varpi+1)^{\mu}$	$2(4\nu\varpi+1)^{\mu}$
367,	23,	$[\varphi(r)\,\chi(r)]^2$	$\varphi(r)\,\chi(r)$
	24,	$\varphi(r)\,\chi(r)$	$[\varphi(r)\,\chi(r)]^2$
369,	13,	racine	racines
371,	3,	l'équation	l'équivalence
375,	4,	fraction	fonction
	8,	$S(\tau^{ih+jk})$	$S(\rho^{ih+jk})$
378,	20,	l'équivalence (14)	l'équivalence (13)

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
379,	11 et 12,	s^{n-t}	s^{n-1}
381,	13,	$\frac{1}{2}(A+B\Delta)$	$\frac{1}{2}(A-B\Delta)$
382,	2,	B^2	nB^2
	11,	p, (mod. n).	p.
383,	6, 7 et 9,	$p^{\frac{n-1}{2}}$,	$p^{\frac{n-1}{4}}$,
384,	16,	$[1]=p^{\frac{n-1}{2}}, [-1]=p^{\frac{n-1}{2}}$	$[1]=p^{\frac{n-1}{4}}, [-1]=p^{\frac{n-1}{4}}$
391,	6,	$\Theta_{1,a}$	$\Theta_{,a}$
394,	10,	$+u^3$	$+\varsigma u^3$
397,	15,	Λ'	Δ'
	21,	$\frac{1-\Delta'}{2}\frac{1-\Delta}{2}+\frac{1+\Delta'}{2}\frac{1+\Delta}{2}$	$\frac{1-\Delta'}{2}\frac{1+\Delta}{2}+\frac{1+\Delta'}{2}\frac{1-\Delta}{2}$
402,	17,	ς,	ς^u
403,	14,	en changent	en changeant
404,	2,	à la fin	à la fois
405,	3,	leurs deux somme a	leur demi-somme a
	4,	leurs demi-différences b	leur demi-différence b
408,	15,	$p^{\frac{N}{8}}$	$p^{\frac{N}{2}}$
425,	9,	est de la forme $8x+5$ ou $4x+3$.	n'est pas divisible par 4.
	dernière,	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{8}$
434,	6,	R,	$R_{1,1}$
438,	9,	la seconde, savoir	la seconde
439,	6,	une de ces racines	une semblable racine
440,	dernière,	(13)	(14)
443,	6,	$\overline{e^{\frac{1}{4}z}-e^{-\frac{1}{4}z}}$	$\overline{e^{\frac{1}{4}z}+e^{-\frac{1}{4}z}}$
451,	3,	$2^{\frac{p-1}{2}}-$	$2^{\frac{p-1}{2}}=$
456,	20,		(5)

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
465,	16,	la puissance ascendante	les puissances ascendantes
478,	20,	sera	ce rapport sera
480,	8,	renfermeront	renferment
494,	7,	ρ_{n-1}	ρ^{n-1}
496,	5,	k et $k\varpi$	k paa $k\varpi$
	14,	en supposent	en supposant
497,	1,	$t^{\nu m}$	$r^{\nu m}$
503,	13,	$2 - 7$.	$2 . 7$.
514,	20,	membre premier.	nombre premier.
528,	13,		(2)
532,	16 et 19,	second nombre	second membre
533,	16,	(13)	(12)
534,	9,	première	la première
535,	18,	(mod. ν).	(mod. n).
536,	6,	les différences	la différence
538,	6,	$\omega = 8$.	$\omega^2 = 8$.
540,	4,	$\omega = -n$	$\omega^2 = -n$
547,	7,	des termes	les termes
550,	16,	ρ	Δ
580,	11,	$+\rho^5$	$-\rho^5$
	13,	$-\rho^3$	$+\rho^3$
	20,	$-\rho-\rho^3$	$-\rho^3-\rho^5$
593,	9,	$h\,h'h'', \ldots$	$h, h', h'', \ldots$
595,	15,	$(-1)^{\frac{\nu-1}{1}}$	$(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}$
606,	11,	ou	on
617,	11,	α^2	a^2
	12,	$\frac{n\pi}{2}$.	$\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}$.
623,	4 et 14,	(1)	(30)
625,	12,	sont	seront
627,	4,	$1+\rho^4+\rho^6+\rho^3+\rho^{16}$	$1+\rho+\rho^4+\rho^9+\rho^{16}$

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
631,	23,	$\nu\,\nu'\nu'',\ldots$	$\nu\,\nu'\nu''\ldots$
660,	9,	$e^{\frac{2\sigma}{3}\sqrt{-1}}$	$e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$
661,	6,	du signe	du signe $+$
671,	9 et 14,	première	seconde
701,	12,	correspondent	correspondront
	14,	se partagent	se partageront
702,	avant-dernière,	donnent	donneront
704,	14,	le nombre	ce nombre
709,	19,	nombres	membres
720,	16,	celle-ci	celles-ci
721,	3,	(64)	(65)
732,	12,	ϖ^2	3^2
	14,	$\varpi = \varrho$	$\varpi = 5$
733,	dernière,	$\perp$	$+$
734 et 735,	3,	$4x + 3$	$4\mathrm{x} + 3$

ERRATA DU TOME XVI.

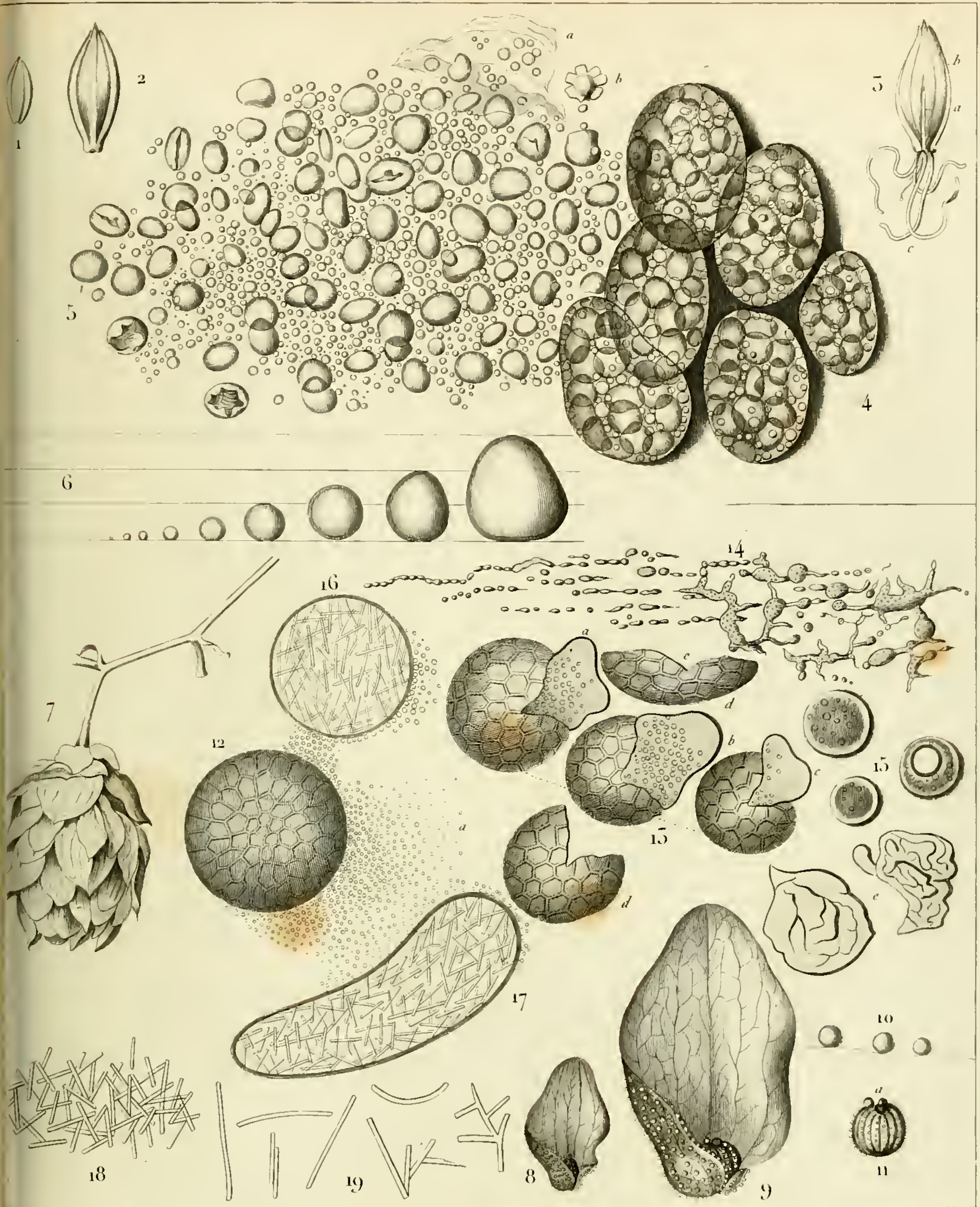
Page 462, ligne 9, en remontant, *au lieu de* : $\frac{1}{2}\,\delta H$, *lisez* : δH.

Page 470, ligne 5, *au lieu de* : $+\frac{1}{2}e^2$, *lisez* : $+\frac{1}{4}e^2$.

Page 472, ligue 9, en remontant, *au lieu de* : Morella, *lisez* : Formentera.

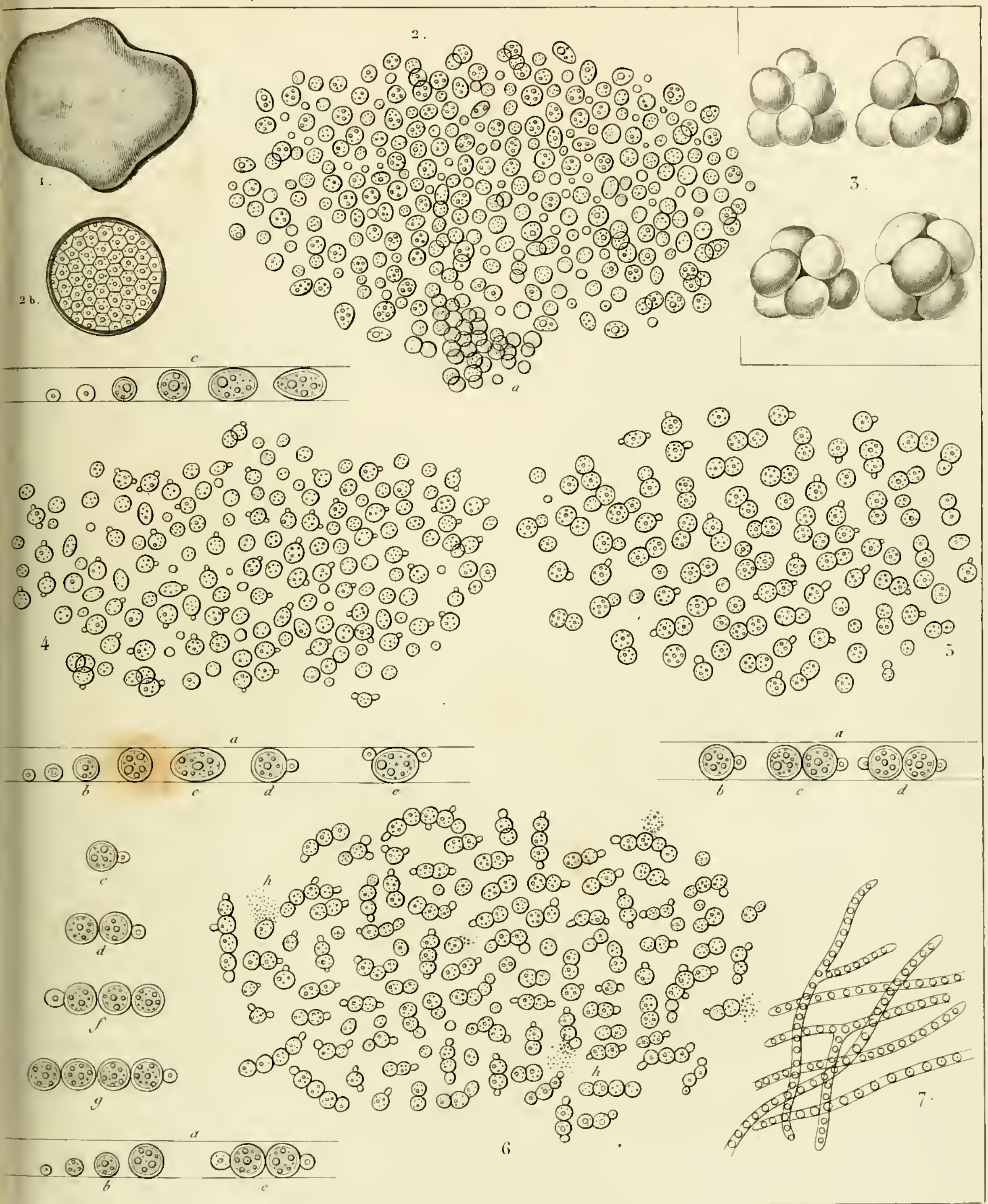
Page 476, ligne 11, au dénominateur, *au lieu de* : $+\frac{p}{m}$, *lisez* : $+\frac{1}{2}\frac{p}{m}$.

Idem, ligne 15, *au lieu de* : $= 7.818702$, *lisez* : $= 7.8188702$.



n del. Plée sc.

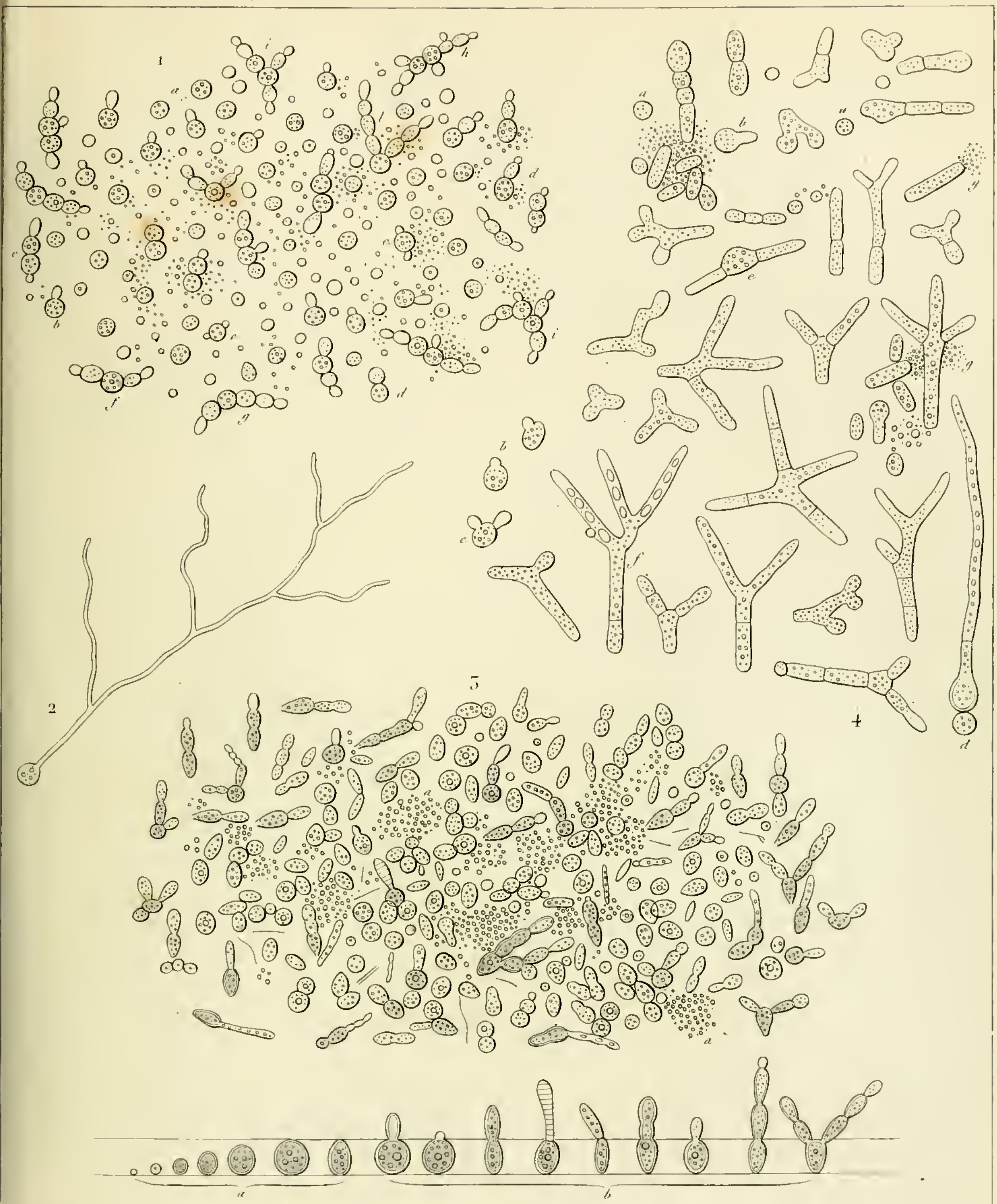
1. Grain d'Orge _ 2 Id. grandi _ 3 Id. en germination _ 4 Vésicules du tissu cellulaire du périsperme remplies de leur globuline _ 5 Globuline éparse _ 7 Cône de Houblon, grand. nat. _ 8, 9. Écailles avec leur fruit _ 10 Glandules des écailles _ 11 Fruit isolé _ 12 Glandule vue au microscope avec explosion de ses globulins
13, a, b, c Glandules laissant sortir leur vésicule interne _ 14 Huile sortie d'une glandule _ 15. Id. réunie en gouttelettes _ 16, 17 Cristaux formés dans ces bulles gazeuses.



…rpin del. Plée sc.

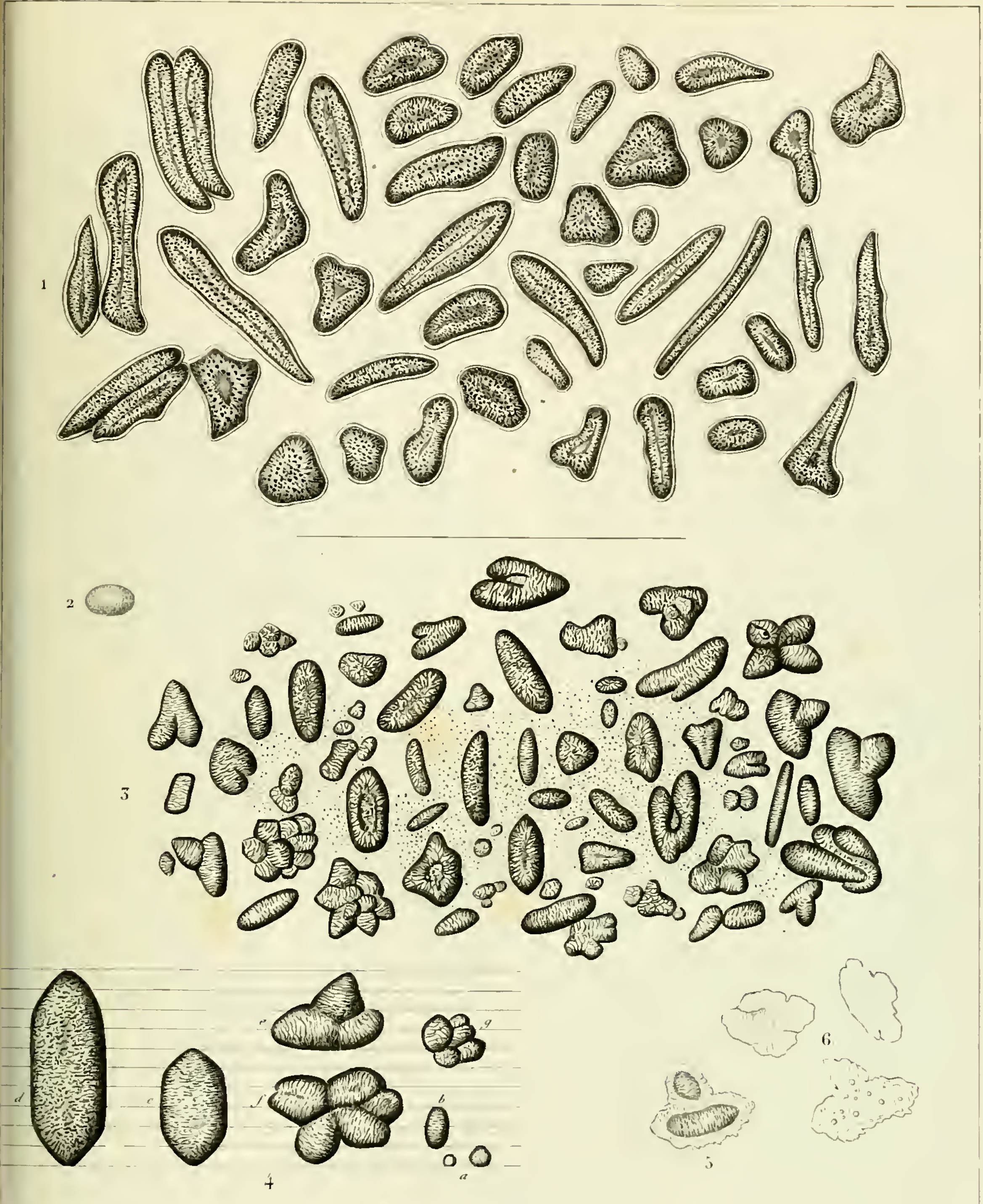
TORULA CERVISIÆ, Turp.

Végétation des globules de la Levure de bière pendant la fermentation, considérée comme cause de la décomposition du sucre.
1. Levure vieille vue à l'œil nu _ 2. Id. vue au microscope _ 4. Globules vésiculaires de Levure commençant à germer.
5. Id. plus avancés et déjà formés de deux articles _ 6. Id. plus développés encore et tels qu'ils sont à la fin de la fabrication de la bière.



Turpin del. Plée sc.

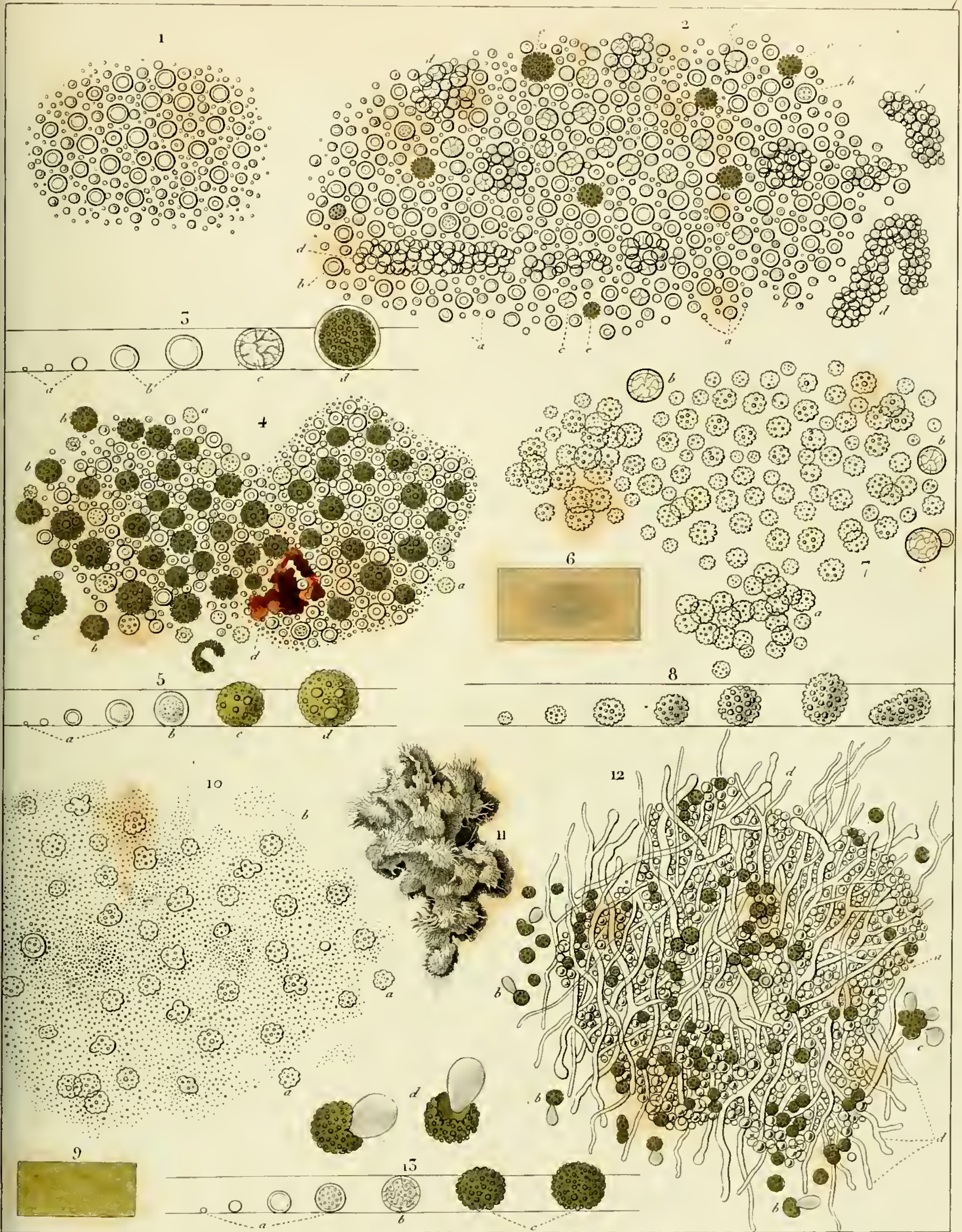
1. Globules vésiculaires de Levure de bière développés, en Torula cervisiæ, dans de l'eau sucrée — 2. Globule étranger aux précédents ayant végété en un filament d'Hygrocrocis — 3. Globules vésiculaires de Levure de bière tels qu'ils se développent et se modifient dans la bière achevée — aa Globulins de la Lupuline — 4. Mycoderme du moût de bière, vu au microscope, dans ses divers états de germination



Turpin del. Plée et Mougeot sc.

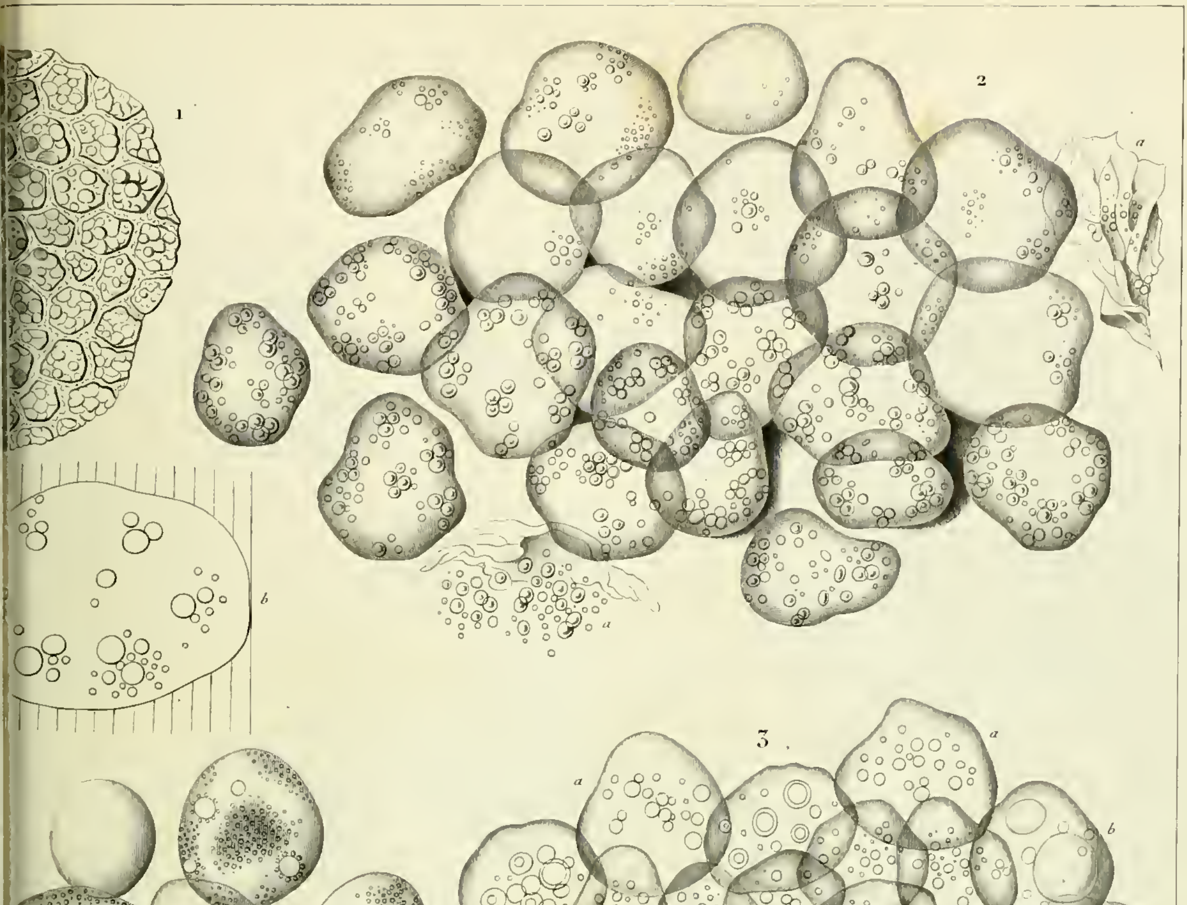
1. Vésicules dissociées de la noix de Coco, incrustées ou remplies de Sclérogène.
2. Ossetet crétacé de l'Arion Empyricorum, Ferus., de grand. nat. — 3. Vésicules dissociées du même Ossetet, incrustées de Carbonate de chaux, vues au microscope.

Laits plus ou moins morbides des Vaches malades de la Cocote, comparés au lait normal.



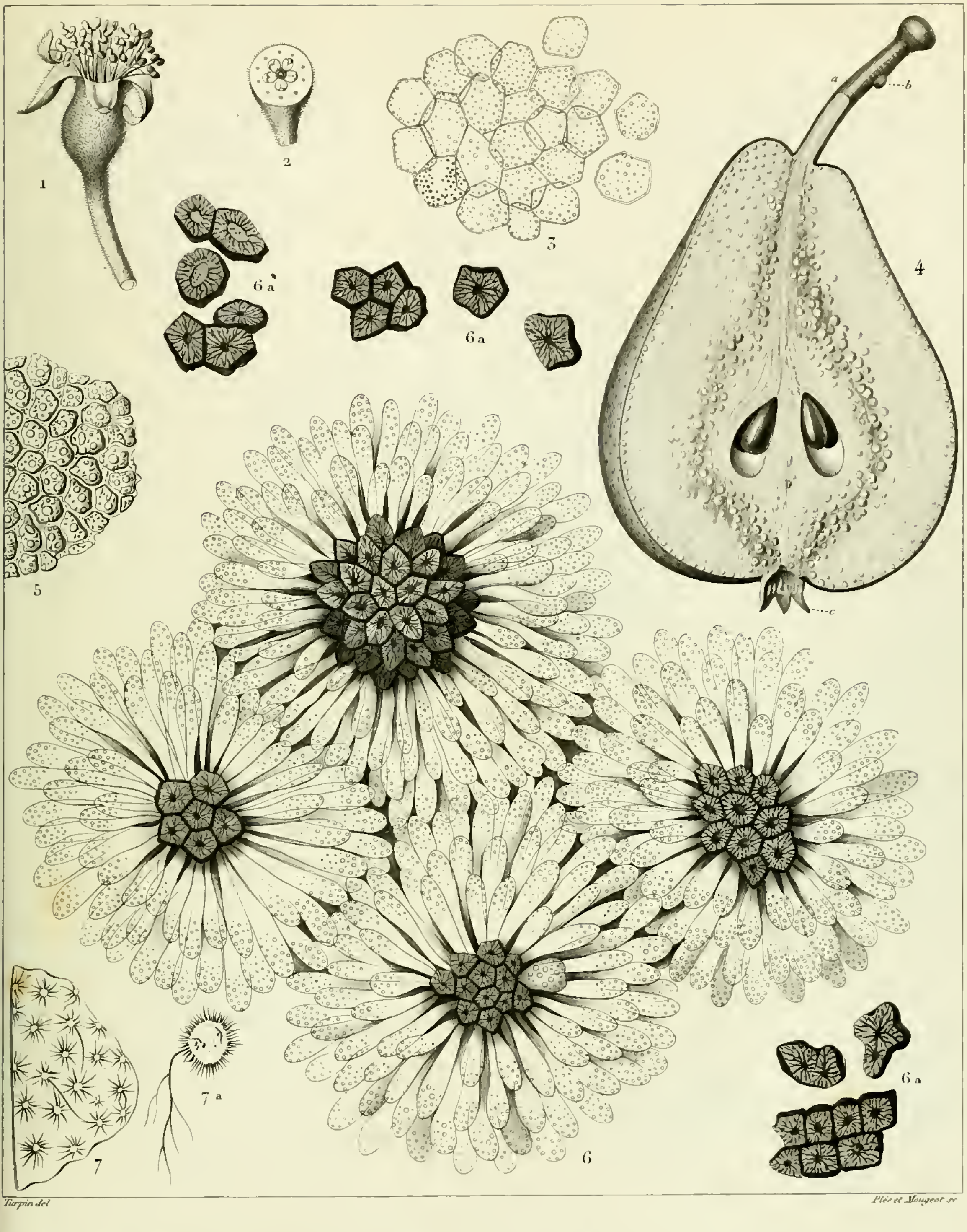
Turpin del. Plée sc.

1. Globules du lait à leur état normal ou de vie organique _ 2. Globules la plupart malades, quelques uns privés de la vie _ 4. Globules morts, dont le plus grand nombre est passé à l'état granuleux et olivâtre _ 7. Globules morts, crispés et granuleux. _ 10. Globules morts, en grande partie décomposés et devenus fétides par la décomposition _ 11. Lait devenu filamenteux dans l'intérieur des voies lactées d'une vache malade. _ 12. id. vu au microscope.



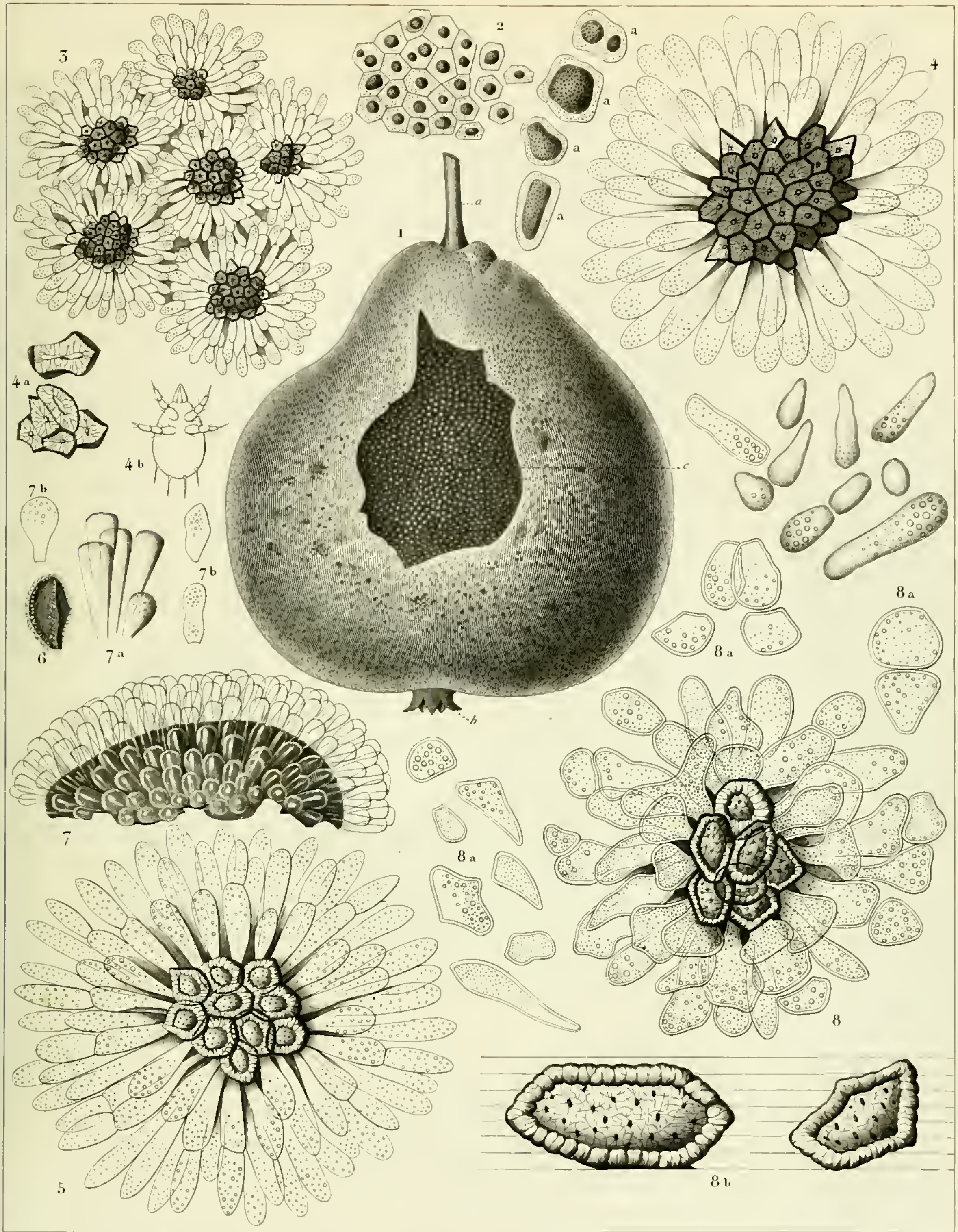
Plée et Mougeot sc.

1 et 2. Épiderme et Vésicules du Tissu cellulaire de la Passe-Pomme rouge.
3. Vésicules du Tissu cellulaire du Calville blanc, dont un grand nombre sont prolifères — 4. Vésicules du Tissu cellulaire du Melon, pour la plupart prolifères.



Turpin del. Plée et Mougeot sc.

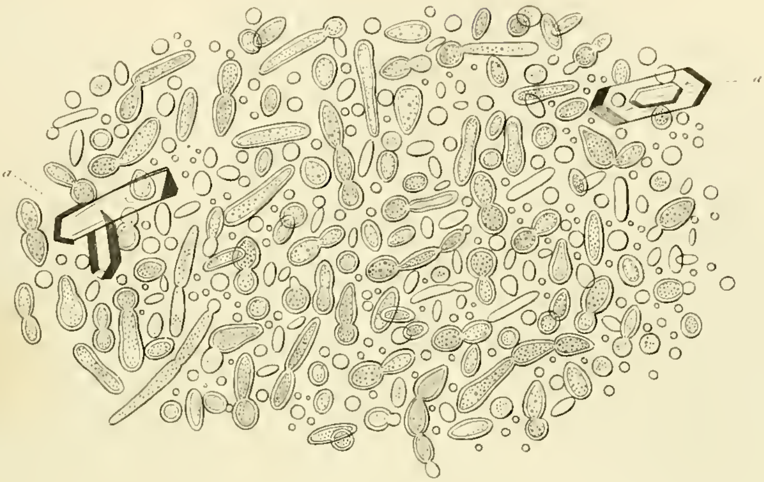
1. Ovaire de la Poire de St Germain — 2. id. coupé en travers — 3. Vésicules du Tissu cellulaire du même.
4 Coupe d'une Poire de St Germain — 5. Morceau d'épiderme — 6. Pierres composées avec leurs Vésicules rayonnantes — 6 a, 6 a, 6 a. Pierres isolées de leurs Vésicules — 7 et 7 a. Figures de Duhamel.



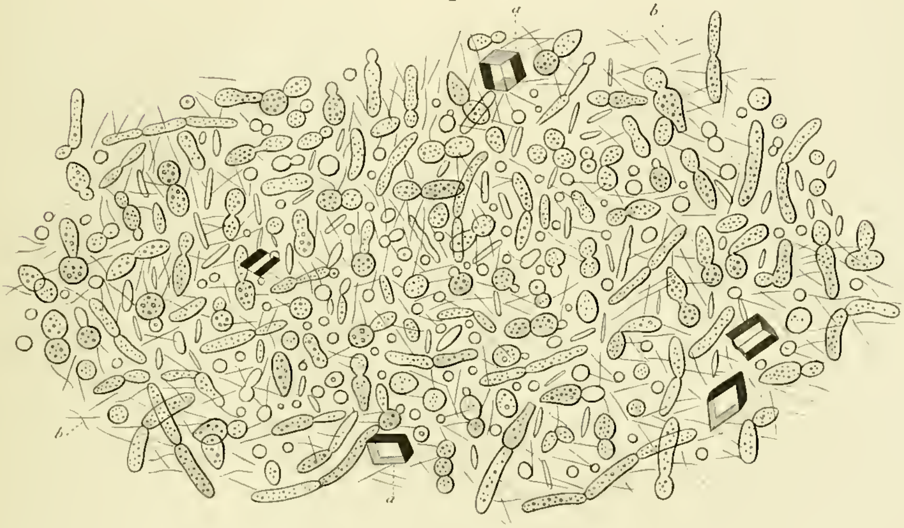
Turpin del. Plée et Mougeot sc.

1. Poire de Messire-Jean — 2 a a a a. Vésicules de l'épiderme — 3. Quelques pierres composées, avec leurs Vésicules rayonnantes — 4. Une pierre isolée de la chair — 5. Une pierre composée, avec ses Vésicules rayonnantes, isolée de la chair du Coing — 6. Graine du même fruit — 7. Une portion très grandie de l'enveloppe de la même graine. 8. Une pierre composée, avec ses Vésicules rayonnantes, isolée de la chair de la Nèfle.

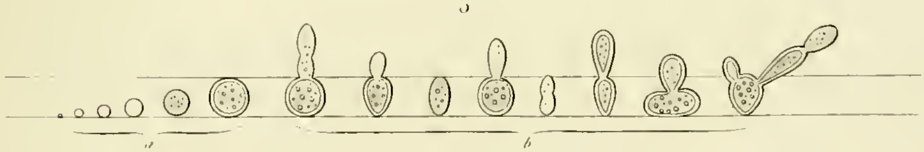
1



2



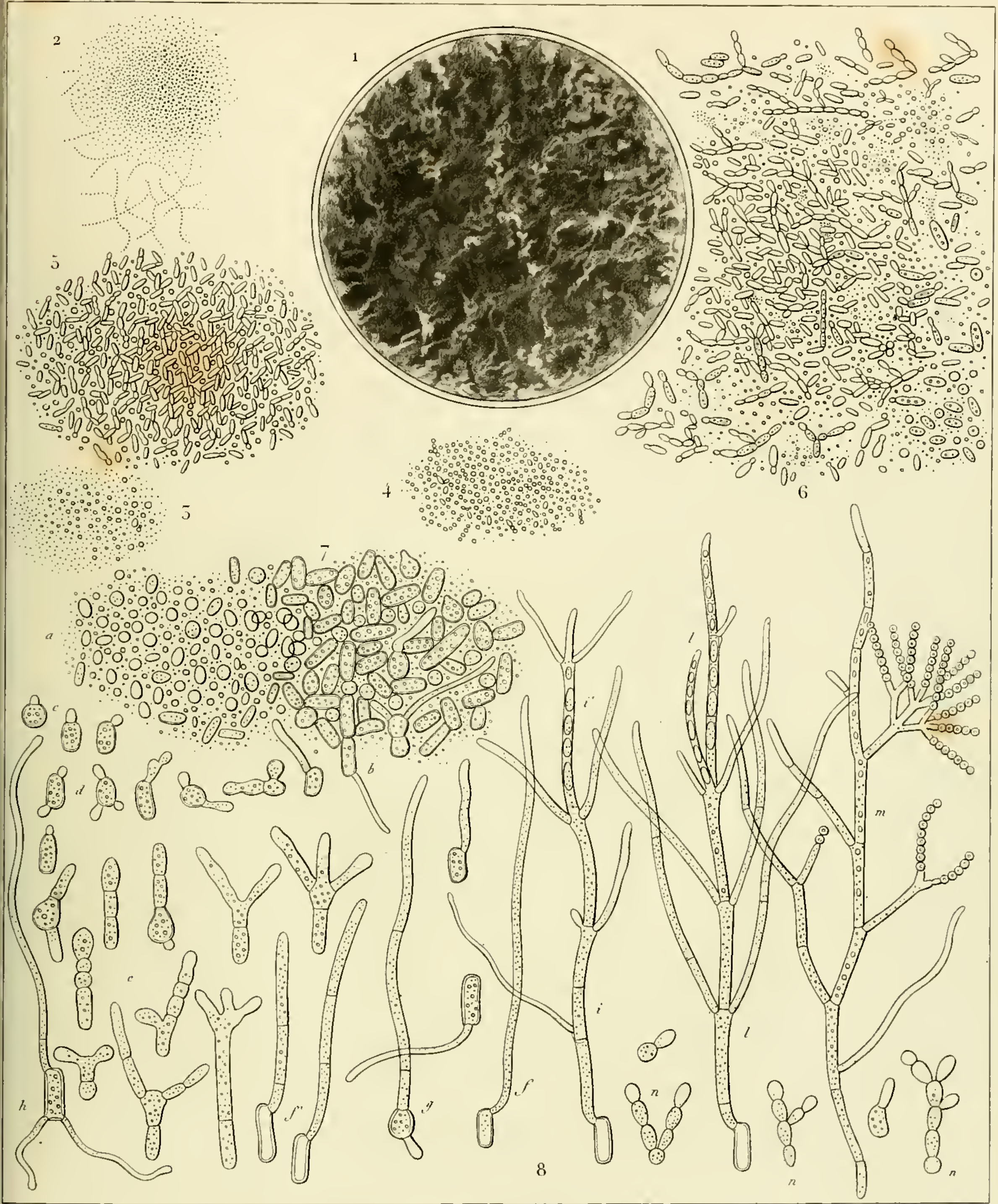
3



rpin del. Plée sc.

Levure du jus de Chasselas filtré, composée des globulins qui ont traversé le filtre et plus ou moins développés en autant de petits végétaux

Levure du jus de Pommes filtré, composée des globulins qui ont traversé le filtre et développés en de petits végétaux

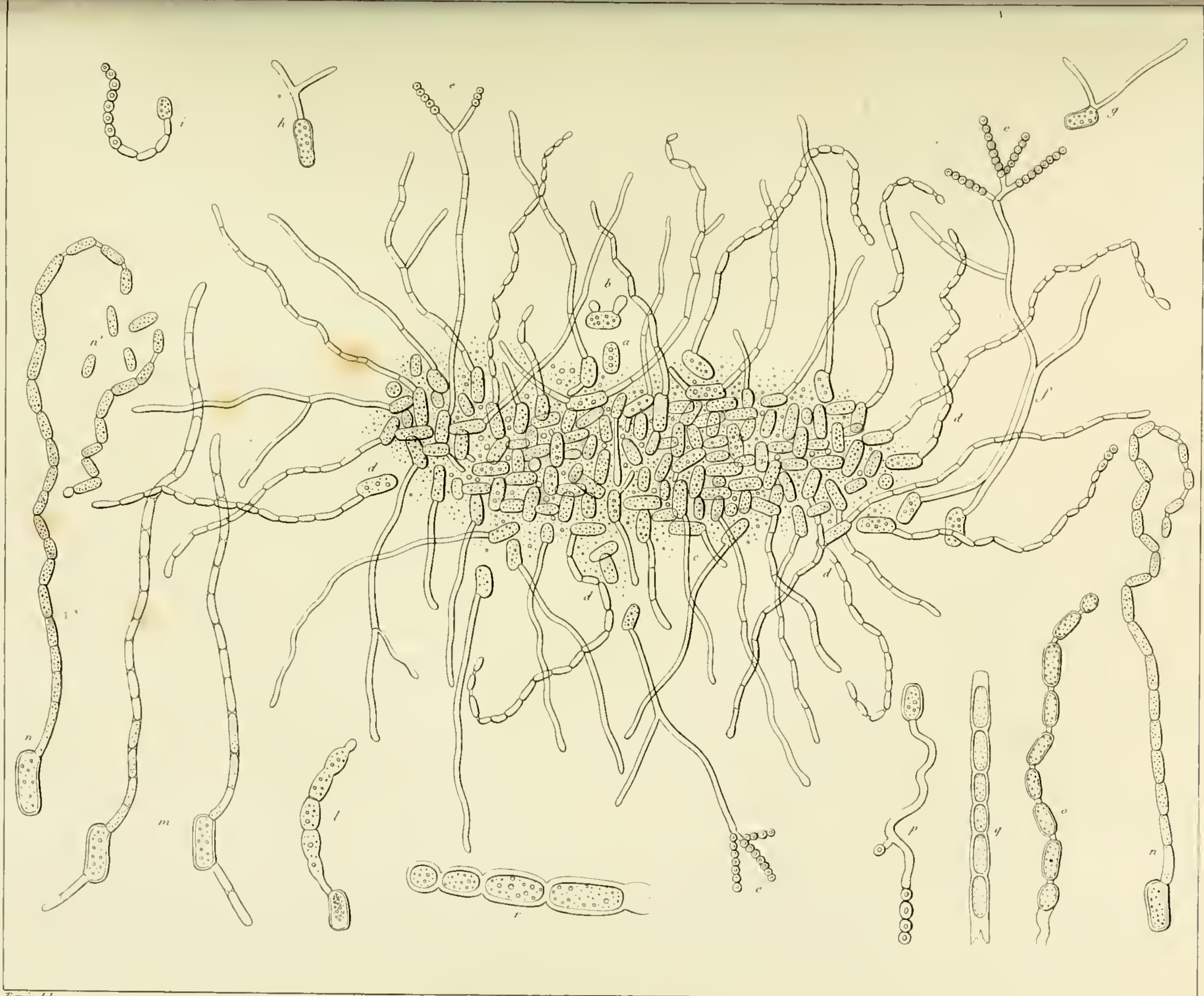


Turpin del. Plée sc.

MYCODERMA CERVISIÆ, *Desmaz.*

Mycoderme de la bière et du moût de bière dans tous ses états de végétation

1. *Bière contenue dans un verre, exposée à l'air, et couverte de son Mycoderme végétant* – 2, 3, 4, 5 *et* 6. *Mycoderme vu au microscope et dans des états plus ou moins avancés de végétation* – 7 *et* 8. *Mycoderme du moût de bière vu au microscope dans toutes les phases de son développement.*

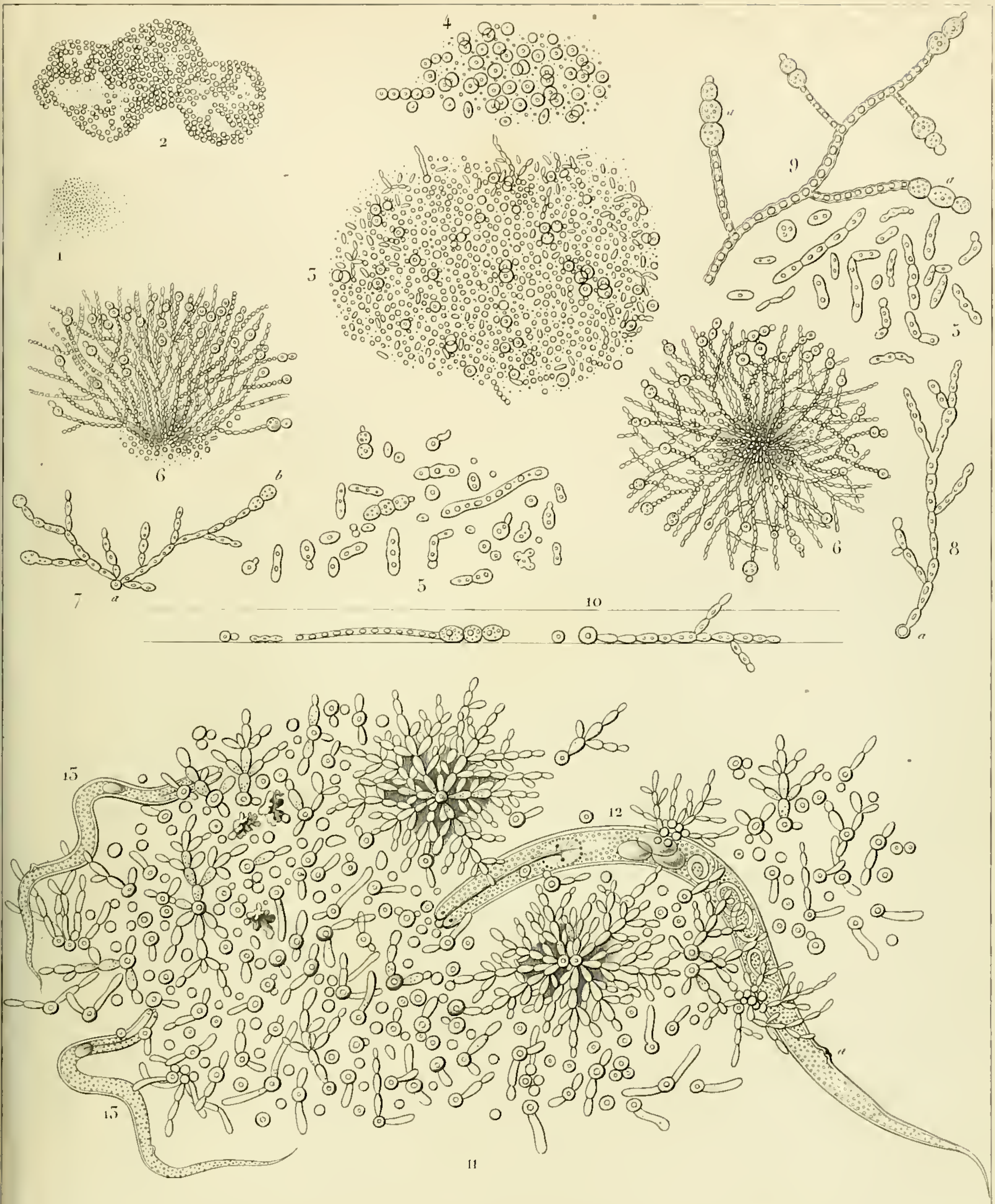


Turpin del.

Plée sc.

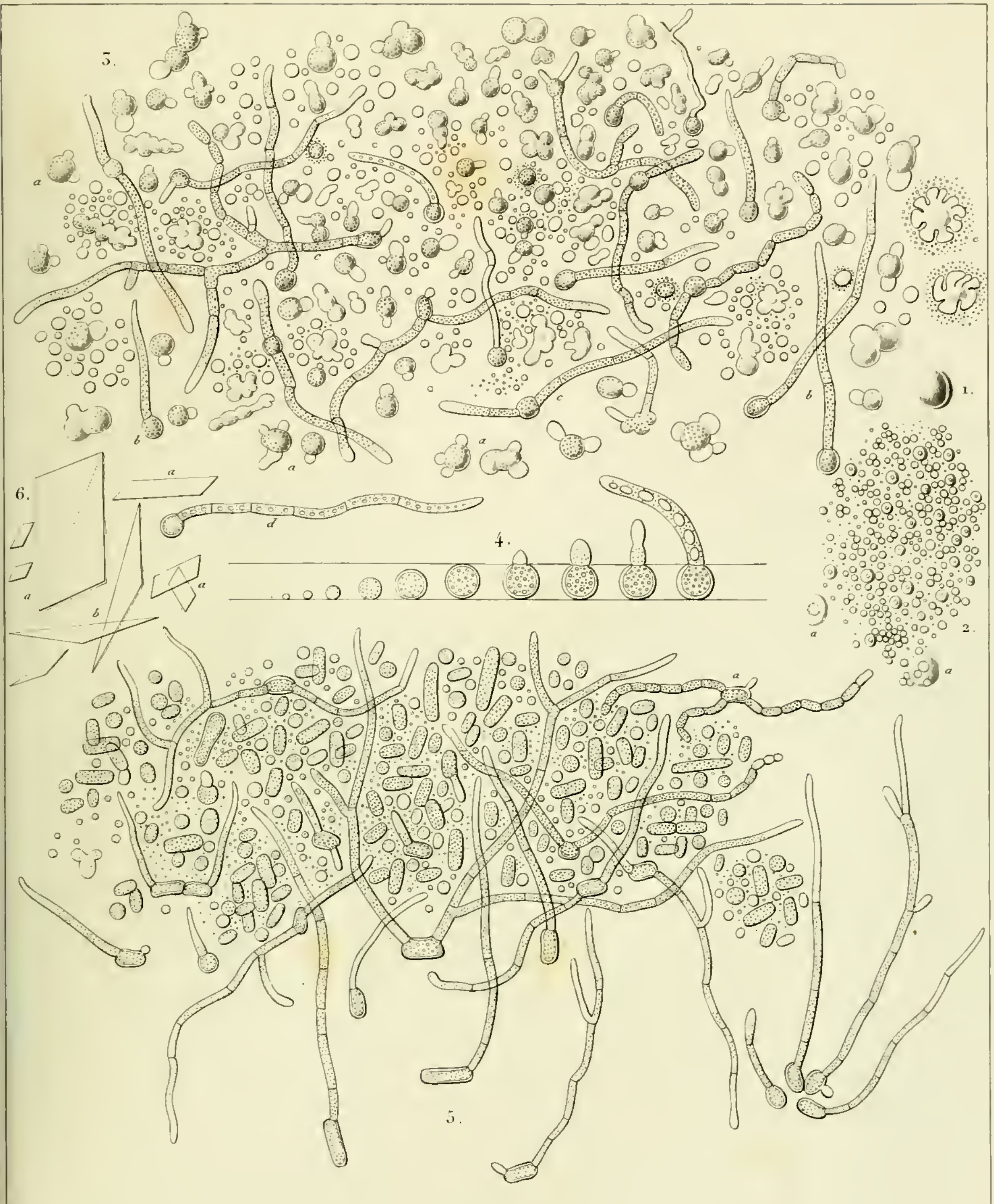
MYCODERMA CERVISIÆ, *Desmaz.*

Mycoderme de la bière en amas d'articles de tigellules et de séminules atténuées, germant et végétant entre deux lames de verre et se terminant en Penicillium glaucum.



Turpin del. Plée sc.

1 à 10. _ Levure produite par l'albumen de l'Œuf dans tous ses états de végétation.
1. Globulins au moment où ils apparaissent au microscope et au début de la fermentation _ 2. id. plus développés.
3. plus avancés encore _ 4. dont le plus grand nombre ont atteint leur diamètre _ 5-5. Végétations des globules plus ou moins avancées _ 6-6. Végétations terminées, Leptomitus albuminis, Turp. _ 7-8-9. (Individus isolés.
11. Levure ou (Mère du vinaigre avec les Anguilles ou Vibrions qui s'en nourrissent.)



Turpin del. Plée sc.

Végétation des globules du lait, considérés comme un véritable Levure, pendant la fermentation de ce liquide

1. *Goutte de lait* — 2. *Globules de lait vus au microscope* — 3. *Id. plus ou moins avancés en germination ou en végétation*

5. *Végétations provenant d'articles séparés des tigellules précédentes* — 6. *Cristaux lamelleux qui se forment dans le lait après son extraction et par évaporation*

Turpin del. — Plée sc.

PENICILLIUM GLAUCUM, Linck.

Végétation achevée des globules du lait pendant la fermentation, agglomérés en masse, entretenus humides entre deux lames de verre et s'étant développés en pleine végétation.

Planche I du Memoire de M. Biot sur la Physique du Globe

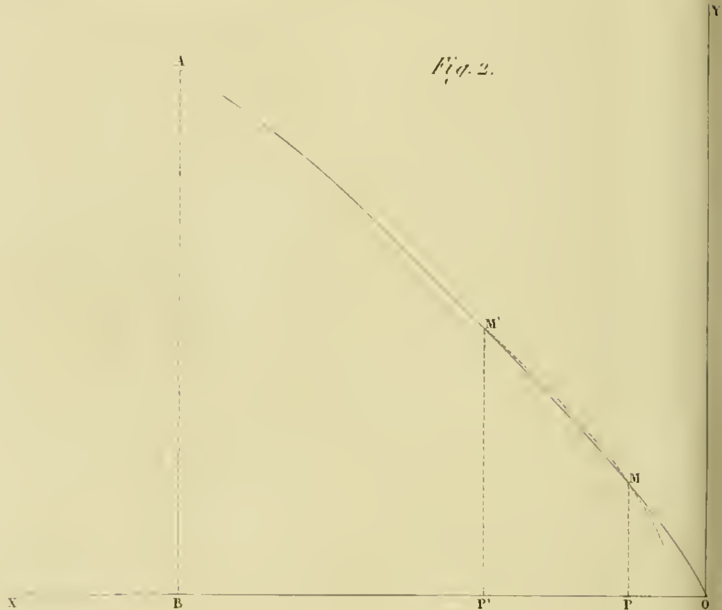


Fig. 2.

Fig. 1.

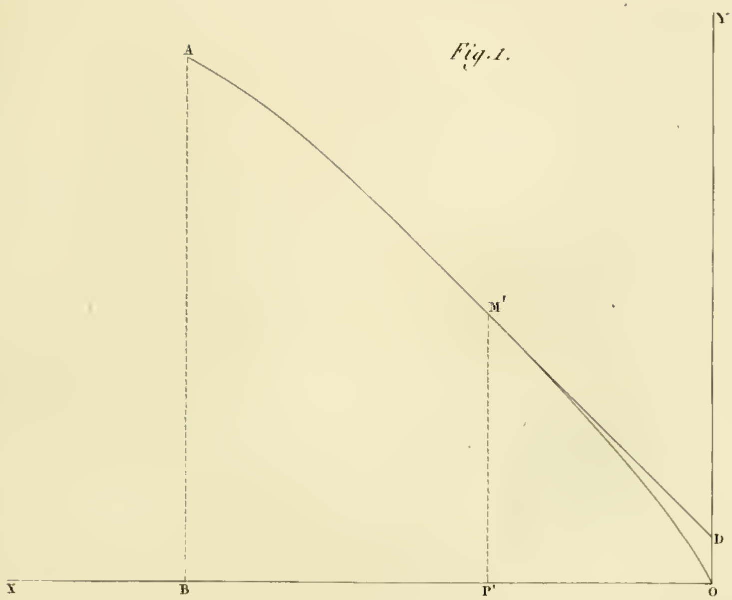


Planche II du Mémoire de M. Biot sur la Physique du Globe.

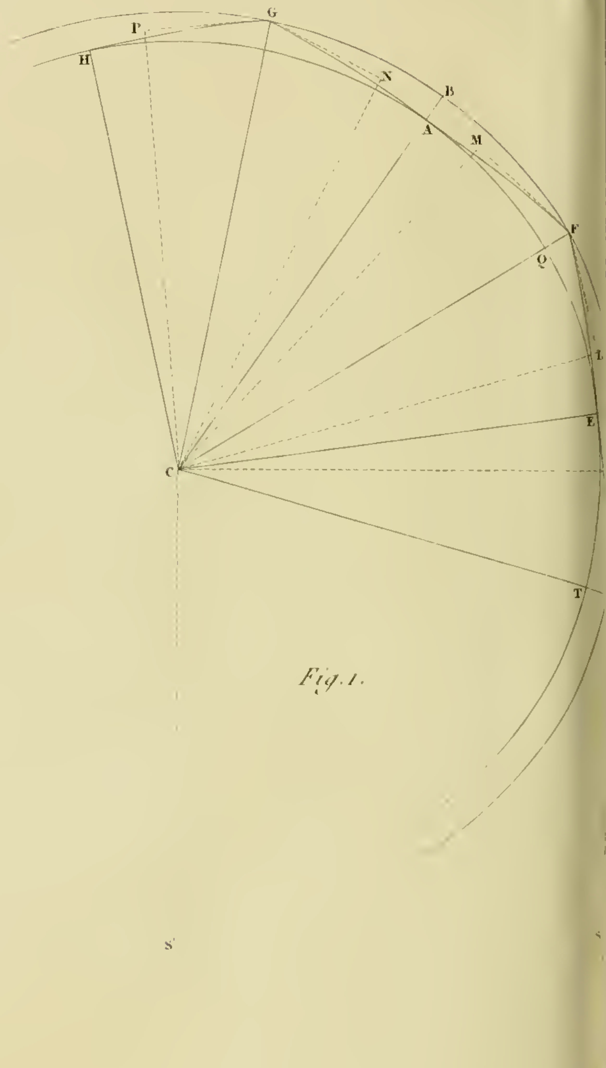


Fig. 1.

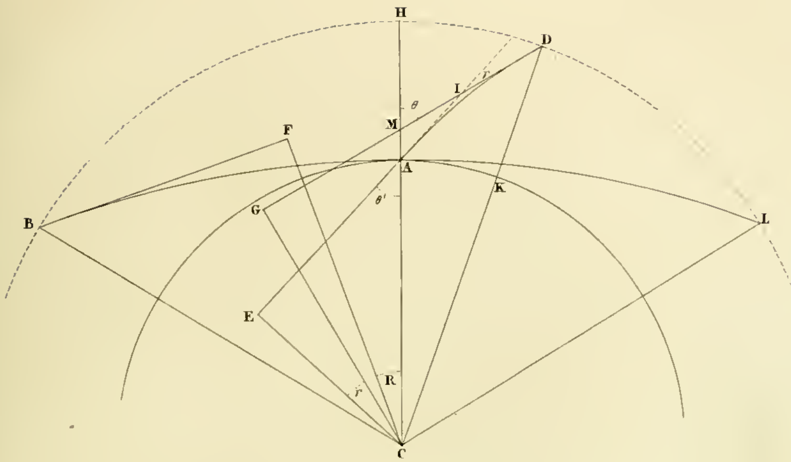


Fig. 2.